Take-It-or-Leave-It に基づく再配分オークションメカニズムの提案

斎藤　恭昌[†a)]　櫻井　祐子[†b)]　岩崎　敦[†c)]　横尾　真[†d)]

New Redistribution Mechanism based on Take-It-or-Leave-It

Yasumasa SAITO[†a)], Yuko SAKURAI[†b)], Atsushi IWASAKI[†c)], and Makoto YOKOO[†d)]

Abstract. 再配分オークションでは，一般的なオークションとは異なり，販売する財の所有者が存在しない状況を対象とし，支払額を入札者に再配分する．このとき，再配分オークションメカニズムは，社会的に望まれる性質に加え，出来る限り支払額の全額を再配分するといった性質も満たす必要がある．そこで，本論文では，戦略的操作不可能性を満足しつつ，全ての支払額を再配分することが可能な逐次区分メカニズムという新しいクラスを提案する．逐次区分メカニズムでは，全ての財の割当てを同時に行うのではなく，入札者と財を複数の区分に分割し，区分ごとに財の割当てを行う．各区分に適用するオークションは，戦略的操作不可能性を満足するメカニズムであれば，区分ごとに異なるメカニズムを適用することが可能である．さらに，逐次区分メカニズムのインスタンスの一つであり，各区分に Take-It-or-Leave-It メカニズムを適用した再配分オークションメカニズム (RM-TLA) を提案する．RM-TLA は，入札のルールが非常に単純であることに加え，入札者が公開する情報が少なくてすむという性質を持つ．

Keywords. オークション，メカニズムデザイン，再配分オークションメカニズム，戦略的操作不可能性，強予算制約

1. 序　　論

近年，インターネットは世界中から集まる売り手と買い手にオークションの機会を安価に提供する優れたインフラとなっている．実際，多くの企業や消費者がインターネットオークション上で様々な財を取引するようになり，電子商取引の主要な部分を占めつつある．このため，オークション研究は計算機科学や人工知能など幅広い分野で盛んに行われ，エージェント技術にとって重要な研究領域となっている [1].

一般的なオークションでは，財を販売する売手が存在しているため，集めた支払額は売手に与えられることは自明である．しかしながら，例えば，共同で車を所有し，週末に誰が車を使用するかを決定するためにオークションを行う場合，車は共同所有であるため，売手に値する者が存在しない．よって，集めた支払額をどうするかが問題となる．このように，落札者，支払額といった通常の割当て方法だけでなく，再配分方法も含めて決定するメカニズムは再配分メカニズム (redistribution mechanism) と呼ばれる．再配分メカニズムは，最近，メカニズムデザインの研究において，注目されている研究トピックスである [2]〜[5]．ここで，真の評価値を申告することが最適となる，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムとしてよく知られている Vickrey オークションを適用した場合を考える．Vickrey オークションでは 2 番目に高い入札額が支払額となる．この支払額を全員に均等に再配分した場合，2 番目に高い入札者は過大申告し支払額を高くすることで，再配分額を大きくすることができるため，戦略的操作不可能性が保証されなくなる．

従って，再配分メカニズムでは，再配分額の決定においても，評価値を過大／過少申告することで効果がない，真の評価値を申告することが最適な戦略となる必要がある．つまり，各入札者の再配分額の決定において，その入札者の入札額に依存せずに決定されなければならない．さらに，再配分額の総和が支払額の総和を超えないこと (非損失，non-deficit) を保証されるだけでなく，全ての支払額が再配分可能，すなわち，支払額が余ることなく再配分が行われること (強予算

† 九州大学大学院 システム情報科学府，〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地
a) E-mail: saito@agent.is.kyushu-u.ac.jp
b) E-mail: sakurai@agent.is.kyushu-u.ac.jp
c) E-mail: iwasaki@is.kyushu-u.ac.jp
d) E-mail: yokoo@is.kyushu-u.ac.jp

均衡，strong budget-balance) が望ましい．しかしながら，戦略的操作不可能性，パレート効率性 (最も高い効用を持つ入札者に財が割り当てられる)，かつ，強予算均衡を同時に満たすメカニズムは存在しないことが証明されている [6]～[8]．そのため，従来研究では，いずれかの性質を諦めることによって，再配分メカニズムの提案が行われている [2], [9], [10].

