

ネットワーク構造が2x2ゲームに及ぼす影響に関する考察

相良 博喜[†] 谷本 潤[‡]

[†]九州大学大学院総合理工学府環境エネルギー工学専攻・修士課程

[‡]九州大学大学院総合理工学府環境エネルギー工学専攻・教授・工博

〒816-8580福岡県春日市春日公園6-1九州大学総合理工学府環境エネルギー工学専攻 都市建築環境工学研究室

E-mail: [†]uminchu@uminchu.jp, [‡]tanimoto@cm.kyushu-u.ac.jp

概要 ゲームプレーヤーにRegular graphやSmall worldなどのネットワーク構造を課す効果に関する先行研究はあるが、それらのゲーム構造としてはPD（一部はChicken）が仮定されている。本論では、ネットワークパラメータやゲームパラメータの影響を鋭敏に受けるのは、PDよりStag HuntやChickenのゲーム領域であることを示し、これらの領域で協調のメカニズムについて考察した。

キーワード ネットワーク ランダムレギュラーグラフ ゲーム理論 囚人のジレンマ

A study on the effect of network structure in 2x2 game.

Hiroki Sagara[†] Jun Tanimoto[‡]

[†] Graduate Student, Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

[‡] Prof., Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University, Dr.Eng

E-mail: [†]uminchu@uminchu.jp, [‡]tanimoto@cm.kyushu-u.ac.jp

Abstract There are several stocks of early studies on how the network structure such as Regular graph and Small World effects on a 2x2 game. Most of those assume Prisoner's Dilemma (or Chicken in some cases) as a typical game structure. In the present study, it has been proved that Stag Hunt and Chicken are more significantly influenced by the network parameters than PD. Occurring mechanism of collective cooperation in those game regions are profoundly discussed.

Keywords Network Random Regular Graph Game Theory Prisoner's-Dilemma

1. 緒言

囚人のジレンマゲーム (Prisoner's Dilemma, PD) は多くの分野において利害関係のジレンマ状況を説明する基本モデルとして応用されている。PDのNash均衡は裏切り (Defect, D) となるが、ゲームに対戦相手を制限するような付加的な枠組み (例えば、繰り返しゲーム¹⁾、Lonely戦略 (対戦拒否)²⁾の許容、Tagによる識別³⁾) を入れることで互惠関係 (Reciprocity) に基づく協調 (Cooperation, C) を創発させ得ることが知られている。

プレーヤー間の対戦カードに格子を含むネットワーク構造 (空間構造) を導入する試みもそれらの一手法であると位置付けられ、Nowak & May⁴⁾による空間型囚人ジレンマ (S-PD) をはじめ、これまでに多くの先行研究^{2), 5)-14)}がある (このうち13)、14)はLonelyを

含む3戦略ゲーム) 。しかし、いずれの既往研究でも夫々が指定した限定的なゲーム構造しか検討されていないことを問題点として指摘しなければならない。例えば、Abramson & Kuperman⁵⁾はPDとChickenの境界¹⁵⁾にある特殊なゲームを対象としており、Tomochi¹²⁾とHauert & Szabo¹³⁾はともにPDを対象としているがジレンマの弱い領域だけを検討している。2x2ゲームの場合、ChickenタイプとStag Hunt (SH) タイプのジレンマ性に二別されるジレンマの特質とその強さ¹⁵⁾が様々に変容するとき、ネットワーク構造はゲームの帰結に如何なる影響を付与するかは興味のある課題である。また、次数固定で繋ぎ換え確率を大きくしてRegular GraphからRandom Regular Graphへとネットワーク構造を変化させたときの均衡協調率 p_C について、Tomochi¹²⁾はランダム性ととも p_C は低下、Hauert &

表-1 利得行列
Table 1 Payoff Matrix

		相手戦略	
		協調 (C)	裏切り (D)
自戦略	協調 (C)	R	S
	裏切り (D)	T	P

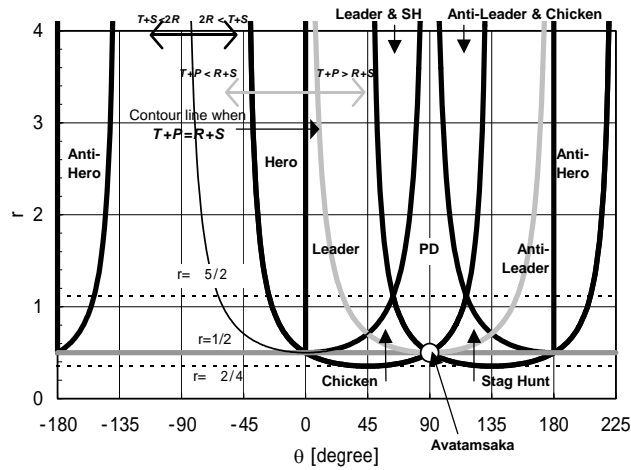


図-1 θ と r による 2×2 ゲームの表記

Fig.2 The scene of 2×2 game world.

