クラーク税を用いた戦略的操作不可能な費用分担メカニズムの提案

佐藤 恭史[†a)] 大田 直樹[†] 櫻井 祐子[†] 岩崎 敦[†] 横尾 真[†]

Strategy-Proof Cost Sharing Mechanism based on Clarke Tax

Yasufumi SATOH[†a)], Naoki OHTA[†], Yuko SAKURAI[†], Atsushi IWASAKI[†], and Makoto YOKOO[†]

Abstract. 費用分担問題とは，複数のエージェントが提携を組み，目的の達成に必要な費用の分担方法（メカニズム）に関する問題である．しかし従来メカニズムは，戦略的操作不可能性を満たすために，適用領域を限定したり，費用が不足するといった問題があった．そこで，本論文では，費用の均等分担にクラーク税を加えることで，戦略的操作不可能性を満たしつつ，より適応領域が広く，費用が不足することのないメカニズムを提案する．

Keywords. 費用分担問題，メカニズムデザイン，クラーク税，戦略的操作不可能性

1. はじめに

マルチエージェントシステムの研究分野では，複数の自律的なエージェントが集団として意思決定を行う場合のルール設計に，ゲーム理論やミクロ経済学を応用した研究が多数存在する [1], [2]．例えば，複数のエージェントが共同で何らかサービスを受ける場合，その費用をどのように配分するかが問題となる．各エージェントへの費用配分を算出する問題は費用分担問題と呼ばれ，費用の配分方法を決めるルールを費用分担メカニズムと呼ぶ．具体的な適用例として，ネットワークや電話線，水道管などの設置コストの配分方法の決定などがある．これまでに，いくつかの費用分担メカニズムが提案されており，近年では，電子商取引関係の研究者らによって，新しいメカニズムの提案が行われている [3]．

本論文では，エージェントがサービスに対する評価値を申告し，申告された評価値とコスト関数に基づいて，サービスを受けるエージェントとその支払額を決定する，費用分担メカニズムについて考察を行う．費用分担メカニズム設計を行う上で，戦略的操作不可能性，パレート効率性，個人合理性，費用均衡を満たすことが望ましいと考えられる [4]．費用均衡とは，支払額の総和と必要な費用が一致することである．しかしながら，これらの性質を同時に満たす費用分担メカニズムは存在しないことが証明されている [5]～[7]．そのため，既存メカニズムはいずれかの性質を諦めている．

例えば，協力ゲーム理論の代表的な解概念である，シャプレイ値を利用したメカニズムが提案されている [8], [9]．シャプレイ値とは，各エージェントがランダムな順序でゲームに参加したときのエージェントの貢献度（効用の増加分）の期待値である [9]．シャプレイ値のメカニズムはイギリスのバーミンガム空港の滑走路建設費用分担方法として適用された [10]．このメカニズムは，コスト関数が劣モジュラ関数に限定しており，戦略的操作不可能性，個人合理性，費用均衡を満たす．一方，パレート効率性は満たされていない．

コスト関数が劣モジュラ関数である場合，直感的には，2 つの異なるエージェント集合が一緒にサービスを受ける際のコストはそれぞれ集合でサービスを受ける時のコストの和以下になることである．従って，コスト関数が劣モジュラ関数のとき，基本的には全員がサービスを受けるのが最適であるが，個人合理性制約より，価格が評価値よりも高ければ支払うことができない．従って，個人合理性制約が満たされないエージェントが順次離脱し，個人合理性制約を満たすエージェントだけにサービスが提供されるメカニズムで対

† 九州大学大学院システム情報科学府，〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡７４４番地
a) E-mail: satoh@agent.is.kyushu-u.ac.jp

応可能である．シャプレイ値のメカニズムはこのようなメカニズムの 1 つである．

一方，コスト関数が任意の場合に適用可能で，パレート効率性を満たすメカニズムとして，クラーク・グローブスメカニズムに基づく費用分担メカニズムが提案されている．しかしながら，このメカニズムでは費用が不足する場合もあり，取引が成立しない可能性がある．費用不足が生じるメカニズムは誰がその不足分を負担するかが課題となり，実用的ではない．