本論文では，再配分メカニズムに対して，逐次区分メカニズム (sequential partition mechanism) という，新しい一般的なクラスを提案する．このクラスに含まれるメカニズムは強予算均衡と戦略的操作不可能性を満たす．逐次区分メカニズムでは，全ての財の割当てを同時に行うのではなく，入札者と財を複数の区分 (グループ) に分割し，区分ごとに財の割当てを行う．まず，最初の区分でオークションを行い，集めた支払額は残っている入札者に予め決定した方法で再配分される．財が余った場合は，残りの区分に割り当てることができる．各区分にどの財を対象としたオークションを行うかは，それまでのオークションの結果を適用することができ，オークションメカニズムも戦略的操作不可能的なメカニズムであれば，区分ごとに異なるメカニズムを適用することが可能である．

さらに，逐次区分メカニズムの具体的なインスタンスとして，複数同一財を対象とした，take-it-or-leave-it (TLA，二者択一) に基づく再配分メカニズム (Redistribution Mechanism based on TLA, RM-TLA) を提案する．TLA は，主催者が各入札者に逐次的に価格を提示し，入札者は提示された価格が自分の評価値以上であれば承諾し，そうでなければ，拒否するメカニズムである．

TLA はルールの単純さだけでなく，以下に述べる通り，個人情報の保護の観点により，従来のメカニズムに比べて実用的である．つまり，入札者は入札額を申告する必要がないため，入札情報を主催者に知られることはない．一般に，オークション形式は，Vickrey オークションのように，入札額を主催者に申告する秘密入札型と Yahoo!オークションなどで利用されている公開競り上げ式オークションのように現在の価格を公開する公開入札型が主である．一方，TLA では，入札者は提示価格に対する受諾／拒絶しか申告しないため，これらの形式よりも入札者が公開する情報が少ない．入札者にとって入札額は重要な個人情報であるため，なるべくならば表明しないことが望ましい．また，主催者に対しても，主催者が入札額を知ることによって利益を増加させる不正行為を防ぐことができる．

文献 [11] では，再配分を行わない一般の TLA で，主催者が入札額の分布を事前知識として持つ場合，期待収入を最大化する提示価格の設定方法を提案している．一方，我々の RM-TLA メカニズムでは，常に支払額 (主催者の収入) は全て再配分されるため，収入は発生しない．従って，本論文では，主催者が入札額の分布を事前知識として持つ場合，社会的余剰の期待値を最大化する最適な提示価格の設定方法を提案する．

本論文の構成は以下の通りである．まず，第 2 章で再配分オークションのメカニズムデザインについて説明し，第 3 章で既存の再配分メカニズムを紹介する．その後，第 4 章にて，逐次区分メカニズムの提案を行う．さらに，逐次区分メカニズムの 1 インスタンスとして，第 5 章で RM-TLA メカニズムを述べ，第 6 章にて，得られる社会的余剰の期待値について議論する．

2. 再配分オークションのメカニズムデザイン

本章では，再配分オークションのメカニズムデザインに望まれる性質について述べる．

一般的なオークション理論の研究では，理論的な解析を容易にするために，入札者に関して，財に対する評価値は個人価値であり，効用は準線形効用で表現されると仮定している．本論文でもこの仮定を適用する．入札者の評価値が個人価値であるとは，各入札者は自身の評価値を十分に知っており，他の入札者の評価値に依存せずに決定されることである．準線形効用は，一般に，得られた財に対する真の評価値と支払額の差分で求められる．一方，再配分メカニズムでは再配分額を考慮する必要がある．効用は，得られた財に対する真の評価値から支払額を引いた差分に再配分額を加算して求められる．財が割り当てられず，再配分額のみを受け取った場合は，効用は再配分額と一致する．

次に，再配分メカニズムの望ましい性質として，パレート効率性，個人合理性，戦略的操作不可能性，非損失および強予算均衡について述べる．

戦略的操作不可能性 (strategy-proofness)： 再配分オークションメカニズムが支配戦略 (効用を最大化する戦略) において戦略的操作不可能的であるとは，各入札者にとって，真の評価値を申告することが支配戦略，すなわち他の入札者の行動に関わらず最適な戦略となることである．

個人合理性 (individual rationality)： 各入札者が支

配戦略を用いた場合，オークションに参加したことにより，参加しない場合と比較して効用が減少することがないことである．仮に，オークションに参加することで効用が負になる可能性があれば，そのようなオークションには誰も参加しないであろう．

パレート効率性 (Pareto efficiency)： パレート効率的な再配分メカニズムでは，全ての参加者の効用の和，すなわち，社会的余剰が最大化される割当てを実現する．入札者は金銭により効用を譲渡でき，入札者の効用は準線形であると仮定する場合，パレート効率的な割当てでは社会的余剰は常に最大化される．

