組み合わせオークションの近似勝者への勝者価格単調性の保証

福田 直樹[†a)] 伊藤 孝行[††,†††b)]

Providing Winner Price Monotonicity on Approximated Combinatorial Auctions

Naoki FUKUTA[†a)] and Takayuki ITO[††,†††b)]

Abstract. 組み合わせオークションの勝者決定問題はNP困難として知られており，様々な近似手法が提案されてきている．最適勝者の近似手法の多くでは，本来勝者となるには明らかに適切でない入札に対して，それを勝者と判定し，落札が行われてしまう場合がある．このような，明らかに適切でない勝者決定が行われないようにするために勝者決定近似アルゴリズムが保つべき性質を，我々はこれまでに提案してきた．本論文では，この勝者決定近似アルゴリズムが保つべき性質として，被支配的入札の勝者からの排除を挙げ，被支配的入札の分布，勝者決定近似アルゴリズムにおける近似性能，被支配的入札の勝者への誤った組み入れの可能性とその排除方法，および勝者への価格付けに与える影響についての実験的解析結果を述べる．

Keywords. 組み合わせオークション, 近似手法, 勝者決定問題, 解の単調性, 価格付け問題

1. まえがき

組み合わせオークション[1]は，ソフトウェアエージェントのような利己的な主体に対する効率的な資源配分に適した市場メカニズムの1つであり，これまでに，電子商取引や政策立案などに大きな影響を与えてきた．たとえば，Sandholmらは，文献[2][3]で，実世界に応用可能な組み合わせオークション実現のためのアルゴリズムとその成果を報告している．FCC(米連邦通信委員会)における周波数帯割り当てにも，組み合わせオークションメカニズムの利用が検討された[4]．また，文献[1]では，組み合わせオークションの応用に関するこれら以外の例が述べられている．

一般的には，組み合わせオークションの最適勝者決定問題はNP困難であることが知られている[1]．そのため，勝者決定問題に対するコスト低減のための手法がこれまでに多く提案されてきた[5][1][2]．そのうちのいくつか[6][7][8][9][10]では，最適勝者の近似をごく短時間で行う方法が検討されている．しかしながら，これらの最適勝者の近似手法の多くでは，本来勝者となるには明らかに適切でない入札に対して，それを勝者と判定し，落札が行われてしまう場合がある．このような，明らかに適切でない勝者決定が行われないようにするために勝者決定近似アルゴリズムが保つべき性質を，我々はこれまでに提案してきた[10]．本論文では，この勝者決定近似アルゴリズムが保つべき性質の利点，効果およびその限界について述べる．

2. 組み合わせオークションの勝者決定問題

2.1 勝者決定問題

資源配分問題では，通常様々な制約が科された状況下を想定するが，本論文では，議論を簡潔にするために，効用に基づく資源配分問題[11]のみを扱うことにする．効用に基づく資源配分問題では，それぞれの配分機会ごとに単純に参加者の効用の総和を最大化することのみを目的とし，その他の要因（たとえば，公平な資源配分，セキュリティやプライバシ上の配慮，不確実性など）は，直接的には扱われない．

組み合わせオークションとは，オークションメカニズムの中で，特に入札を単一財でなく財の組み合わせに対して行えるように拡張したものである[1]．組み合わせオークションを効用に基づく資源配分問題に適用した場合には，資源配分問題は組み合わせオークショ

† 静岡大学 情報学部，〒432-8011 静岡県浜松市中区城北
†† 名古屋工業大学大学院 産業戦略専攻・情報工学科，〒466-8555 愛知県名古屋市昭和区御器所町
††† マサチューセッツ工科大学スローン経営大学院，5 Cambridge Center, NE25-749A, Cambridge, Massachusetss, MA 02142, US.
a) E-mail: fukuta@inf.shizuoka.ac.jp
b) E-mail: ito.takayuki@nitech.ac.jp

ンにおける勝者決定問題に帰着されることになる．

文献[1] によれば，組み合わせオークションの勝者決定問題は次のように定義される: 入札者を $N = \{1, \ldots, n\}$，入札対象となる財の集合 $M = \{1, \ldots, m\}$（入札対象となる財の総数 $|M| = m$）とする．また，財のバンドル S は財の部分集合 $S \subseteqq M$ とする．このとき，ある入札者 i における財のバンドル S に対する入札価格を $v_i(S)$ と表現する．財の割り当ては，変数 $x_i(S) \in \{0, 1\}$ で表現し，$x_i(S) = 1$ のときに，バンドル S を入札者 i が落札したことを示す．ここで，財の割り当て $x_i(S)$ が妥当 (feasible) であるとは，どの 1 つの財も高々 1 つの落札者に対して落札される状態，すなわち，

