

非均一ネットワーク結合力学系における同期状態の時間発展

村田賢太, 吉井伸一郎, 古川正志

北海道大学 大学院情報科学研究科

あらまし 本論文では、非均一ネットワーク上の結合力学系に関する、同期状態の時間発展を調べ検討した。結合力学系としては正弦波結合する位相振動子を対象とし、系全体の位相コヒーレンスを時間に沿って観測した。その結果、ネットワークの非均一性の減少に従い位相コヒーレンスが減少することが分かり、これはマスター安定性関数による解析の逆となった。更に、位相コヒーレンスのパワースペクトルを観測したところ、スペクトルのベキ指数が非均一性の減少に従って増加することが明らかとなった。

キーワード 結合力学系, マスター安定性関数, 蔵本モデル, 複雑ネットワーク

Time evolution of synchronization in coupled dynamical systems with heterogeneous networks

Kenta Murata, Shinichiro Yoshii and Masashi Furukawa

Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

Abstract In this paper, we study time evolution of synchronization in coupled dynamical systems with heterogeneous networks. We model phase oscillators with sinusoidal couplings as the coupled dynamical systems, and observe their phase coherence along with time. As a result, it is found that the phase coherence reduces as the network heterogeneity reduces. This is paradoxical to the result given by the master stability function. Moreover, we examine the power spectra of the phase coherences, then it becomes clear that power exponents of the spectra increase as the heterogeneity decrease.

Keywords Coupled dynamical systems, Master stability function, Kuramoto model, Complex networks

1 はじめに

これまで、多くの研究者が自然現象から人工システムまでを対象に、複雑ネットワークの観点から研究を行っており、実世界に存在する多数のネットワークがスモールワールド性 [14] とスケールフリー性 [2] を持つことが明かとなった [1, 8, 13]。スモールワールド性はネットワークの大きさ N に対して、その直径が $D(N) \sim \log N$ となるような性質であり、どんなに多くの頂点が存在しても、ある頂点から他の頂点まで僅かな距離しか離れていない事を表わす。スケールフリー性は、ネットワークの

各頂点がベキ法則 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ に従う次数 k を持つ性質であり、各頂点の結合が非均一に分散している事を表わす。

複雑ネットワークの研究における中心的な課題は、ネットワーク構造とシステムの機能との関係にある [13]。近年、このようなネットワーク構造の上で、多数の同等な力学系を結合させた結合力学系の同期問題が注目されている [6, 15]。この分野では、ネットワーク構造が系の同期の線形安定性にどのように影響するかが焦点となっており、線形結合に対してマスター安定性関数 (MSF) [4, 12] を用い、ネットワークの様々な構造特徴量と系の同期の線形安

定性の関係が調査されている [3, 5, 6, 11, 15] . MSF を用いると, 線形結合系に対し, 個々の力学系の詳細に依存せず, ネットワーク構造だけから同期の安定性を調査できる. しかしながら, MSF はネットワークが同期できるかどうかを示すだけで, 同期するかどうかを示すものではない [3]. 従って, 実際に系が同期するかどうかは数値計算シミュレーションを行わなければ判定できない. また, 時間と共に系の同期がどのように発展するかを予測できない.

本論文では, 複雑なネットワーク上の結合力学系について, 同期状態の時間発展を調査する. 個々の力学系として位相振動子を仮定し, それらがスケールフリー性を持つネットワーク構造で正弦波結合する系を対象に数値計算実験によって同期の発展を観測する. 同期状態の指標として, 系全体の位相コヒーレンスを用いる. この系は非線形結合であるため, MSF をそのまま適用できない. 観測の結果, ネットワークの非均一性が増加するに従い, 系の位相コヒーレンスが増加することが示される. これは MSF による解析結果 [11] の逆の結果である.

さらに, 位相コヒーレンスの時系列のパワースペクトルを観測し, そのベキ指数を推定する. その結果, ネットワークの非均一性が減少するに従い, そのベキ指数は増加することが分かった.

2 非均一ネットワーク結合力学系

複雑に結合した多数の同等な力学系について, 同期状態の時間発展の詳細を以下に示す. 個々の力学系は位相振動子とし, それらの結合は後述のモデルで生成されるネットワークで与えられる. 結合した二つの振動子は正弦波で相互作用する. 各振動子 u の位相を $x_u(t)$ とする

と, 支配方程式は次式で与えられる:

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \frac{\sigma}{k_u} \sum_{v=1}^N g_{uv} \sin(x_v - x_u) \quad (1)$$

ここで, ω_u , k_u はそれぞれ振動子 u の自然振動数と次数, $\sigma > 0$ は結合強度, N は振動子数である. 行列 $G = [g_{uv}]$ は振動子ネットワークの隣接行列で, ふたつの振動子 u, v が結合しているとき $g_{uv} = 1$ であり, そうでないときは $g_{uv} = 0$ である. 本論文で扱うネットワークは, 自己閉路と多重結合を持たないものに限定する. そのため, $k_u = \sum_{v=1}^N g_{uv}$ が成立する.