非損失 (non-deficit)： 再配分額の総和が支払額の総和を超えることはない．すなわち，再配分額が足りなくなることはない．

強予算均衡 (strong budget-balance)： 再配分額の総和が支払額の総和と一致することを意味する．非損失の条件よりも厳しい条件である．

戦略的操作不可能性，パレート効率性，かつ，強予算均衡を同時に満たすメカニズムは存在しないことが証明されている [6]～[8]．そのため，再配分メカニズムを提案するにはいずれかの条件を諦めなければならない．

3. 既存の再配分メカニズム

本章では，従来研究において提案されている再配分メカニズムを紹介する．

- 文献 [3] では，強予算均衡を諦め，支払額が余ることを許容した Cavallo メカニズムを提案している．以下，単一財の場合の Cavallo メカニズムを紹介する．まず，Vickrey オークションによって支払額を決定する．各入札者への再配分額をその入札者を除いて 2 番目に高い入札額を入札者数 n で割った値とする．つまり，最高入札額者と 2 番目に高い入札額者は 3 番目に高い入札額，他の入札者は 2 番目に高い入札額の $1/n$ を受け取ることになる．従って，支払額は余るが，パレート効率的な割当てを実現し，自分の入札額に依存せずに支払額，再配分額が決定されるため戦略的操作不可能性を満たす．
- 文献 [2], [4] では，複数ユニットオークションで各入札者は 1 財だけを必要とする場合の再配分メカニズムを提案している．全ての入札者 n 人からランダムに一人の入札者を除き，$n-1$ 人でオークションを行い，その支払額を除いた入札者に与えるというアイデアに基づく．より詳細には，文献 [4] では除外した入札者に財を無料で割当て，$n-1$ 人に対して残りの財を VCG メカニズム ($M+1$-st price auction) [12]～[14] を適用して割当てを決定する．従って，除外された入札者は，財を無料で得られるだけでなく，集めた支払額を受け取ることができる．一方，文献 [2] の Faltings メカニズムでは，一人の入札者を除外して $n-1$ 人に対して VCG メカニズムを適用して割当てを決定する．ここでは，除外された入札者は集めた支払額を受け取るだけである．これらのメカニズムは常に強予算均衡を満たすが，パレート効率性を諦めている．
- 文献 [5] では，上述の一人の入札者を除外するアイデアを一般化し，財と入札者を 2 つの区分 (グループ) に分け，それぞれで VCG メカニズムを適用し，その支払額を相手のグループで再配分するという区分メカニズム (partition mechanism) のクラスを提案している．さらに，得られる社会的余剰と支払額が入札額による線形の式で求めることができるメカニズムを線形メカニズムと定義し，区分メカニズムはこのクラスに入っていることを示している．さらに，区分メカニズムで得られる社会的余剰の検討を行っている．具体的には，7 財に対して 8 人でオークションを行う場合，1 人のエージェントに無料で 1 財を割当て，残りの 7 人で VCG メカニズムによって支払額を決定する．この支払額を初めに財を割り当てたエージェントに与えるとき，98 %の社会的余剰が得られることを示している．

4. 逐次区分メカニズム

本章では，戦略的操作不可能性，強予算均衡を満たす再配分メカニズムの新しい一般的なクラスとして逐次区分メカニズム (Sequential Partition Mechanism) の提案を行う．区分メカニズム [5] とは異なり，2 つ以上の区分に財と入札者を分割し，各区分に対して逐次的にオークションを行う．従って，全てを事前に決定する必要はなく，各区分に対する財の分け方や適用メカニズムは，それまでのオークションの結果に依存して決定することが可能となる．

メカニズムの詳細は以下の通りである．

- 主催者は入札者を $A_1, A_2, \ldots, A_k$ のグループに k 分割する．
- さらに，主催者は財を $B_1, B_2, \ldots, B_k$ のグループに k 分割する．財は複数同一財でも，複数種類の財でもよい．財の分割方法については，事前に決定する必要はなく，各区分のオークションが始まる時点で，

それまでのオークション結果を考慮して決定してもよい．

- 任意の戦略的操作不可能的なメカニズム M_1 を入札者集合 A_1 と財の集合 B_1 に適用する．全ての財を割り当てる必要はなく，財は売れ残ってもよい．
- 集めた支払額は，$A_2,\ldots,A_k$ の入札者集合に含まれる入札者に事前に定めた方法 (例えば，均等割り) で配分される．
- さらに，任意の戦略的操作不可能的なメカニズム M_2 を入札者集合 A_2 と財の集合 B_2 と B_1 で売れ残った財に適用する．集めた支払額は $A_3,\ldots,A_k$ の入札者集合に再配分する．以降，$k-1$ 区分まで同様に行う．各区分でのメカニズム M_i は，事前に決定する必要はなく，それまでのオークション結果に依存したメカニズムを適用することができる．
- 最後に，売れ残っている財と B_k は入札者集合 A_k に対して事前に決定した方法で無料で与える．