$$\sum_{i \in N} \sum_{S \ni j} x_i(S) \leqq 1$$

がすべての $j \in M$ に対して成り立つことをいう．

勝者決定問題とは，

$$\max_X \sum_{i \in N, S \subseteqq M} v_i(S) x_i(S)$$

を満たすような妥当 (feasible) な財の割り当て $X \ni x_i(S)$ を見つけ出すことである．

本論文では，我々は効用に基づく資源配分問題のみに焦点を絞っているが，この資源配分問題では，細かい粒度での資源の再配分を実現する必要があるため，勝者決定問題を非常に短時間で解く必要がある [12]. 実際には，資源配分のために，勝者決定問題以外に価格付け (pricing) や具体的な資源配分のための通信プロトコルの駆動が必要になるため，勝者決定問題のために割ける時間は，資源配分の時間間隔より遙かに短い時間となってしまう．本研究では，この点を考慮し，特に多数入札時における短時間での勝者近似を中心に扱うことにする．

2.2 Lehmann の勝者決定アルゴリズム

Lehmann らが提案した欲張り (greedy) アルゴリズム [6] は，組み合わせオークションにおける勝者決定問題に対する，非常に簡潔で強力な線形アルゴリズムである．ここで，財のバンドル $s \subseteqq M$ に対する価格 $a \in \mathcal{R}_+$ を用いた入札を $b = < s, a >$ と表現することにする．2 つの入札 $b = < s, a >$ と $b' = < s', a' >$ が衝突 (conflict) するとは，$s \cap s' \neq \emptyset$ となるときをいう．Lhemann らの欲張りアルゴリズムは，次のように記述される．(1) 入札のリスト L は，ある指標に基づいて順序づけされる．文献 [6] では，この L の順序づけには，財 1 つあたりの入札価格が用いられる．より一般的には，ある数 $c \geqq 0$ に対して，$a/|s|^c$ で定義される重み値に基づいて順序づけされる．(2) 欲張りアルゴリズムに基づいて，財の割り当てが決定される．ここで，入札のリスト L は，先の式に基づいて順序づけされている．本アルゴリズムでは，この入札のリストを上位から順に見て，その入札に対する財が未割り当てのものを順に勝者として財に割り当てていく．

なお，文献 [6] では，Lehmann らは，$c = 1/2$ が，最悪時の割り当ての下限を保証することを考えた場合の，最適な値であるとしている．また，Lehmann らは，彼らが文献 [6] で提案した価格付け手法を用いた場合に，単一バンドル選好を仮定すれば，そのオークションが真実申告最良になることを示している．

2.3 逐次更新に基づくアプローチ

文献 [9], [10], および [13] で，我々は山登り法に基づく解の改善のアプローチについて，その基礎的なアイデアを示し，入札が多数であるときにはその性能が十分高いことを示した．本節では，本アプローチの概要をまとめる．

Lehmann らの欲張りアルゴリズムでは，一般的にその割り当ては良好であり，理論的な下界についても解析されている [6]. その拡張としては，Lehmann アルゴリズムによって得られた解を局所探索によって逐次改善していく方法が考えられる．直感的には，局所探索における 1 つの状態が，1 つの暫定勝者集合に相当する形になる．以下にそのアルゴリズムを示す．

ここで，入力は $Alloc$ と L であり，L はそのオークションにおける全入札のリスト，$Alloc$ は，Lehmann の欲張りアルゴリズムによって得られた初期解を示す．

function LocalSearch($Alloc$, L)
  $RemainBids := L \cap \overline{Alloc}$;
  for each $b \in RemainBids$ as sorted order
    if b conflicts $Alloc$ **then**
      $Conflicted := Alloc \cap \overline{consistentBids(\{b\}, Alloc)}$;
      $NewAlloc := (Alloc \cap \overline{Conflicted}) \cup \{b\}$;
      $ConsBids :=$
        consistentBids($NewAlloc$, $RemainBids$);
      $NewAlloc := NewAlloc \cup ConsBids$;
    if $price(Alloc) < price(NewAlloc)$ **then**
      return LocalSearch($NewAlloc$,L);
  end for each
  return $Alloc$

ここで，関数 *consistentBids* は，*NewAlloc* に対して整合性のある (入札対象の財が競合しない) 入札集合を，*RemainBids* を上から順にたどって探すことで見つけ出す機能を提供する．この関数が必要となる理由は，勝者集合に対して新たな勝者入札候補を組み入れる際に，その勝者入札候補と競合する他の勝者入札を一時的に勝者集合から取り除くようになっており，その影響で，一時的に他に割り当て可能でも落札されない状態の財ができるからである．そこで，関数 *consistentBids* では，新たな勝者入札候補と競合しない範囲で，既存の入札の中から追加勝者となりうる入札を探し，勝者に組み入れる．