そこで，本論文では，コスト関数が任意の場合，費用不足が生じない新しいメカニズムの提案を行う．また，取引が常に実現されるためには，エージェントは参加することで損をしない，すなわち，個人合理性も必須条件である．従って，我々は費用が足りることと個人合理性を必須条件とし，戦略的操作不可能性を満たすメカニズムを考案する．提案メカニズムは均等割りしたコストに対して，そのエージェントがサービスを受けることで他の人に与える迷惑料を税として支払う．個人合理性制約を満たさないエージェントが離脱し，サービスを受けるエージェント集合が小さくなり，コストが変わったとしても，個人合理性制約を満たす残りのエージェントで費用を賄えることを保証する．

本論文の構成は以下の通りである．まず，第 2. 章で，準備として，費用分担問題の定式化とメカニズムに望まれる性質の定義を述べる．次に，第 3. 章で既存のメカニズムについて紹介する．その後，第 4. 章にて，任意のコスト関数の場合，戦略的操作不可能性を満たし，常に実現可能なメカニズムの提案を行う．

2. 準　　備

本章では，費用分担問題の定式化と費用分担メカニズムに望まれる性質を説明する．

2.1 問題の定式化

費用分担問題では，エージェントの集合に対して与えられるコスト関数とエージェントから表明されるグロス効用（無料でサービスを受ける場合の効用）に基づいて，サービスを受けるエージェントと価格（支払額）が決定される．

サービスを受けることを希望するエージェント集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とする．エージェント $i \in N$ のグロス効用を v_i とする．v_i は他のエージェントに依存されずに決定される個人価値とする．さらに，エージェント i の効用は準線形効用とし，グロス効用と支払額の差分で与えられるとする．サービスを受けない場合の効用は 0 とする．

コスト関数 $C(S)$ は，サービスを受ける任意のエージェント集合 $S \subseteqq N$ に対して決定される．$S=\emptyset$ の場合は $C(S)=0$ とする．コスト関数 $C(S)$ は以下の単調性を満たすとする．すなわち，

$$C(S') \leqq C(S)$$

を満たすとする．

エージェント i の価格を ξ_i と表す．価格は，表明されたグロス効用とコスト関数によって決定される．エージェント i がサービスを受けない場合は $\xi_i=0$ とする．従って，エージェント i がサービスを受けて ξ_i を支払うときの効用は $v_i-\xi_i$ となる．

2.2 望ましい性質

費用分担メカニズムに望まれる性質を以下に定義する．

[定義 1](個人合理性) 個人合理性を満たす費用分担メカニズムでは，エージェント i が真実申告をした場合，エージェントの効用は非負である．すなわち，全てのエージェント i に対して，

$$v_i-\xi_i \geqq 0, \quad \forall i \in N$$

が成立する．

[定義 2](費用均衡) 費用均衡となる費用分担メカニズムでは，エージェントの支払額 ξ_i の総和がコスト $C(S)$ に一致する．すなわち，

$$\sum_{i \in N} \xi_i = C(S)$$

が成立する．本論文では，支払額の総和が必要なコストを超過することを費用超過，支払額の総和が必要なコストよりも少ないことを費用不足という．

[定義 3](戦略的操作不可能性) 費用分担メカニズムが戦略的操作不可能性を満たすとは，各入札者にとって，真のグロス効用を申告することが支配戦略 (効用を最大化する戦略)，すなわち他の入札者の行動に関わらず最適な戦略となることである．

[定義 4](パレート効率性) パレート効率性を満たす費用分担メカニズムでは，全員の効用の和（社会的余剰）を最大化するエージェント集合 S^P がサービスを受ける．すなわち，

$$S^P = \arg\max_{S \subseteqq N} \left\{ \sum_{i \in S} v_i - C(S) \right\}$$

をサービスを受けるエージェント集合として決定する．

3. 従来メカニズム

本章では，これまでに提案されているメカニズムの紹介をする．費用分担メカニズムとして，様々なメカニズムが提案されているが，ここでは，本論文と同様の問題設定に対して提案されているメカニズムである，シャプレイ値のメカニズム，限界費用価格メカニズム(クラーク・グローブスメカニズム)，平均費用価格メカニズムの 3 つを述べる [11], [12].