次に，逐次区分メカニズムが戦略的操作不可能性と強予算均衡を満たすことを示す．

［定理 1］ 逐次区分メカニズムは戦略的操作不可能性を満たす．

（証明） 逐次区分メカニズムは，入札者の評価値に依存せずに入札者を分割する．さらに，区分 i のメカニズム M_i は，その区分の入札者集合 A_i に依存しない戦略的操作不可能性を満たすメカニズムが適用される．従って，入札者は財の割当てと支払額に関して入札額を過大／過少に申告しても効果がない．また，再配分に関しても，再配分額はそれまでに行われた各区分のオークションの結果によって決定され，再配分方法も入札額に依存せずに事前に決定される．従って，オークションで申告する入札額を過大／過少申告しても，再配分額に影響を与えない．以上より，逐次区分メカニズムは戦略的操作不可能性を満たす． □

［定理 2］ 逐次区分メカニズムは強予算均衡を満たす．

（証明） 区分 i で集められた支払額は，常に，残りの区分 $i+1$ から k までに含まれる入札者に対して，支払額が残らないように再配分される．また，最後の区分 k では，財は無料で割当てられるため，支払額が生じない．従って，逐次区分メカニズムは強予算均衡を満たす． □

逐次区分メカニズムはパレート効率性を必ずしも保証しない．しかしながら，例えば，以下のような例では常に最適な割当てを実現できる．単一財を対象とし，入札者が n 人いるとする．このとき，どの入札者かわからないが，一人だけ，r 以上の評価値を持つ入札者がいることが分かっている．この場合，まず，$n-1$ 人に留保価格 r を設定した Vickrey オークションを行う．売れれば，支払額を残りの一人に渡す．売れなければ，残りの一人に無料で与える．すなわち，売れれば，$n-1$ 人に r 以上の評価値を持つ入札者が存在し，その入札者に財が割当てられることを意味する．売れなければ，r 以上の評価値を持つ入札者が残りの一人であり，その入札者に財が割り当てられる．

一方，区分メカニズムでは，入札者を 1 人と $n-1$ 人に分ける点では同じだが，財をどちらのグループに割当てるかを事前に決定しなければならない．従って，$n-1$ 人の方に割り当てると決め，留保価格 r を設定した Vickrey オークションを行っても，r 以上の評価値を持つ入札者が残りの一人であれば，最適な割当てを実現することができない．このように，区分メカニズムとは異なり，売れ残った財は残りの入札者に割当てることができるという利点を持つ．

5. TLA に基づく再配分メカニズム

本章では，TLA (take-it-or-leave-it) に基づく再配分メカニズムである RM-TLA メカニズムを説明する．RM-TLA メカニズムは，複数同一財オークションを対象とした逐次区分メカニズムのインスタンスの一つである．従って，戦略的操作不可能性，強予算制約を満足することは自明である．以下，本章では，議論の簡単化のために入札者の需要は一つ (unit-demand) であると仮定する．しかしながら，需要が複数単位であり，限界効用が逓減する場合に対して拡張可能である．

5.1 メカニズムの詳細

入札者の数を n，財の数を $m(\leqq n)$ と表し，入札者 i は評価値 v_i を持つ．提案メカニズムは以下の手順で行われる：

- 主催者は，n 人の入札者を $|A_j| = 1$ $(j = 1,\ldots,n)$ に n 分割する．分割方法は入札者の評価値に依存せず，ランダムに入札者が選択される．A_i に属する入札者を入札者 i と呼ぶ．
- 財を $|B_j| = 1 \quad (1 \leqq j \leqq m)$ に分割する．
- 入札者 1 と財の集合 B_1 に対して TLA メカニズムを適用する．まず，主催者は任意の提示価格 r_1 を設定する[注1]．入札者 1 に対し，価格 r_1 を提示する．