これまでに我々が提案したアルゴリズムでは，上述のアルゴリズムを次の２つの方法で拡張している．その１つは，複数の入札重み関数パラメータに対する並列探索である．Lehmann の欲張りアルゴリズムで得られる結果の最適性は，入札の並び替えに用いられる重み付け関数のパラメータ c によって大きく異なることがある．そこで，1/2 を中心とした複数の c 値，たとえば，$C = \{0.0, 0.1, \ldots, 1.0\}$ に対して，並列で探索を行うようにする．並列で探索した結果のうち，最も最適性の高い解を最終的な解として採用する．我々は，文献 [14] にて，本アプローチが，たとえ $|C|$ が小さい場合，たとえば，$|C| = 3$ であっても十分な効果を発揮することを示した．

さらに，もう１つの手法として，文献 [15] および [12] で，我々は類似したオークションが連続して行われる場合に着目し，類似したオークションにおける解を部分的に再利用することで計算速度を向上させる方法を提案している．本改良アルゴリズムでは，過去の類似したオークションにおける近似勝者の一部をオークションの初期勝者集合として再利用し，そこから上述の逐次改善手法を適用することにより，特に大量入札時における短時間近似性能に優れた勝者近似を行えることを示した．たとえば，財の数が 256，入札数が 1,000,000 程度であっても，およそ 100 ミリ秒の近似時間で十分な最適性を持った解が得られたことを，これまでに報告している．

2.4 勝者近似に関する他のアプローチ

他のいくつかのアプローチでは，局所最適解到達による解の最適性の低下に対処するために，ランダム性を持つ探索メカニズムを勝者決定の近似に用いている．

Zurel らは，文献 [7] で，組み合わせオークションに対する非常に高性能な勝者決定の近似アルゴリズムを提案している．Zurel らのアルゴリズムでは，近似的な線形計画法のアルゴリズムを用いて初期解を求め，その結果をランダムな選択に基づく逐次更新アルゴリズムで洗練する方法を取っている．

Hoos は，文献 [8] で Casanova アルゴリズムを提案し，random walk メカニズムを持つ一般的な SAT solver を用いて組み合わせオークションの勝者近似が行えることを示した．Hoos らの Casanova アルゴリズムでは，各状態遷移の際に，単位財あたりの入札額を基準にするようになっている．

文献 [9] で，我々も同様のアプローチとして，焼きなまし法 (Simulated Annealing 法) に基づく拡張とその性能について述べている．

また，CPLEX 等の汎用の線形計画法ソルバープログラムを組み合わせオークションの勝者決定に用いることが可能であることも，よく知られている．CPLEX を用いれば最適勝者集合 (解) を求めることもできるが，その計算過程で得られる近似解についても，時間あたりの性能が十分に高いことが文献 [2] で述べられている．

2.5 勝者近似と価格付け

組み合わせオークションのメカニズムでは，決定された勝者に対して適切な価格付け (pricing) がなされることが重要である．VCG(Vickrey-Clarke-Groves) メカニズムでは，勝者となった入札に対して，次のように価格が決定される [1]．勝者となった入札者 n に対する支払い価格 p_n は，

$$p_n = \alpha_n - \sum_{i \neq n, S \subseteqq M} v_i(S) x_i(S)$$

によって計算される．ここで，右辺の右側の項は，勝者となった入札者 n を除いた他の勝者の入札価格の合計である．また，右辺の α_n は，妥当な財の割り当て $X \ni x_i(S)$ に対して，

$$\alpha_n = max \sum_{i \neq n, S \subseteqq M} v_i(S) x_i(S)$$

と定義される．すなわち，これは勝者となった入札者 n が参加しなかったものとして改めて勝者決定を行った場合の勝者の入札価格の総和である．

Lehmann らは，VCG メカニズムでの価格付けを彼らの近似勝者決定方法に用いた場合，単一バンドル選好の入札者を仮定しても真実申告最良とはならないことを示している [6]．ここで起きる主な問題は，

勝者が支払うべき価格が，勝者が入札した価格よりも高くなってしまうという現象から生じる．勝者決定方法が近似である場合，勝者となった入札者を除いて改めて勝者決定を行った場合の勝者の総入札価格が，むしろ高くなってしまう場合がある．つまり，$\alpha_n > \sum_{i \in N} v_i(S)x_i(S)$ となる場合である．その場合，VCG による価格付けは，その勝者の入札価格よりも高いものになってしまうため，勝者は落札したことによって効用が負となってしまい（つまり個人合理性を明らかに満たさず），勝者に対して真実の評価値より低い価格を申告することで落札されないようにしたいと思う誘因を与えてしまう．