Szabo¹³⁾はその逆の言説をなしている．後者はErdo & Renyi¹⁶⁾のネットワーク連結条件を満たしていない可能性も想起されるが、既述したようにいずれの検討でも限定的なゲーム構造だけを考えているので、ネットワーク構造がゲーム帰結に与える一般的影響を議論しているとは云えない．

本論では、 2×2 ゲームの構造を縮約した2パラメータで表記する手法¹⁵⁾を適用し、プレーヤ対戦にネットワーク構造を導入することで、ゲーム帰結に如何なる変容がもたらされるかを俯瞰的に検討するものである．

2. モデル

複数のエージェントがネットワークを構成し、接続されたエージェントの組で表-1に示す 2×2 ゲームを行う．戦略は協調 (Cooperation, C) か、裏切り (Defection, D) とする．戦略更新にはネットワーク上で隣接する (以下、単に「隣接する」とする) エージェントで最大利得をあげた戦略をコピーするメカニズムを全エージェント一斉 (symmetry) に適用する．

エージェント数は N 、ネットワークの次数は k (エージェントは夫々 k 人のエージェントと接続されている) とする．

ゲームの流れは以下の通りである．

1. エージェントは接続されている k 人のエージェントと夫々表-1のゲームを行う．

2. 1.を全てのエージェントについて行う．
3. エージェントは接続されているエージェントの中でゲームによって得た利得がもっとも大きい戦略を次のステップにおける自分の戦略とする．
4. 3.を全てのエージェントについて行う．
5. 1.~4.を1ステップとし、繰り返し行う．

2.1. 利得行列

利得行列は表-1のように自他の戦略組により P, R, S, T で与える．文献1)によれば

$$P = x_0 - 0.5 \cos(45) \quad (2-1)$$

$$R = x_0 + 0.5 \cos(45) \quad (2-2)$$

$$S = x_0 + r \cos(45 + \theta) \quad (2-3)$$

$$T = x_0 + r \sin(45 + \theta) \quad (2-4)$$

のように、全ての 2×2 ゲームはパラメータ θ [deg] と r で表すことが出来る (x_0 は解可能域がシフトするだけで P, R, S, T の相対関係上意味がないので、実質的には2パラメータとなる)．すなわち、図-1である．太線で囲われジレンマゲーム名が冠されている領域以外のエリアが、ジレンマのないTrivialゲームである．

2.2. ネットワーク構造

本研究では頂点が $N=50 \times 50$ の2次元格子を基本ネットワーク構造とした．次数は $k=4$ (正方格子, ノイマン近傍対戦), $k=6$ (三角格子), $k=8$ (ムーア近傍対戦) の3パターンを用いた．また、各node (エージェントを意味する) における次数を保存しながら繋ぎ換え確率 p に応じてランダムなnodeに繋ぎ換えを行う． $p=0, 0.5, 1.0$ とした． $p=1$ はRandom Regular Graphである．

3. 結果及び考察

シミュレーションは協調戦略を採用エージェントの割合 (協調率 p_c) が収束するまで行い、収束した場合は最後のステップをその試行の結果 (すなわち均衡解) とし、摂動解の場合は、100ステップの平均協調率が収束するまで行い、その最終100ステップの平均値をその試行の結果とした．これを10試行ずつ行い、その結果のアンサンブル平均を解析対象とした．

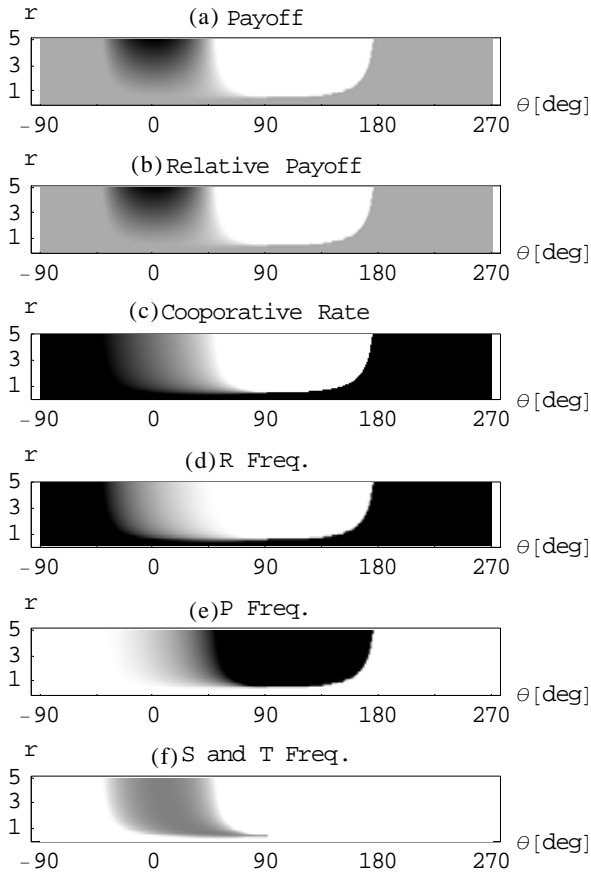


図-2 Replicator Dynamicsの結果
Fig.2 The result of Replicator Dynamics.