2.1 ネットワーク構造のモデル

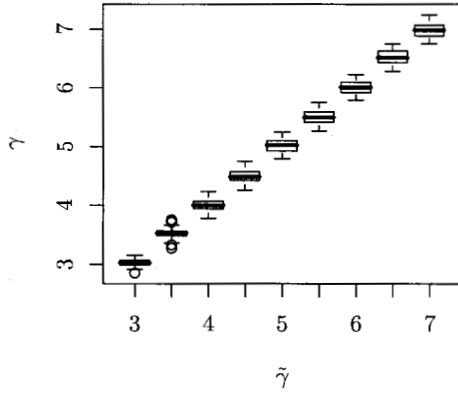
振動子間を結合するネットワーク構造は, 次の手順で示される半ランダム・モデル [7, 10] で生成する.

- (1) まず N 個の振動子列 $(1, 2, \dots, N)$ に対して次数列と呼ばれる整数列 $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_N)$ を割り当てる. ここで, $\forall \tilde{k}_u \leq N-1$ かつ $\sum_{u=1}^N \tilde{k}_u$ は偶数とする.
- (2) つぎに, 振動子列からランダムに振動子の組 (u, v) , ただし $\tilde{k}_u, \tilde{k}_v \geq 1$, を選択し, それらを結合して辺を形成する. そして, $\tilde{k}_u \leftarrow \tilde{k}_u - 1$, $\tilde{k}_v \leftarrow \tilde{k}_v - 1$ とする. この操作を次数列の全要素が 0 となるまで繰り返す.
- (3) さいごに, 完成したネットワークから自己閉路および多重辺を取り除く.

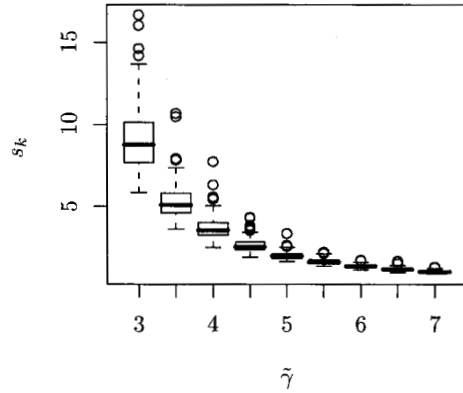
本論文で扱うネットワークは, スケールフリー構造 [2] を持つものとする. すなわち, 次数 k が Zipf 分布 (2) に従う確率を持って分布する.

$$P(k; \gamma) = \frac{k^{-\gamma}}{\sum_{j=k}^{\bar{k}-1} j^{-\gamma}} \quad (2)$$

ここで, γ は分布のベキ指数, \underline{k} , \bar{k} はそれぞれ次数の最小値と最大値であり, $\underline{k} \geq 1$ かつ



(a) 次数分布のベキ指数



(b) 次数分布の標準偏差

図1 半ランダム・モデルにより生成した頂点数 $N = 1024$ のスケールフリー・ネットワークの特性. 横軸 $\tilde{\gamma}$ は半ランダム・モデルに与える次数列が従う Zipf 確率分布のベキ指数である. (a) γ は生成されたネットワークが実際に持つ次数分布のベキ指数分布で, Newman [9] に従って最尤推定した値である. (b) s_k は生成されたネットワークの次数偏差分布である. 各箱中の太実線は分布の中央値, 箱の上辺は第1四分位点, 下辺は第3四分位点, ひげの上端と下端は外れ値を除いた最大値と最小値, プロットは外れ値である. 各 $\tilde{\gamma}$ に対して 100 個のネットワークを独立に生成した.

$\bar{k} \leq N$ である. 次数列の生成には次の方法を用いた. すなわち, 集合 $\{\kappa_j | \kappa_j = k + j - 1, 1 \leq j \leq \bar{k} - k\}$ から N 個の要素を確率 $P(\kappa_j; \tilde{\gamma})$ に従って復元抽出することで次数列を生成した. ここで $\tilde{\gamma}$ は, 生成されたネットワークが持つべき次数分布のベキ指数である.