Lehmann らの手法では，greedy な割り当てに特化した勝者価格決定方法を導入することで，この問題を回避している [6]．しかしながら，Lehmann らの勝者決定方法は，逐次更新に基づくアプローチなどの，他の勝者近似手法にはそのままでは適用できない．

文献 [16] では，VCG の価格付けを用いた場合，必ず最適勝者を求める必要があると指摘している．そこで，本論文では，Lehmann アルゴリズムより優れた割り当ての最適性を実現しながら，その価格付けの結果が，入札価格より大きくなったり，あるいは負の価格となったりする可能性 (以下，価格付け破綻の可能性と呼ぶ) をできるかぎり低くすることを目的とした，勝者決定と価格付けの方法を検討することにする．

3. 勝者価格単調性

3.1 定　義

被支配的入札とは，入札の中で特に勝者にならないことが容易に判別できる入札のことを意味する [17]．ここで，２つのバンドル B および B' について，$B \subseteqq B'$ である場合を考える．この２つのバンドルに対する入札 $b_i(B)$ および $b_j(B')$ の価格がそれぞれ $v_i(B)$ および $v_j(B')$ であり，その関係が $v_i(B) > v_j(B')$ であるとき，明らかに $b_j(B')$ は勝者とならないことがわかる．組み合わせオークションの勝者決定にランダム性を持つアルゴリズムを用いた場合，必ずではないもののそれなりの確率で，上述の $b_j(B')$ に相当する入札が勝者として判定されてしまうことがある．

文献 [10] で，我々は，このような本来適切でない勝者が選ばれないようにするための，近似解が持つべき２つの性質，勝者価格単調性 (WPM)，弱勝者価格単調性 (Weak-WPM) について述べた．その定義を以下に示す．

［定義 1］ **勝者価格単調性 (Winner-Price- Monotonicity: WPM)** 任意の２つのバンドル B および B' について，勝者価格単調性を持つオークションでは，$B \subseteqq B'$ かつ $v_i(B) > v_j(B')$, が成り立つような入札者 i が存在するとき，入札者 j は バンドル B' を落札することはない．

［定義 2］ **弱勝者価格単調性 (Weak-Winner-Price-Monotonicity: Weak-WPM)** 任意のバンドル B について，弱勝者価格単調性を持つオークションでは，$v_i(B) > v_j(B)$ が成り立つような入札者 i が存在するとき，入札者 j は バンドル B を落札することはない．

また，これらに対応する被支配的入札を次のように定義する．

［定義 3］ **単純被支配的入札 (Simply Dominated Bid: SDB)** $v_j(B')$ に対して $B = B'$ かつ $v_i(B) > v_j(B')$ なる $v_i(B)$ があるとき，$v_j(B')$ を単純被支配的入札 (*simply dominated bid*, SDB) と呼ぶ

［定義 4］ **広被支配的入札 (Widely Dominated Bid: WDB)** $v_j(B')$ に対して $B \subseteqq B'$ かつ $v_i(B) > v_j(B')$ なる $v_i(B)$ があるとき，$v_j(B')$ を単純被支配的入札 (*simply dominated bid*, SDB) と呼ぶ

上述の定義では，すなわち 勝者価格単調性を満たすとはその近似勝者に広被支配的入札を持たないことを意味し，また弱勝者価格単調性を満たすとはその近似勝者に単純被支配的入札を持たないことを意味する．

3.2 価格付けと勝者価格単調性

勝者価格単調性は，勝者入札と敗者入札の間の入札価格の関係性を示すものであり，勝者に対してつけられる価格に対して何らかの性質を持つことを規定するものではない．しかしながら，近似勝者が勝者価格単調性を満たしていない場合には，その価格付けに VCG を用いた場合に，ほぼ確実に価格付けに破綻が生じる．たとえば，ある勝者 n の入札が被支配的入札であった場合，その入札を除いて得られた勝者決定の総入札価格は除かなかった場合よりも確実に大きくなる．なぜなら，他の勝者集合を一切変えることなく，単にその勝者 n の入札を支配する入札を新たに勝者に加えれば，総入札価格は勝者 n を除く以前のものより必ず大きくなるからである．すなわち，何らかの方法で勝者価格単調性を必ず満たすようにすれば，確実に価格付けが破綻する状況を，ある一定の確率で避けることができるのではないかと考えられる．

一方で，勝者価格単調性が保証される場合でも，勝

者決定方法の性能が低い (財の割り当ての効率性が低い) 場合には，価格付けの破綻は避けられないと考えられる．そこで，どの程度の財の割り当ての効率性があれば，価格付けの破綻が高い確率で避けられるのかを，実験的な観点から検討したい．次節では，上記2点について，ある限られた条件下での実験による限定的な解析を試みる．