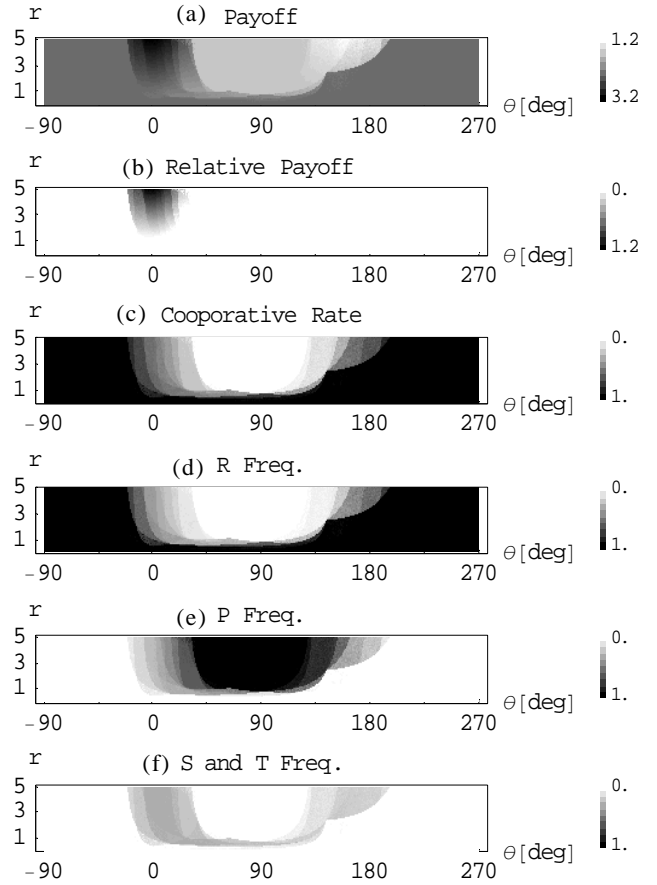


図-3 $k=4$ $p=0$ のゲーム結果
Fig.3 The result of $k=4$ $n=0$.

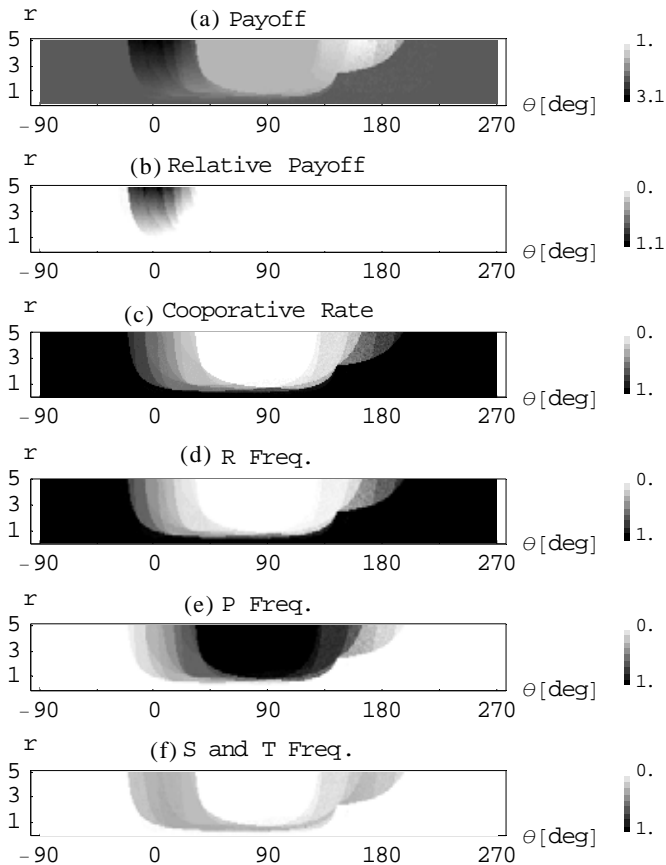


図-4 $k=4$ $p=0.5$ のゲーム結果
Fig.4 The result of $k=4$ $p=0.5$.

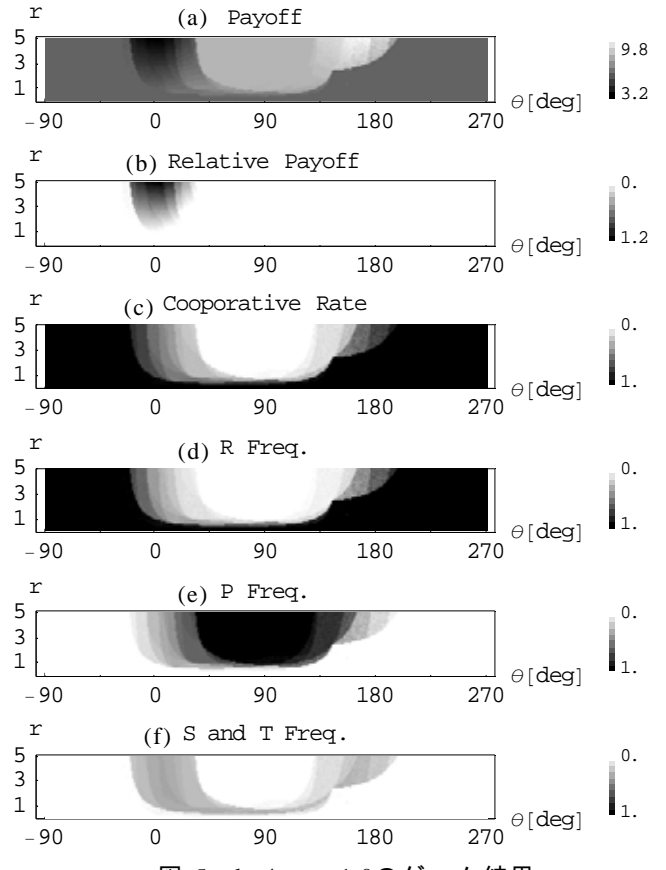


図-5 $k=4$ $p=1.0$ のゲーム結果
Fig.5 The result of $k=4$ $p=1.0$.