（注1）：提示価格は区分ごとに決める必要はなく，事前に全ての入札者

v_1 が r_1 以上のとき，入札者 1 は購入を承諾し，r_1 を支払って財を獲得する．

- このときの支払額は入札者 $2, \ldots, n$ に均等割りされ，それぞれ $r_1/(n-1)$ で再配分される．
- 続いて，入札者 2，B_2 と B_1 で割り当てられなかった財の個数 m_2 に TLA メカニズムを適用する．主催者は提示価格 r_2 を設定し，入札者 2 に r_2 を提示する．v_2 が r_2 以上のとき，入札者 2 は購入を承諾し，r_2 を支払って財を獲得する．r_2 は入札者 $3, \ldots, n$ に対して均等割りした $r_2/(n-2)$ で再配分される．
- 以降，入札者 $3, 4, \ldots$ に対して逐次的に TLA を適用する．入札者 k に対して r_k で購入するか尋ねる．購入する場合には，入札者 2 は r_k を支払い，入札者 $k+1, \ldots, n$ がそれぞれ $r_k/(n-k)$ の再配分を受け取る．ただし，任意の区分 k において，区分 k 以降の入札者数 $n-k+1$ が B_k 以下の場合，区分 k 以降の入札者には無料で財を割り当てる．

5.2 適用例

本節では，RM-TLA メカニズムの例として，3 人の入札者が存在し，財が 1 つ ($m=1$)，財が 2 つ ($m=2$) の場合を紹介する．入札者の評価値と提示価格は，$m=1$ のときは表 1 から，$m=2$ のときは表 2 から与える．また，図 1 および図 2 は $m=1$，$m=2$ のときのオークションの流れを示す．二分木の最上部は区分 1 での交渉を意味しており，入札者 1 の承諾／拒否により，区分 2，区分 3 と遷移する．ただし，区分 3 は提示価格 0 であり，拒否する誘因が存在しないため，承諾のみを記述している．二分木のノードに示されている数字は交渉時点で残っている財の数を表しており，C_{j,m_j} は区分 j で財が m_j 個残っている場合に得られる社会的余剰の期待値を表している．p_i は入札者 i の支払額を示しており，正の値のときは入札者がその額を支払い，負の値のときはその額を受け取ることを意味する．

［例 3］ 3 人 1 財のオークションを考える．

- 設定 1: 主催者は入札者 1 に価格 5/8 を提示する．入札者 1 は，自身の評価値 7/8 が提示価格 5/8 を上回っているため，支払額 5/8 で財を獲得する．このとき，入札者 2, 3 はこの支払額を二人で均等に分け，それぞれ再配分額 5/16 を受け取る．
- 設定 2: 主催者は入札者 1 に価格 5/8 を提示する．しかし，入札者 1 は評価値よりも提示価格が高いため，購入を拒否する．続いて，主催者は入札者 2 に対する提示価格として 1/2 を設定する．入札者 2 の価値 3/4 は提示価格 1/2 よりも高い．よって，入札者 2 は支払額 1/2 で財を獲得し，入札者 3 は再配分額 1/2 を得る．
- 設定 3: 主催者は入札者 1 に価格 5/8 を提示する．設定 2 と同様に，入札者 1 は購入を拒否する．続いて，入札者 2 に対する提示価格を 1/2 とするが，入札者 2 は，提示価格が自身の評価値 1/4 よりも高いため，入札者 2 も購入を拒否する．従って，財の購入の交渉が行われていない入札者数と残っている財の数が等しくなり，入札者 3 は支払額 0 で財を獲得する．

［例 4］ 次に，3 人 2 財の例を示す．

- 設定 1: 主催者はまず入札者に価格 3/8 を提示する．入札者 1 は，提示価格 3/8 よりも自身の評価値のほうが高いため，3/8 を支払って財を獲得し，入札者 2 および 3 はその支払額を均等分けした再配分額 3/16 を受け取る．入札者 1 の交渉が終了した段階で財が一つ余っており，続いて入札者 2 に対して交渉が行われる．主催者は入札者 2 に対する提示価格は 1/2 と設定する．従って，入札者 2 は支払額 1/2 で財を獲

表 1　3 人 1 財オークション（例 3）における入札者の評価値．v_i は入札者 i の評価値であり，r_i は入札者 i に対する提示価格を表す．

	設定 1		設定 2		設定 3	
	v_i	r_i	v_i	r_i	v_i	r_i
入札者 1	7/8	5/8	1/8	5/8	1/8	5/8
入札者 2	3/4	-	3/4	1/2	1/4	1/2
入札者 3	1	-	1	-	0	0