生成アルゴリズムの最終操作によって, はじめに与えた次数列と生成されたネットワークが持つ次数列が異なる可能性がある. これを回避するため, 生成されたネットワークの次数分布のベキ指数 γ を観測し, $\tilde{\gamma}$ から外れている場合はネットワークを生成しなおす.

図1 (a) に生成したネットワークのベキ指数 γ の分布を示す. 次数列のベキ指数 $\tilde{\gamma}$ とほぼ等しいベキ指数 γ を持つスケールフリー・ネットワークが生成されていることが分かる.

2.2 ネットワークの非均一性

ネットワークが持つ非均一性の指標として, 本論文では次数分布 $P(k)$ の標準偏差 s_k を用

いる. MSF を用いた解析によれば, ネットワークがより非均一ならば, そのネットワーク上で系はより同期できにくい [11]. 次数分布が大きく分散している, すなわちネットワークがより非均一であれば, 少数の「ハブ」となる振動子が, 多数の他の振動子と相互作用する. ひとつの振動子が, 異なる位相・振動数を持つ独立した多数の振動子と同時に相互作用するとき, それら多数の振動子が互いに相殺し合うことによって, 結果としてハブ振動子はどの振動子とも特定の相互作用をしていないと見なすことができる.

3 同期状態の時間発展

各 $\tilde{\gamma}$ 毎にネットワークを生成し, 方程式 (1) で系を発展させ, 式 (3) で定義される系全体の位相コヒーレンス $R(t)$ の時系列を観測する.

$$R(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{u=1}^N e^{ix_u(t)} \right| \quad (3)$$

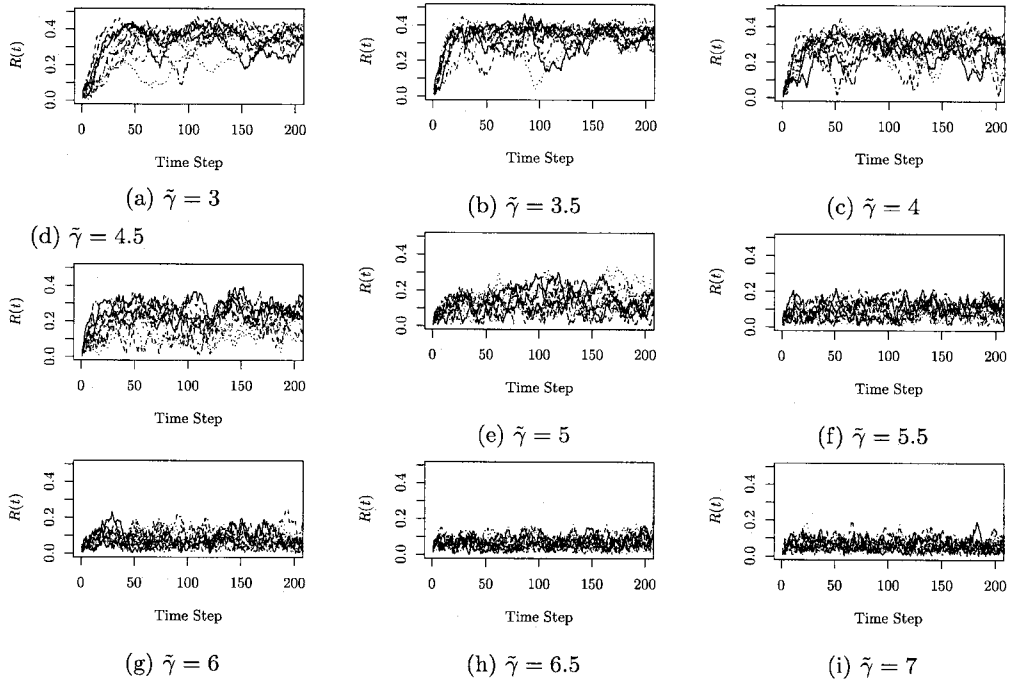


図2 位相コヒーレンス $R(t)$ の $t = 200$ までの時間発展. 各振動子 u の初期位相 $x_u(0) \in [-\pi, \pi)$ は一様乱数, 自然振動数 ω_u は, $\omega_u/1000$ が標準 Cauchy-Lorentz 分布に従う確率分布を持つ乱数である. 結合強度は $\sigma = 10.0$. 各 $\tilde{\gamma}$ 毎に 10 個の異なるネットワーク (図 1) に対して観測を行い, その結果をすべて重ねてプロットしている.