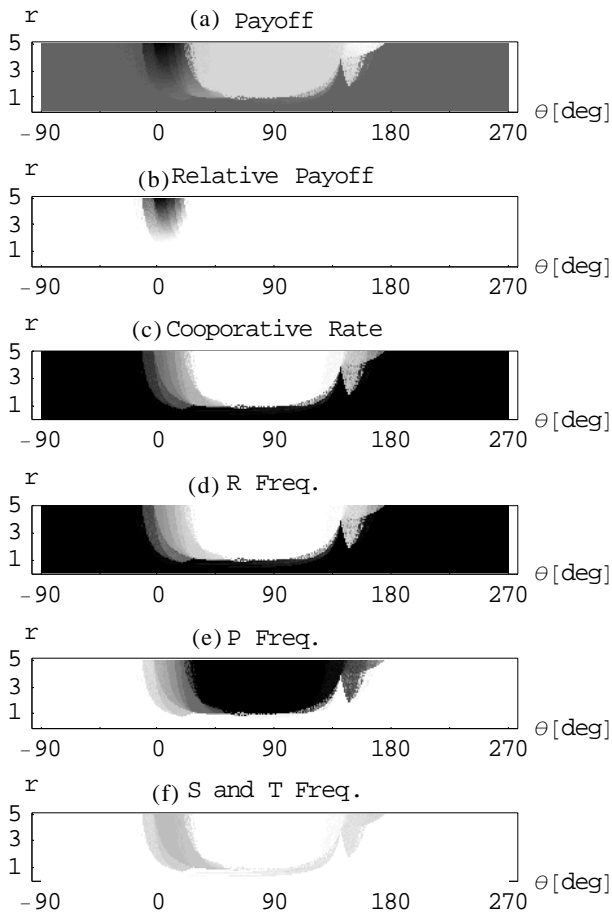


図-6 $k=6$ $p=0$ のゲーム結果
Fig.6 The result of $k=6$ $p=0$.

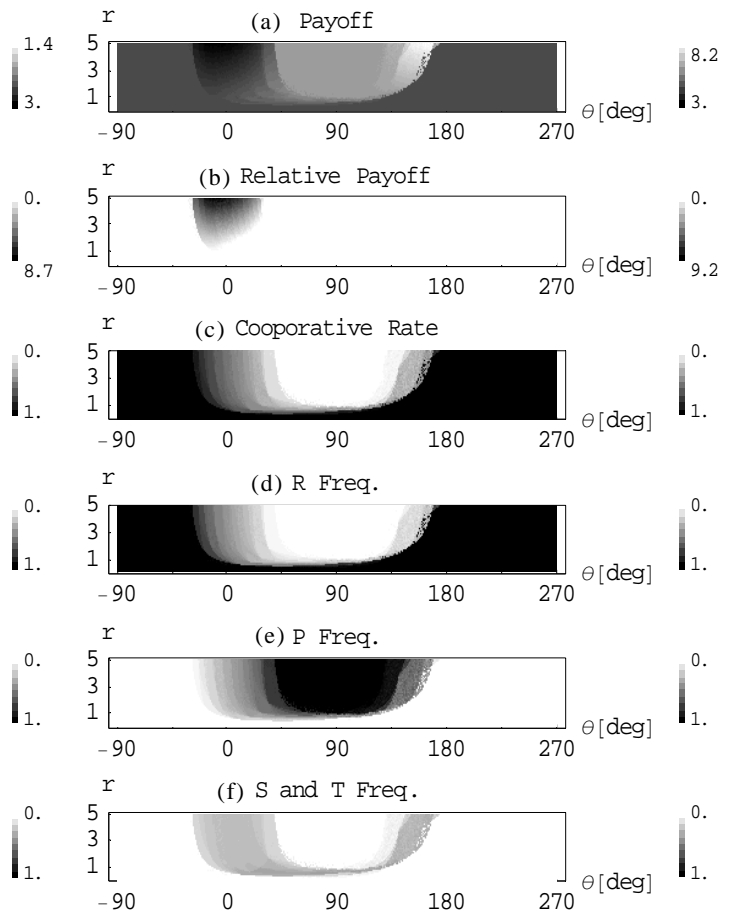


図-7 $k=6$ $p=0.5$ のゲーム結果
Fig.7 The result of $k=6$ $p=0.5$.