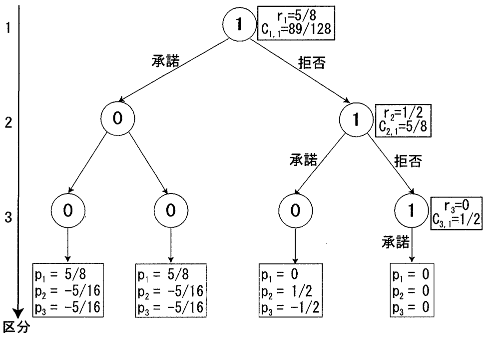

図 1　表 1 の環境における 3 人 1 財オークションの流れ図．ただし，r_i と p_i はそれぞれ，入札者 i に対する提示価格と支払額を示しており，C_{j,m_j} は区分 j で財が m_j 個残っている場合に得られる社会的余剰の期待値を表している．

に対する提示価格を決めても良い．

表 2　3 人 2 財オークション（例 4）における入札者の評価値．v_i と r_i は表 1 を参照．

	設定 1		設定 2		設定 3	
	v_i	r_i	v_i	r_i	v_i	r_i
入札者 1	7/8	3/8	1/8	3/8	1/8	3/8
入札者 2	3/4	1/2	3/4	0	1/4	0
入札者 3	1	-	1	0	0	0

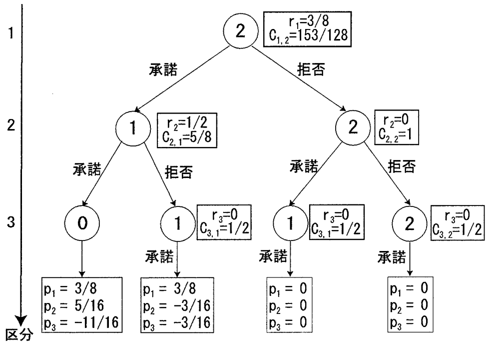

図 2　表 2 の環境における 3 人 2 財オークションの流れ図．r_i，p_i および C_{j,m_j} については図 1 を参照．

得し，入札者 3 は 1/2 の再配分を受け取る．

- 設定 2 および設定 3: 主催者は入札者 1 に価格 3/8 を提示する．入札者 1 は評価値よりも提示価格が高いため，購入を拒否する．ここで，未交渉の入札者数と残っている財の数が等しいため，続く入札者 2 および 3 は提示価格 0 で財を獲得する．

5.3　最適な提示価格の設定

RM-TLA メカニズムで得られる社会的余剰は提示価格に依存している．すなわち，提示価格が高ければ，最後の一人に無料で財を与えることになるが，この入札者の評価値が最大であるとは限らない．一方，最初の入札者への提示価格が低ければ，その入札者に財が割当てられるが，同様に，この入札者の評価値が最大であるとは限らない．そこで，RM-TLA メカニズムがより良い社会的余剰を得るには，提示価格の設定が課題となる．本章では，RM-TLA メカニズムにおいて，主催者が事前知識として入札者の評価値の分布を保持している場合，社会的余剰の期待値を最大化する提示価格の算出方法について述べる．

全ての入札者の評価値が任意の分布関数 $F(a)$ およびその密度関数 $f(a)$ で与えられるとする．財が一つの場合，最適な提示価格に関して以下の定理が成り立つ．

［定理 5］　区分 $k+1$ 以降で得られる社会的余剰の期待値を区分 k の提示価格に設定したとき，区分 k の社会的余剰の期待値が最大化される．

（証明）　j 番目の提示価格を r，区分 $j+1$ 以降の社会的余剰の期待値を C_{j+1} とする．$G(r)=\int F(r)dr$ としたとき，区分 j における提示価格の期待値は，

$$
\begin{aligned}
E(r) &= (1-F(r))\int_r^1 \frac{xf(x)}{1-F(r)}dx + F(r)C_{j+1} \\
&= \int_r^1 xf(x)dx + F(r)C_{j+1} \\
&= 1 - rF(r) - G(1) + G(r) + F(r)C_{j+1} \\
&= -rF(r) + C_{j+1}F(r) + G(r) - G(1) + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E'(r) &= -F(r) - rf(r) + C_{j+1}f(r) + F(r) \\
&= (C_{j+1} - r)f(r).
\end{aligned}
$$

従って，区分 j の提示価格を C_j と設定したときに区分 j での期待値が最大化し，そのときの最大値は $G(C_j)-G(1)+1$ である．　□

次に，財が複数を存在する場合を考える．区分 j 開始時に残っている財の数を m_j とすると，以下の定理が成り立つ．

［定理 6］　区分 $j+1$ に財が m_j 個残っている場合の区分 $j+1$ 以降における社会的余剰の期待値と，区分 $j+1$ に財が m_j-1 個残っている場合の区分 $j+1$ 以降における社会的余剰の期待値の差分を区分 j の提示価格に設定した場合，区分 j の社会的余剰の期待値が最大化される．