4. 実験による解析

4.1 実験条件

我々は，以下の実験において，我々がこれまでに提案してきたアルゴリズムについてはC言語で実装したものを用いている．また，Casanovaアルゴリズムについても同様にC言語にて実装したものを用いた．Zurelらが提案したアルゴリズムについては，文献[7]で示されているC++言語に基づく実装を用いている．CPLEXについては，CPLEX Interactive Optimizer 11.0.0 (32bit) を用いた．本論文の実験では，上述の実装を用い，それをMac OS X 10.4をオペレーティングシステムとして搭載し，CoreDuo 2.0GHzのCPUと2GBytesのメモリーを搭載した計算機上で行った．

本実験における解析では，各アルゴリズムによる計測結果を次のように表記する: greedy(c=0.5)は，Lehmannらの欲張りアルゴリズムをパラメータ $c = 0.5$ で実行した結果である．greedy-3は，Lehmannらの欲張りアルゴリズムを3つのパラメータ $C = \{0,\ 0.5,\ 1\}$ で計算したもののうち，最良のものを選択した結果である．HC(c=0.5)は，Lehmannらの欲張りアルゴリズムをパラメータ $c = 0.5$ で実行して得られた解を初期解として，我々が2.3節で述べた逐次改善アルゴリズムによって得られた結果である．HC-3は，Lehmannらの欲張りアルゴリズムを初期解としてた逐次改善アルゴリズムを，$C = \{0,\ 0.5,\ 1\}$ に対して行い，その最良のものを選択した結果である．SAは，我々が文献[9]で提案した焼きなまし法に基づくアルゴリズムによる結果である．XHC-3は，我々が文献[15]で提案した，類似オークションの近似結果の再利用に基づく手法の結果である．また，HoosらのCasanovaアルゴリズムによる結果をcasanova，Zurelらのアルゴリズムによる結果をZurelと表記している．ここで，Zurelらのアルゴリズムでの，第1段階の近似で得られた結果を特別にZurel-1stと表記する．なお，Zurelらのアルゴリズムでは，この第1段階の近似結果が求められるまでは途中の近似結果が得られず，

表1　各入札分散における被支配的入札の割合

	SDB		WDB	
L2	99.7	(0.50%)	1913.3	(9.57%)
L3	69.9	(0.35%)	69.9	(0.35%)
L4	9102.1	(45.5%)	13145.3	(65.7%)
L6	3505.3	(17.5%)	7843.1	(39.2%)
L7	0	(0.00%)	0	(0.00%)

表2　ランダム探索による被支配的入札の勝者発生率

	RandomUp	RandomWalk	NoRandom
L2	0	0	0
L3	0	0	0
L4	100	62	0
L6	100	77	0
L7	0	0	0

解のない状態となっている．cplexは，CPLEXの近似結果である．各々に付した時間制限は末尾に-100msのようにミリ秒で付記し，並列実行時の結果はその前に-paraを付した．

なお，本実験では，Zurelアルゴリズムにおけるepsilon値を0.2とした．この値は文献[7]による．また，casanovaにおける np と wp は，それぞれ0.5および0.15とした．この値は，文献[8]による．SAについては，初期温度とその時間差分をそれぞれ $t = 50.0$ および $\Delta t = -5.0$ とした．

これらのアルゴリズムに対する性能比較については，一部をすでに文献[14], [10], [13], [15], および[12]で述べている．これらの評価実験では，入札数20,000，入札対象財数256のオークション問題を基準に評価用データセットを準備している．この評価用データセットとして，オークション問題の生成について標準的に用いられるCATS [17]を用いて5つの異なる入札生成方法 (入札分散) を用いたデータセットをそれぞれ100試行分生成している．

4.2 被支配的入札と勝者の分布

組み合わせオークションの最適勝者決定問題を解くアルゴリズムの評価には，評価用オークション問題として，被支配的入札を含まない入札から構成されるものを用意することが一般的である[6]．しかしながら，現実世界のアプリケーションでは，被支配的入札を含んだ状態 (すなわち，被支配的入札が含まれないことを前提としない状態) での解を求めることが必要になることがある．そこで，本論文では，CATSを用いて評価用オークションデータセットを生成する際に，被支配的入札を含んだ状態でのデータセットが生成されるようにした．ここで生成したデータセットは，5つ

の入札分散に対して，それぞれ 100 のオークション問題を準備し，各オークション問題ごとに，256 財に対する 20,000 入札が含まれるようにした．

表 1 は，ここで生成した各入札分散ごとの平均の被支配的入札の数を示している．なお，ここでは，WDB の値は，SDB を含んだ数値であり，入札分散の名前は，文献 [17] による．

入札分散ごとに，被支配的入札の数は大きく異なっている．L4 と L6 では，非常に多くの被支配的入札が含まれている．一方で，L2 では若干の SDB が含まれる．L3 では，すべての入札のバンドルサイズが同一となるような入札の生成方式であるため，被支配的入札は必ず SDB になる．L7 では，被支配的入札はデータセット中に観測できなかった．