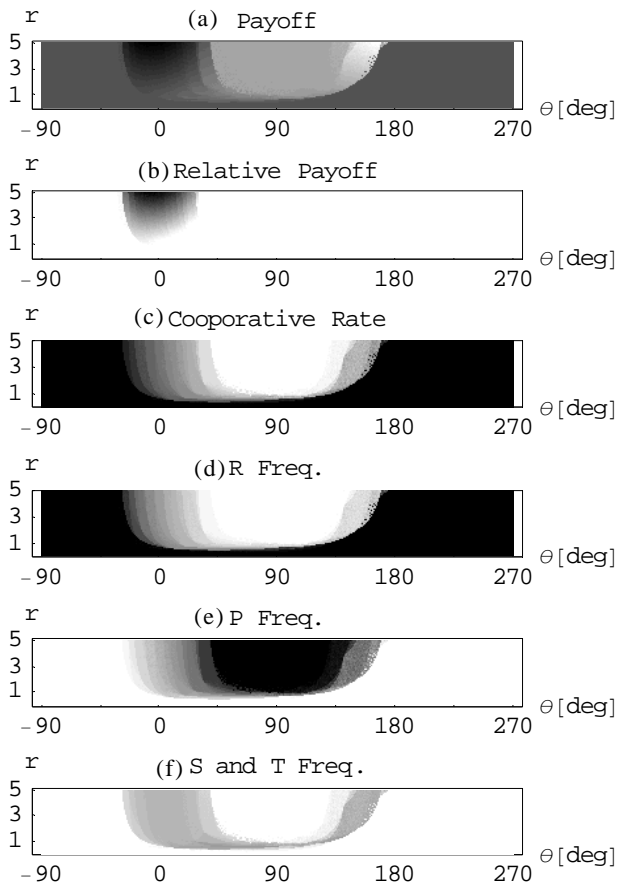


図-8 $k=6$ $p=1.0$ のゲーム結果
Fig.8 The result of $k=6$ $p=1.0$.

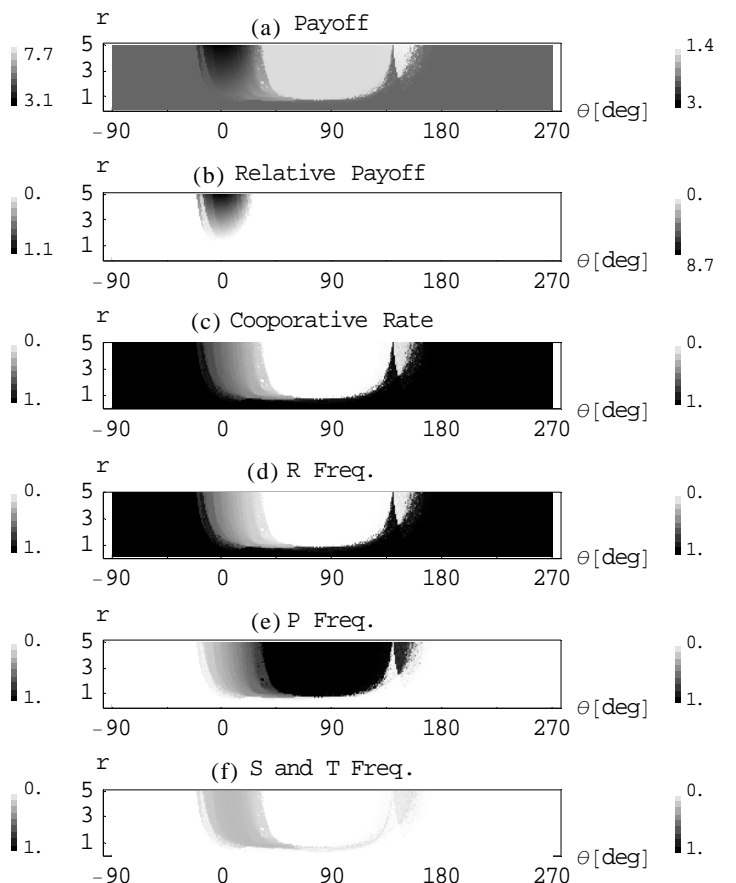


図-9 $k=8$ $p=0$ のゲーム結果
Fig.9 The result of $k=8$ $p=0$.

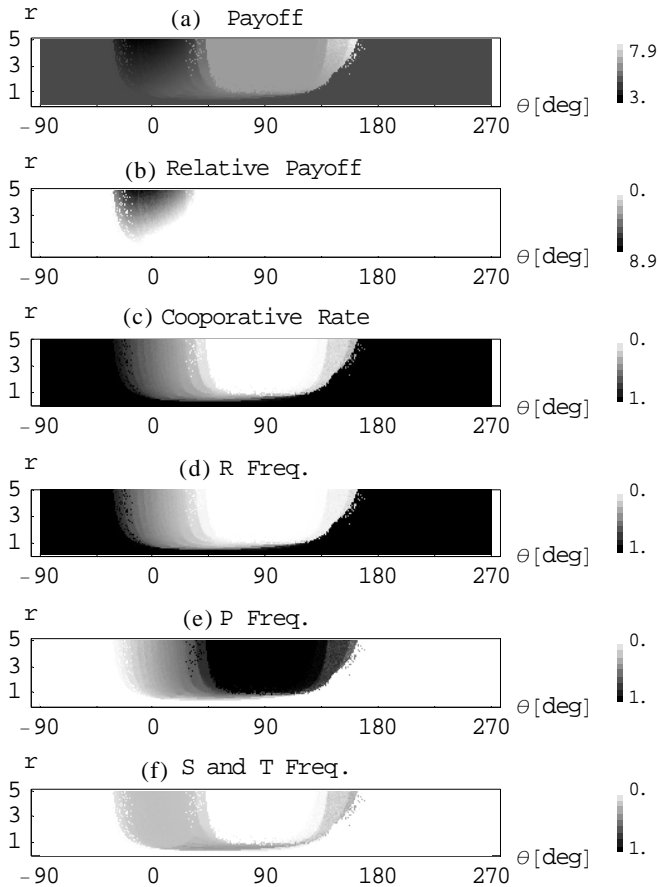


図-10 $k=8$ $p=0.5$ のゲーム結果
Fig.10 The result of $k=8$ $p=0.5$.