図 2 で示すように $R(t)$ は複雑な挙動を示しており, どの $\tilde{\gamma}$ でも $1/f$ ゆらぎが存在することが図 4 から分かる.

また, 図 3 (a) より $\tilde{\gamma}$ の増加に従って $R(t)$ の上限が減少する. 言い換えると, $\tilde{\gamma}$ の増加に従って系が同期しにくくなる. 図 1 (b) より $\tilde{\gamma}$ の増加は非均一性の減少と同義である. これより, ネットワークがより非均一であれば, 系はより同期し難くなる傾向があると言える.

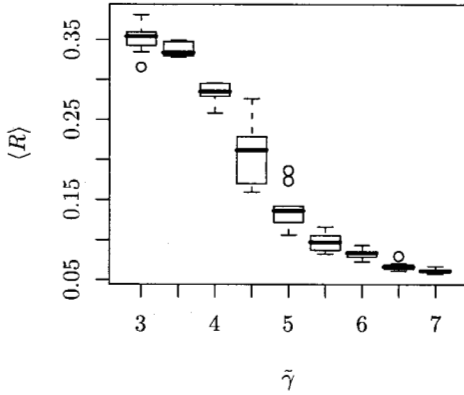
さらに, 図 3 (b) より, $\tilde{\gamma}$ の増加に従って, $R(t)$ のパワースペクトルのベキ指数 α は増加する. しかしながら, 図 4 では, $\tilde{\gamma}$ の増加に伴って, スペクトルの高周波成分の割合が増加する傾向がある. これより, $\tilde{\gamma}$ の増加によって, $R(t)$ のパワースペクトルは一様分布に近付い

ていくと予測できる.

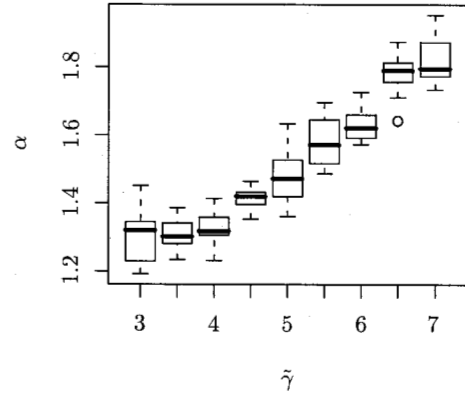
4 結論

結論として, 我々は, 非均一ネットワーク上の結合力学系について, 同期状態の時間発展を調査した. 結合力学系として, 正弦波結合する位相振動子を使用し, 系全体の位相コヒーレンスを時間に沿って観測し, 結果から次のことが分かった.

まず, ネットワークの非均一性の減少に従い, 位相コヒーレンスが減少することが分かった. この非均一性と位相コヒーレンスの関係は, MSF による解析結果とは逆の結果であり, 本論文で扱った正弦波結合する結合位相振動子系が MSF で解析できない系であることを示し



(a) 位相コヒーレンスの時間平均



(b) パワースペクトルのベキ指数

図3 位相コヒーレンスの時間平均 $\langle R \rangle$ と、パワースペクトルのベキ指数 α の $\tilde{\gamma}$ に対する分布. プロット記号の意味は図1と同じであるため省略する. パワースペクトルのベキ指数は, 図4から図1(a)と同様の手法で最尤推定して求める.

ている.

次に, 位相コヒーレンスの時系列に $1/f$ ゆらぎが存在し, そのパワースペクトルのベキ指数が非均一性の減少に従って増加することが分かった. しかしながら, それと同時にスペクトルの分布が平坦に近づく傾向があることも分かった. これより, $\tilde{\gamma} \rightarrow \infty$ の極限で, $R(t)$ はホワイトノイズに収束することを予想できる.