表 2 は，ランダム探索アルゴリズムを用いた際に，勝者に被支配的入札が含まれる割合を示している．なお，本結果では，我々が以前提案した SA に基づく手法に手を加えたものを使用しており，*RandomUp* が，解の更新候補を選ぶ順をランダムにしたもの (ただし，温度は 0 の状態)，*RandomWalk* が確率的に値の低い解に遷移する機構を有効にしたもの (ただし，各解の更新候補は，HC と同様に入札に対する重みに基づいて順位付けしたもの) の結果をそれぞれ示している．ここでの近似時間は，いずれも 1200 ミリ秒であり，いずれの結果も近似結果としてもっとも性能の高かった解のみを評価対象としている．いずれのランダム探索においても，その近似結果では，L4 と L6 で，高い割合で被支配的入札が勝者に選ばれる状況が観測された．これらのランダム探索動作は，casanova や Zurel にも用いられているものであり，これらのアルゴリズムを用いた場合でも，同様の現象が起きることが予想される．なお，本実験結果では，被支配的入札として勝者に含まれたものはいずれも SDB で，WDB が勝者となるような場合は観測されなかった．

4.3 WPM と近似割り当ての効率性

表 3 は，各アルゴリズムについての WPM および Weak-WPM の保証の有無，および，被支配的入札が含まれない状況下での各アルゴリズムでの平均の近似性能(注1)を示している．ここで評価対象としたデータセットは，CATS を用いて被支配的入札が含まれないようにした 20,000 入札を 256 財に対して行うようなオークション問題を，前節と同様の 5 つの入札分散についてそれぞれ 100 問題用意したものである．ここでの近似性能は，問題の規模が大きくすべての最適解を求めることが困難であったため，Zurel で得られたの総落札額平均値を 1 とした，平均総落札価格の相対値として表現した (値が 1 より大きければ Zurel よりも財の割り当てが効率的であることを意味する)．また，各近似性能には，それを求めるのにかかる計算時間も付記した．なお，XHC-3-para-100ms の結果のみ，同様の実験を，文献 [15] で提案した繰り返しオークションによる条件下で計測したものである．また，cplex での Weak-WPM の欄を (n/a) としたのは，その仕様がオープンにはなっておらず，その条件が保証されることが明示的に示せなかったからである．

表 3 のとおり，HC-3-para-100ms および XHC-3-para-100ms はいずれも anytime WPM(逐次解がすべて WPM を満たす) と WPM at final result(アルゴリズム停止時には WPM を満たす) の 2 つの性質を満たしているにもかかわらず，計算速度性能比は SA,zurel,cplex と比較して十分に高い．このことから，少なくとも本論文で扱った条件下では，WPM を満たすようなアルゴリズムであるからといって，そのことがアルゴリズムの性能を大きく制限するような状況は観測されなかった．

4.4 アルゴリズム外部からの WPM の保証

直感的には，アルゴリズム自体で WPM や Weak-WPM を保証しなくとも，結果的に WPM や Weak-WPM を保証できるようにすることは，比較的容易であるように思われる．

たとえば，近似アルゴリズムを開始する前に，被支配的入札をすべて削除してしまうという方法がある．この方法については，そのアルゴリズム自体は非常に単純なものとして書ける．しかしながら，勝者決定を非常に短時間で近似する必要がある場合には，被支配的入札の削除にかかる時間的オーバヘッドは必ずしも無視できる範囲に収まらない可能性がある．

ここでは，議論の単純化のために，被支配的入札が WDB($B \subseteqq B'$) の場合を除き，SDB($B = B'$) の場合のみを先に考えることにする．

ここで，n をそのオークションに対する入札数，m をそのオークションで扱う財の数とする．仮に m が十分に小さければ，それぞれのバンドルに対する最高値の入札を求めるために，ハッシュアルゴリズムを容易に適用できる．我々が観測した範囲では，ハッシュ

(注1)：表 3 では，greedy の実装にソート基準値計算を高速化した実装を新たに用いているため，文献 [10] などで提示した結果より実行速度が高速になっている．

表 3 勝者近似性能 (20,000 入札-256 財) と WPM 保証

	opt. ratio	time	anytime Weak-WPM	WPM
greedy(c=0.5)	0.9170	(8.1msec)	satisfied	satisfied
greedy-3-para	0.9429	(10.0msec)	satisfied	satisfied
HC-(c=0.5)-100ms	0.9438	(100msec)	satisfied	(at final result)
HC-3-para-100ms	0.9831	(100msec)	satisfied	(at final result)
XHC-3-para-100ms	1.0013	(100msec)	satisfied	(at final result)
SA-1200ms	0.9781	(1200msec)	no	no
casanova-1000ms	0.3305	(1000msec)	no	no
zurel-1st	0.8265	(3433msec)	(not proven)	(not proven)
zurel	1.0000	(5470msec)	(not proven)	(not proven)
cplex-1000ms	0.3935	(1452msec)	(n/a)	(at final result)
cplex-3000ms	0.5804	(4386msec)	(n/a)	(at final result)