（証明）　区分 $j+1$ 開始時に財が l ($l=m_j$ または $l=m_j-1$) 個残っているとき，区分 $j+1$ 以降における社会的余剰の期待値を $C_{j+1,l}$ とする．$G(r)=\int F(r)dr$ としたとき，区分 j における提示価格の期待値は，

$$
\begin{aligned}
E(r) &= (1-F(r))(\int_r^1 \frac{xf(x)}{1-F(r)}dx + C_{j+1,m_j-1}) \\
&\quad + F(r)C_{j+1,m_j} \\
&= \int_r^1 xf(x)dx + (1-F(r))C_{j+1,m_j-1} \\
&\quad + F(r)C_{j+1,m_j} \\
&= 1 + C_{j+1,m_j-1} - (r + C_{j+1,m_j-1})F(r) \\
&\quad - G(1) + G(r) + F(r)C_{j+1,m_j} \\
&= -rF(r) + (C_{j+1,m_j} - C_{j+1,m_j-1})F(r) \\
&\quad - G(1) + G(r) + C_{j+1,m_j-1} + 1
\end{aligned}
$$

$$E'(r) = -F(r) - rf(r) + F(r) + (C_{j+1,m_j} - C_{j+1,m_j-1})f(r) = (C_{j+1,m_j} - C_{j+1,m_j-1} - r)f(r).$$

従って，区分 j の提示価格を $C_{j+1,m_j-1} - C_{j+1,m_j}$ と設定したときに期待値が最大化され，そのときの最大値は $G(C_{j+1,m_j-1} - C_{j+1,m_j}) - G(1) + C_{j+1,m_j-1} + 1$ である． □

例えば，入札者の評価値が $[0,1]$ の一様分布で与えられるとし，その分布を主催者が知っているとする．3 人 1 財のオークションと 3 人 2 財のオークションにおける各入札者に対する最適な提示価格を算出可能であり，このときの値は図 1 および図 2 に示した提示価格になる．

6. 社会的余剰の比較

本章では，RM-TLA メカニズムが 5.3 節で解析的に求めた社会的余剰の期待値をパレート効率的な場合，および Faltings メカニズム [2] を用いた場合に対して比較する．

入札者の評価値を $[0,1]$ の一様分布と仮定する．このとき，パレート効率的な割当てにおける社会的余剰の期待値は最大順序統計量 (order statistic) で求めることができる．具体的には，定義 7 より $n/(n+1)$ となる．

［定義 7］ 標準一様分布からの最大順序順序統計量は $n/(n+1)$ である．

(証明) $X_1, X_2, \ldots, X_s$ を $[0,1]$ 上の一様分布からの標本の大きさが s のランダム標本とする．さらに，これらを小さい順に並び替えたものを $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(s)}$ と表す．広義積分より $X_{(j)}$ の期待値は

$$E[X_{(j)}] = \frac{s!}{(j-1)!(s-j)!}\int_0^1 x^j(1-x)^{n-j}dx \tag{1}$$

と求まる．ここで，$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ は $\alpha > 0$ ならば広義可積分である．特に，α が正の整数のとき，

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
- $\Gamma(\alpha) = 1$
- $\Gamma(\alpha) = \alpha!$

が成立する．これを利用して，

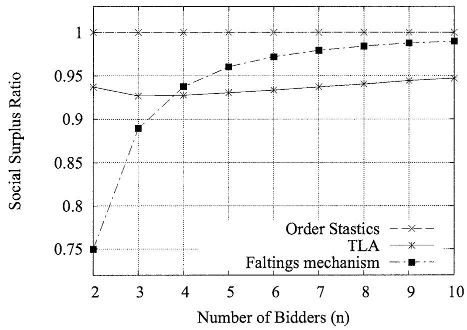

図 3 n 人 1 財オークションでの社会的余剰の期待値．各メカニズムのグラフは最大順序統計量を 1 としたときの比率で表している．

表 3 n 人 1 財の社会的余剰の数値．括弧内は各入札者数における最大順序統計量との比率を表す．

n	最大順序統計量 ($\frac{n}{n+1}$)	TLA	Faltings ($\frac{n-1}{n+1}$)
2	0.667 (100.0%)	0.625 (93.8%)	0.500 (75.0%)
3	0.750 (100.0%)	0.695 (92.7%)	0.667 (88.9%)
4	0.800 (100.0%)	0.742 (92.7%)	0.750 (93.8%)
5	0.833 (100.0%)	0.775 (93.0%)	0.800 (96.0%)
...	...	...	...
10	0.909 (100.0%)	0.861 (94.7%)	0.900 (99.0%)

$$\begin{aligned} E[X_{(j)}] &= \frac{s!}{(j-1)!(s-j)!}\int_0^1 x^j(1-x)^{s-j}dx \\ &= \frac{s!}{(j-1)!(s-j)!}\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(s-j+1)}{\Gamma(s+2)} \\ &= \frac{s!}{(j-1)!(s-j)!}\frac{j!(s-j)!}{(s+1)!} \\ &= \frac{j}{s+1} \end{aligned}$$