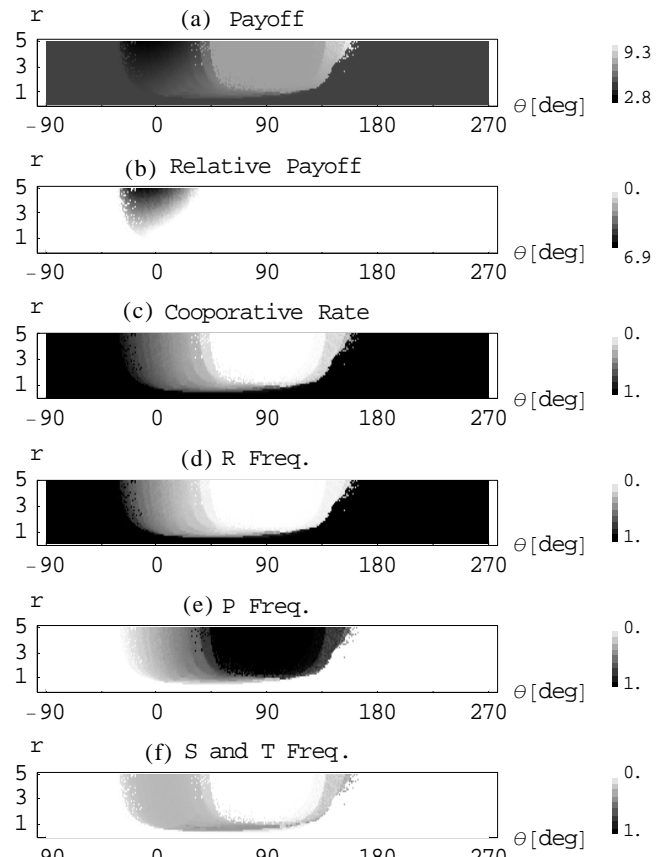


図-11 $k=8$ $p=1.0$ のゲーム結果
Fig.11 The result of $k=8$ $p=1.0$.

3.1. ネットワーク構造のゲーム帰結に及ぼす影響

ゲームの進化がReplicator Dynamicsに拠るとするならば、 2×2 ゲームの帰結は以下となる。すなわち、図-1におけるLeader & SH, Anti-Leader & Chicken, PDの領域（以後PD領域）ではD支配（D-dominate）、Chicken, Leader, Heroの領域（以後、Chicken領域）ではCとDの併存平衡を許す内部均衡（Polymorphic）、Stag Hunt (SH), Anti-Leader, Anti-Heroの領域（以

後、SH領域）では初期値に依存してC支配かD支配かに分岐（Bi-stable）する。その他の領域（以後Trivial領域）では、ジレンマのないゲームとなるため、C支配（C-dominate）となる。

図-1と同様の形式で、初期戦略分布をC, Dともに0.5とした結果を図-2に示す。図は上から、(a)ゲーム構造を変化させたときの1ゲーム当たりの平均利得、(b)相対利得の正值（ $=\text{Max}[(\text{Payoff}-R)/(R-P), 0]$ ）、(c)協調率 p_C 、(d)P、(e)R、(f)S (T) 生起頻度を表す。

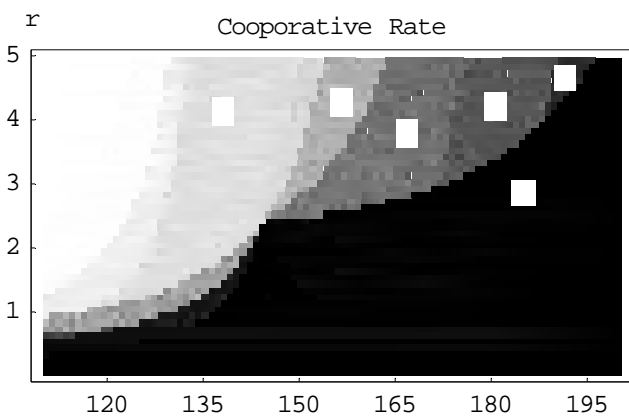


図-12 $k=4$ $p=0$ SH領域の拡大図
Fig.12 The enlargement of region $k=4$ $p=1.0$.