表を用いた SDB 削除アルゴリズムの場合でも，およそ Lehmann の欲張りアルゴリズムに対して 2〜4 倍程度の前処理時間を要した．

ここで，被支配的入札として WDB($B \subseteq B'$) の条件まで考慮した場合，被支配的入札の事前削除には，SDB のみを扱う場合に比べて飛躍的に大きな計算オーバヘッドが必要となる．その計算オーダーとして，現時点では $O(n^2)$ より小さなものを見つけることができていない．我々が観測した範囲では，同条件下で，2〜20 秒程度の追加の計算時間が必要となった．これは，表 3 での近似計算時間と比較して，非常に大きな計算オーバヘッドであるといえる．

一方で，SDB や WDB を事後に (すなわち，勝者決定後に) 取り除く方法も考えられる．当然，事後に SDB や WDB を取り除いたのでは，勝者決定アルゴリズム動作時に総入札数の減少がないため，勝者決定アルゴリズムの効率性の観点からは，積極的にこれを行う利点は大きくない．しかしながら，被支配的入札であるかどうかを判定する対象が勝者となった入札に限定されるため，財の数 m に対して入札数が十分に多い場合には，計算量の観点からも利点が多い．さらに，勝者近似アルゴリズム内での，勝者の入れ替わりが比較的穏やかな場合，入れ替わって勝者となったもの (差分勝者) のみに限定すれば，勝者近似アルゴリズム内に補助処理を追加することで，WeakWPM や WPM を保証しない勝者近似アルゴリズムでそれらを保証することができるようになる．そこで，我々は，SA の内部処理に手を加え，差分勝者に対して逐次 SDB や WDB を排除する機構を追加したものとして，XSA を用意した．次節では，XSA を含めた，勝者価格単調性と価格付けの破綻との関係について述べる．

4.5 勝者価格単調性と価格付け

本節では，勝者価格単一性が価格付けの破綻に与える影響を実験的に考察する．最初に，ほぼ同一のアルゴリズムで勝者価格単一性を保証する場合としない場合に，価格付けの破綻がどの程度の頻度で生じるのかを調べた．

表 4 L4 における SA と XSA の価格付け破綻の発生割合

	negative	too-much
SA-1200ms	0 (0%)	29.6 (100%)
XSA-1200ms	0 (0%)	13.8 (100%)
SA-12000ms	0 (0%)	7.6 (100%)
XSA-12000ms	0 (0%)	0.8 (56%)

本節で用いた勝者の価格付けは，基本的には VCG に基づいたものであるが，勝者 n を除いた再近似を行う際には，文献 [12] での AHC に基づく解の再利用を行い，その後に 1 度だけ欲張り法に基づく財の割り当ての追加を行ったものをその近似勝者とした．

表 4 に，SA および，それを (HC と同等の) 勝者価格単調性を満たすように改良した XSA での，4.2 節での入札分散 L4 における計算時間と価格付け時の破綻数を示す．表中で，数値は 1 試行あたりに発生した負の価格付け (negative) および高すぎる価格付け (too-much) の平均個数を示す．数値横の括弧内の数値は，その破綻が生じた試行の割合を示す．たとえば，XSA-1200ms の高すぎる価格付けは，1 試行あたり 7.6 件の勝者に対して行われ，100 パーセントの試行でそのような価格付けが少なくとも 1 つの勝者に対して行われた．今回使用した入札分散 L4 では，価格付けの破綻として負の価格付けは起きず，高すぎる価格付けのみであった．同じ近似時間で見た場合，SA よりも XSA のほうが，高すぎる価格付けが生じる回数が少なくなっている．また，同じアルゴリズムで見た場合では，近似時間が長い方が，高すぎる価格付けが生じる回数が減少しているが，XSA であっても，本実験条件では完全に 0 とはならなかった．

表 5 は，4.2 節のデータセットでの，HC-3 アルゴリズムにおける，価格付けの破綻の割合を示している．HC-3 では，入札分散 L3 を除き，価格付け時の破綻は

表 5 被支配的入札を含むデータセットでの HC-3 の価格付け破綻の発生割合

	L2		L3		L4		L6		L7	
	negative	too-m.	negative	too-m.	negative	too-m.	negative	too-m.	negative	too-m.
HC-3-para-100ms	0(0%)	0(0%)	0(0%)	2.1(72%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0.0(0%)	0(0%)
HC-3-para-1000ms	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0.4(32%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0.0(0%)	0(0%)