参考文献

- [1] ALBERT, R. and BARABÁSI, A.-L., *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1 (2002), 47–97.
- [2] BARABÁSI, A.-L. and ALBERT, R., *Science*, **286** (1999), 509–512.
- [3] BARAHONA, M. and PECORA, L. M., *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 5 (2002), 054101.
- [4] FINK, K. S., JOHNSON, G., CARROLL, T., MAR, D. and PECORA, L., *Phys. Rev. E*, **61**, 5 (2000), 5080.
- [5] HONG, H., KIM, B. J., CHOI, M. Y. and PARK, H., *Phys. Rev. E*, **69**, 6 (2004), 067105.
- [6] LIND, P. G., GALLAS, J. A. C. and HERRMANN, H. J., *Phys. Rev. E*, **70**, 5 (2004), 056207.
- [7] MOTTER, A. E. and NISHIKAWA, T., *Phys. Rev. E*, **66**, 6 (2002), 065103.
- [8] NEWMAN, M. E. J., *SIAM Review*, **45**, 2 (2003), 167–256.
- [9] NEWMAN, M. E. J., *Contemporary Physics*, **46**, 5 (2005), 323–351.
- [10] NEWMAN, M. E. J., STROGATZ, S. H. and WATTS, D. J., *Phys. Rev. E*, **64**, 2 (2001), 026118.
- [11] NISHIKAWA, T., MOTTER, A. E., LAI, Y.-C. and HOPPENSTEADT, F. C., *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 1 (2003), 014101.
- [12] PECORA, L. M. and CARROLL, T. L., *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 10 (1998), 2109.
- [13] STROGATZ, S. H., *Nature*, **410** (2001), 268–276.
- [14] WATTS, D. J. and STROGATZ, S. H., *Nature*, **393** (1998), 440–442.
- [15] ZHAO, M., ZHOU, T., WANG, B.-H., YAN, G., YANG, H.-J. and BAI, W.-J., *Physica A*, **371** (2006), 773–780.

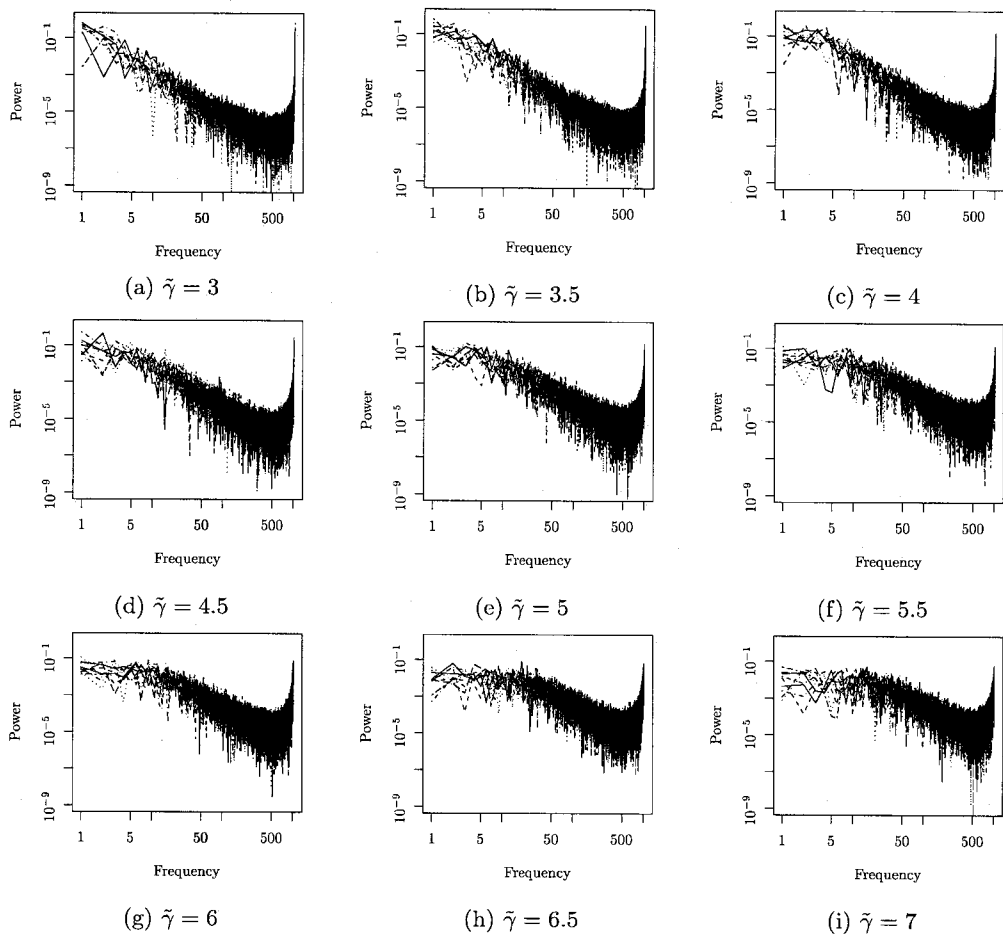


図4 位相コヒーレンス $R(t)$ のパワースペクトル. 図2と同様に, 各 $\tilde{\gamma}$ ごとに10個の異なるネットワークに対して観測した結果をすべて重ねている.