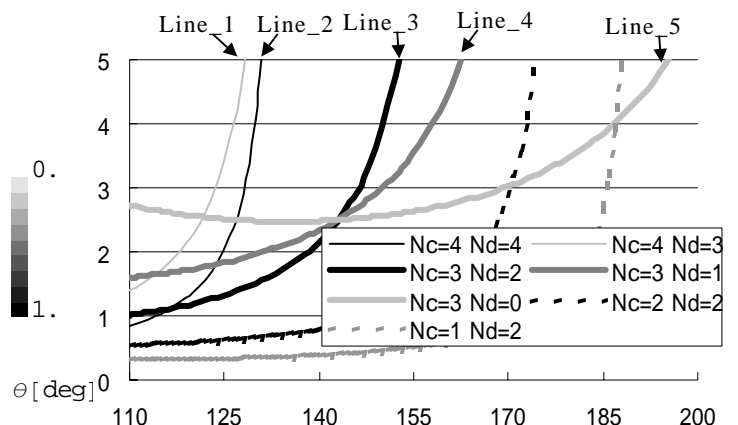
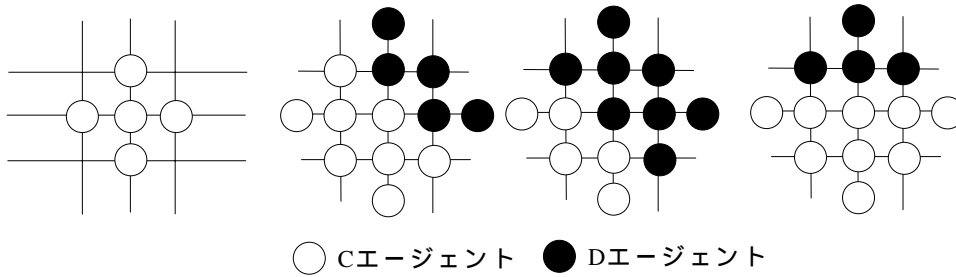


図-13 $Rwd_C(N_C) = Rwd_D(N_D)$ のグラフ
Fig.13 The Graph of $Rwd_C(N_C) = Rwd_D(N_D)$



○ Cエージェント ● Dエージェント
 図-14 空間配置パターン
 Fig.14 Position Pattern of C or D Agents

同様に、ネットワーク次数 k と繋ぎ変え確率 p を変えた各条件における結果を図-3 - 図-11に示す。

以上の結果を総観しながら、まずTomochi¹²⁾や Hauert & Szabo¹³⁾が議論しているPDの領域(例えば $\theta=90[\text{deg}]$)を見てみる。r小のTrivial領域からr大となるとジレンマが大きくなり協調率が急減する遷移域が顕れる。これを、kごとにpの違いによる差異に注目して見てみると、k=4ではpによる違いは殆ど見られず、k=6、k=8ではp大ほど小さなrで p_C が低減し始める傾向が認められる。その意味では、k=6および8ではネットワークにランダムネスが増すと協調率が低下するとのTomochi¹²⁾の言説に一致する。しかし、その差異は全ゲーム空間で見られるSHやChickenにおけるpの影響(下述)に比べると細微なものと云えよう。

図-3から図-11の(c)協調率における $\theta=150[\text{deg}]$ 付近のSH(厳密にはAnti-Leader)領域、(f)S(T)の出現頻度および(a)利得における $\theta=0[\text{deg}]$ 付近のChicken(厳密にはHeroもしくはLeader)領域に注目する。k=6およびk=8では、 $p=0$ でSH領域に見られるV字状の領域がpが大きくなると消失している。また、Chicken領域についてみると、S(T)を出し合うことによる高利得領域(Coordinated Alternating Reciprocityによる¹⁷⁾)が $p=0$ では狭いが、ネットワークにランダムネスがあると($p=0.5$ あるいは $p=1$)広範囲に広がる傾向が認められる。全ゲーム空間から俯瞰したネットワーク構造がゲーム帰結に及ぼす影響としては、これらの2つの現象の方が前記したPD域の差異よりも明然である。

3.2. k=4, p=0のSH領域について

k=4, p=0の協調率をSH領域について拡大すると、図-12に示すように段階的な変化が観察される。この理由について考察する。

既述したように、戦略がコピーされる際、focalエージェントは隣接する最大利得エージェントの戦略をコピーする。自己を含むfocalが隣接するCのうち、最大利得をあげたエージェントの利得 Rwd_C は、隣接

エージェントのCの数を N_C ($N_C \leq k$)とすると以下となる。

$$Rwd_C(N_C) = N_C R + (k - N_C) S \quad (4-1)$$

同様にDエージェントに隣接するCの数を N_D ($N_D \leq k$)とすると以下となる。

$$Rwd_D(N_D) = N_D T + (k - N_D) P \quad (4-2)$$

この戦略更新メカニズムで、focalエージェントが次のステップにおいてCを維持出来るかどうかは、 Rwd_D と Rwd_C の大小で決まる。

これらの大小関係がゲーム構造の変容とともに変化する境界線を図-13に示す(図では N_C, N_D の組み合わせごとに $Rwd_D = Rwd_C$ の境界線が描かれている)。いくつかの N_C, N_D のグラフが図-12の境界線と一致する。このことから、図-12の段階的な変化はこの大小関係の変容によってもたらされているエージェント空間配置上の相変化に起因するものと推測出来る。以下で詳しく考察してみる。

まず、PD領域では、 $R < T$ かつ $S < P$ が成り立つため、どのような空間配置パターンであっても、いかなる N_C, N_D の組み合わせにおいて必ず Rwd_D が大きくなり、D支配となる。同様にTrivial領域では必ずC支配となる。