が成立する．従って，最大順序統計量 $X_{(s)}$ は $s/(s+1)$ となる． □

表 3 はオークションに参加する人数を $n = 2, 3, \ldots, 10$ で変化させたときの社会的余剰の期待値を表しており，図 3 は最大順序統計量に対する各メカニズムの社会的余剰の期待値である．参加人数が 3 以下の場合，Faltings メカニズムよりも RM-TLA メカニズムのほうが社会的余剰が高い．しかし，参加人数が 4 以上の場合，RM-TLA メカニズムより Faltings メカニズムの方が常に得られる社会的余剰が高い．このように，Faltings メカニズムは最適値に急速に近づくのに対し，提案メカニズムは緩やかに近づいている．さらに，理論的にも，参加人数が多くなれば，RM-TLA メカニズムも最適値により近づく．従って，パレート

効率的な割当てに対する，RM-TLA メカニズムの社会的余剰の減少分は約 8%程度で抑えられることがいえる．

7. 結　　論

本論文では，戦略的操作不可能と強予算制約を満足する再配分オークションメカニズムの新しいクラスとして，逐次区分メカニズムと呼ぶクラスの提案を行った．逐次区分メカニズムは，入札者と財をそれぞれグループ分けし，逐次的に戦略的操作不可能なメカニズムによって財の割当てを行う．あるグループで決定した支払額は，残りのグループに含まれる入札者に再配分される．

さらに，我々は逐次区分メカニズムのインスタンスの一つとして RM-TLA メカニズムを提案した．ルールが非常に簡単かつ個人情報保護の観点から従来のメカニズムより実用的なメカニズムであるといえる．

今後の課題として，以下の 2 つが考えられる．まず，入札者の需要が複数単位のときに限界効用が逓減しない場合や，分布関数が一様分布よりも複雑な状況に対しても，最適な提示価格の提案を行う．次に，逐次区分メカニズムのインスタンスとして，組合せオークションに適用可能な再配分オークションメカニズムの提案を行う．

文　　献

[1] "チーム訴択問題のための架空名義操作不可能なナーハプョンメニニペムの提案" (2007).

[2] "A budget-balanced, incentive-compatible scheme for social choice", AMEC, pp. 30–43 (2004).

[3] "Optimal decision-making with minimal waste: Strategyproof redistribution of vcg payments", AAMAS '06: Proceedings of the fifth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems, New York, NY, USA, ACM, pp. 882–889 (2006).

[4] "Efficient, strategy-proof and almost budget-balanced assignment" (2007). Working Paper.

[5] "Better redistribution with inefficient allocation in multi-unit auctions with unit demand", EC '08: Proceedings of the 9th ACM conference on Electronic commerce, New York, NY, USA, ACM, pp. 210–219 (2008).

[6] "On the existence of allocation systems whose manipulative nash equilibria are pareto-optimal: the case of one public good and one private good" (1975). Presented at the 3rd World Congress-Econometric Society meetings, Toronto.

[7] "Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods", Econometrica, **45**, 2, pp. 427–38 (1977).

[8] "Efficient mechanisms for bilateral trading", Journal of Economic Theory, **29**, 2, pp. 265–281 (1983).

[9] "The demand revealing process: To distribute the surplus", Public Choice, **91**, 2, pp. 107–26 (1997).

[10] "Achieving budget-balance with Vickrey-based paymentschemes in exchanges", Proc. 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01), pp. 1161–1168 (2001).

[11] "Sequences of take-it-or-leave-it offers: Near-optimal auctions without full valuation revelation", AAMAS '06: Proceedings of the fifth international joint conference on Autonomous agents and multiagent systems, New York, NY, USA, ACM, pp. 1127–1134 (2006).

[12] "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders", The Journal of Finance, **16**, 1, pp. 8–37 (1961).

[13] "Multipart pricing of public goods", Public Choice, **2**, pp. 19–33 (1971).

[14] "Incentives in teams", Econometrica, **41**, pp. 617–631 (1973).