生じなかった．入札分散 L3 は，必ず入札の財バンドル数が定数となる特殊な事例であり，文献[10] での結果からも，この入札分散での財の割り当ての効率性が他の入札分散と比較して劣る場合が多いことがわかっている．このことから，勝者決定時の財の割り当ての効率性がある一定以上高ければ，今回扱った事例では価格付け時の破綻は起きにくいと考えられる．

5. まとめ

本論文では，我々は組み合わせオークションにおける近似勝者決定時の勝者価格単調性に着目し，その特性を解析した．予備的実験にて，入札を生成するアルゴリズム (すなわち入札分散) によって，被支配的入札がオークション問題に含まれる割合が大きく異なることを確認した．ランダム探索アルゴリズムを用いた場合に，入札分散の種類によってはかなり高い確率で，被支配的入札が近似勝者として含まれてしまうことを，実験により観測した．また，我々が用意した条件下では，弱勝者価格単調性をアルゴリズム内に持たせることによる近似性能への明確な悪影響は観測されなかった．勝者価格単調性と近似勝者への価格付けの関係を実験により解析し，勝者価格単調性を勝者近似アルゴリズムに組み入れることで，価格付けの際の破綻の発生を一定程度抑制できる可能性があることを示した．

文献

[1] P. Cramton, Y. Shoham and R. Steinberg: “Combinatorial Auctions”, The MIT Press (2006).

[2] T. Sandholm, S. Suri, A. Gilpin and D. Levine: “Cabob: A fast optimal algorithm for winner determination in combinatorial auctions”, Management Science, **51**, 3, pp. 374–390 (2005).

[3] T. Sandholm: “Expressive commerce and its application to sourcing: How we conducted $35 billion of generalized combinatorial auctions”, AI Magazine, **28**, 3, pp. 45–58 (2007).

[4] J. McMillan: “Selling spectrum rights”, The Journal of Economic Perspectives (1994).

[5] Y. Fujishima, K. Leyton-Brown and Y. Shoham: “Taming the computational complexity of combinatorial auctions: Optimal and approximate approarches”, Proc. of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI99), pp. 548–553 (1999).

[6] D. Lehmann, L. I. O'Callaghan and Y. Shoham: “Truth revelation in rapid, approximately efficient combinatorial auctions”, Journal of the ACM, **49**, pp. 577–602 (2002).

[7] E. Zurel and N. Nisan: “An efficient approximate allocation algorithm for combinatorial auctions”, Proc. of the Third ACM Conference on Electronic Commerce (EC2001), pp. 125–136 (2001).

[8] H. H. Hoos and C. Boutilier: “Solving combinatorial auctions using stochastic local search”, Proc. of the AAAI2000, pp. 22–29 (2000).

[9] N. Fukuta and T. Ito: “Towards better approximation of winner determination for combinatorial auctions with large number of bids”, Proc. of The 2006 WIC/IEEE/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology(IAT2006), pp. 618–621 (2006).

[10] N. Fukuta and T. Ito: “Periodical resource allocation using approximated combinatorial auctions”, Proc. of The 2007 WIC/IEEE/ACM International Conference on Intelligent Agent Technology(IAT2007), pp. 434–441 (2007).

[11] M. E. Thomadakis and J.-C. Liu: “On the efficient scheduling of non-periodic tasks in hard real-time systems”, Proc. of IEEE Real-Time Systems Symp., pp. 148–151 (1999).

[12] 福田, 伊藤：“短時間再割り当てを考慮した組み合わせオークション勝者決定の高速近似手法”, コンピュータソフトウェア (2008). (採録決定).

[13] 福田, 伊藤：“組み合わせオークションにおける多数入札時での勝者決定の近似解法に関する一考察”, 電子情報通信学会論文誌, **90-D**, 9, pp. 2324–2335 (2007).

[14] N. Fukuta and T. Ito: “Short-time approximation on combinatorial auctions – a comparison on approximated winner determination algorithms”, Proc. of The 3rd International Workshop on Data Engineering Issues in E-Commerce and Services(DEECS2007), pp. 42–55 (2007).

[15] N. Fukuta and T. Ito: “Fast partial reallocation in combinatorial auctions for iterative resource allocation”, Proc. of 10th Pacific Rim International Workshop on Multi-Agents(PRIMA2007), pp. 196–207 (2007).

[16] N. Nisan and A. Ronen: “Computationally feasible VCG mechanisms”, ACM Conference on Electronic Commerce, pp. 242–252 (2000).

[17] K. Leyton-Brown, M. Pearson and Y. Shoham: “Towards a universal test suite for combinatorial auction algorithms”, Proc. of EC 2000, pp. 66–76 (2000).