次にSH領域(SH, Anti-Leader, Anti-Hero)では、Rが最も高利得である為、CエージェントはRの利得を獲得するようにクラスタを構成する。同様にDエージェントも $P > T$ なので、Pを獲得するようにクラスタを構成することが有利となる。従って、CとDのクラスタの境界線上でどのような空間配置パターンが勝ち残れるかがゲームの帰結、ひいては均衡点での協調率に大きく拘わってくる。

図-12, 図-13中の領域 では、 $4R > 4T$ (line_1に開

する $R_{wdC} > R_{wdD}$ の条件から導出) , $4R > 3T + P$

(line_2) が成り立つ . この条件下では図-14の のパターンのみ生き残ることが出来る .

領域 になると , $3R + S > 2T + 2P$ (line_3) が成り立ち , のようなパターンが残ることが出来るため , C エージェントはクラスタを形成することが出来るようになる .

領域 では , さらに $3R + S > 3P + T$ (line_4) が成り立つようになるため , のようなパターンも生存できる .

また , 領域 の領域になると , $P < S < R$ (line_5) が成り立ち , D エージェントは生き残れなくなるため , 協調率は1となる .

このように領域 と Trivial 領域に近づくと , 生存できるパターンが増える為 , 段階的に協調率が増えていくと考えられる .

3.3. $k=4, p=0$ の Chicken 領域について

Chicken 領域 (Chicken , Leader , Hero) でも SH 同様に段階的に協調率が変化している (図-12 様には図示していない) . これも SH 領域と同様の理由で説明できる .

Chicken 領域では , 一般に P が最低利得であり , そのうち一部の領域で $S > R$ (Leader や Hero の一部) が成り立つ . このため C および D のクラスタを形成することは利得上不利となる . また , この特性が Chicken の摂動解を生じさせる . つまり , 仮にクラスタ状の纏りが形成されても , ゲームの結果は周囲のエージェントの方が高利得となるから , そこからの戦略コピーが即座に行われ , C , D 互いに定常的クラスタを形成することが出来ない . クラスタ状の纏りが形成されても瞬時に解消されることが摂動を生んでいる .

4. まとめ

ネットワーク構造が 2×2 ゲームの帰結に如何なる影響を付与するかを , ゲーム構造 , ネットワークのリンク次数 (k) , 繋ぎ変え確率 (p) をパラメータに検討した .

$k=4, p=0$ の格子状ネットワーク構造における SH 領域 , Chicken 領域で協調率が段階的に変化する様相は , ゲーム構造と平面配置パターンにより説明され , Chicken の摂動解もそのことにより説明できることを示した .

参考文献

- 1) 例えば , Axelrod, R., The Evolution of Cooperation, Basic Books, (1984).
- 2) 例えば , Michor, F., Nowak, M.A., The good, the bad and the lonely, Nature 419, 677-678, (2002).
- 3) 例えば , Epstein, J.M., Zones of cooperation in demographic Prisoner's Dilemma, Complexity 4 (2), 36-48, (1998).
- 4) Nowak, M.A., May, R., Evolutionary games and spatial chaos, Nature 359, 826-829, (1992).
- 5) Abramson, G., Kuperman, M., Social games in social network, Physical Review E 63, #030901, (2001).
- 6) Masuda, N., Aihara, K., Spatial prisoner's dilemma optimally played in small-world network, Physical Letter A 313, 55-61, (2003).
- 7) Hauert, C., Doebeli, M., Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game, Nature 428, 643-646, (2004).
- 8) Ifti, M., Killiingback, T., Doebeli, M., Effects of neighbourhood size and connectivity on the spatial Continuous Prisoner's Dilemma, Journal of Theoretical Biology 231, 97-106, (2004).
- 9) Duran, O., Mulet, R., Evolutionary prisoner's dilemma in random graphs, Physica D 208, 257-265, (2005).
- 10) Sysi-Sho, M., Saramaki, J., Kertrsz, J., Kaski, K., Spatial snowdrift game with myopic agents, European Physical Journal B 44, 129-135, (2005).
- 11) Doebeli, M., Hauert, C., Models of cooperation based on the Prisoner's Dilemma and the Snowdrift game, Ecology Letters 8, 748-766, (2005).
- 12) Tomochi, M., Defectors niches: prisoner's dilemma game on disordered network, Social Network 26, 309-321, (2004).
- 13) Hauert, C., Szabo, G., Game theory and physics, Am. J. Phys. 73, 405-414, (2005).
- 14) Wu, Z., Xu, X., Chen, Y., Wang, Y., Spatial prisoner's dilemma game with volunteering in Newman-Watts small-world network, Physical Review E 71, #037103, (2005).
- 15) 谷本潤, 相良博喜, 環境問題への適用のためのジレンマゲームの基本構造に関する考察, 日本建築学会環境系論文集 No.595, 135-140, (2005).
- 16) Erdos, P., Renyi, A., On random Graphs I, Publicationes Mathematicae (Debrecen) 6, 290-297, (1959).
- 17) Browning, L., Colman, A., Evolution of coordinated alternating reciprocity in repeated dynamic games, Journal of Theoretical Biology 228, 549-557, (2004).