3.1 シャプレイ値のメカニズム (Shapley Value Mechanism)

シャプレイ値は，協力ゲーム理論における代表的な解概念の一つである．本メカニズムは，費用分担メカニズムの価格をシャプレイ値によって決定する．

シャプレイ値とは，ランダムな順序でゲームに参加した場合の，エージェントの限界コストの平均値である．エージェント i の限界コストとは，あるエージェントの集合に，エージェント i が加わることによるコスト関数の増加値である． [9]

まず，シャプレイ値のメカニズムの詳細を述べる．

（1） 全てのエージェント $i \in N$ に対して，シャプレイ値 $sh_i(C, N)$ を算出する．

シャプレイ値は，任意のエージェント集合 $S \subseteqq N$ とコスト関数 $C(S)$ に対して以下のように定義される．

$$sh_i(C,S) = \sum_{S' \subseteqq S \setminus \{i\}} \frac{|S'|!(|S|-|S'|-1)!}{|S|!}[C(S' \cup i) - C(S')]$$

（2） 個人合理性制約を満たさない，すなわち，$v_i < sh_i$ となるエージェントは離脱する．

（3） 離脱していないエージェント集合 S について，エージェント $i \in S$ に対して，再度シャプレイ値 $sh_i(C, S)$ を算出する．

（4） 離脱者がいなくなるまで，2, 3 のフローを繰り返す．

（5） 離脱者がいない，すなわち，残っている全てのエージェントの個人合理性制約を満たすシャプレイ値が価格となる．すなわち，$\xi_i = sh_i(C, S)$ となる．

次に，シャプレイ値のメカニズムに関する特徴を説明する．特徴を述べる前に，まず，クロス単調性と劣モジュラ関数について定義する．

[定義 5](クロス単調性 (cross monotonicity)) 価格 ξ_i がクロス単調性を満たすとは，他のエージェントが離脱しても，価格が減少しないことを意味する．すなわち，エージェント集合 S'，S ($S' \subseteqq S$) について，エージェント $i \in S'$ において，サービスを受けるエージェント集合が S のときの価格を ξ_i，S' のときの価格を ξ'_i としたとき，

$$\xi_i \leqq \xi'_i$$

を満たす．

[定義 6](劣モジュラ関数 (sub-modular function)) コスト関数が劣モジュラ関数であるとは，任意のエージェント集合 A，B に対して，

$$C(A) + C(B) \geqq C(A \cap B) + C(A \cup B)$$

を満たすことである．

本メカニズムは費用均衡を満たし，コスト関数が劣モジュラ関数であるとき，戦略的操作不可能性を満たす．その理由として，シャプレイ値はコスト関数が劣モジュラ関数のとき，クロス単調性を満たすことがある．クロス単調性の性質から，一度離脱したエージェントが戻ってくる誘因がない，すなわち，残っているエージェントが減れば，一人あたりのコストが増えるためである．

しかしながら，シャプレイ値のメカニズムはパレート効率性を満足しない．ただし，コスト関数が劣モジュラ関数で，クロス単調性を満たすメカニズムの中で，社会的余剰の損失 $\gamma(\xi)$ の上限が最小となるメカニズムである．

$$\gamma(\xi) = \left(\sum_{S \subseteqq T} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} C(S) \right) - C(N)$$

3.2 限界費用価格メカニズム (Clarke-Groves Mechanism)

限界費用価格メカニズムは，公共財の供給に対する費用決定メカニズムとしてよく知られている，クラーク・グローブスメカニズム [13], [14] に基づく．限界費用価格メカニズムでは，サービスが提供されるエージェント集合はパレート効率的なエージェント集合 S^P で決定される．各エージェントの価格はクラーク・グローブスメカニズムを用いて決定される．

$$\xi_i = w(N \setminus \{i\}) - (w(N) - v_i)$$

ここで，$w(S)$ はエージェント集合 T の効用の和の最

大値を示す．

$$w(S) = \max_{S' \subseteqq S} \{ \sum_{i \in S'} v_i - C(S') \}$$

本メカニズムはパレート効率性を満たし，任意のコスト関数に対して，戦略的操作不可能性を満たす．しかしながら，費用不足が生じる．なお，不足額の上限 β は以下の式で与えられる．

$$\beta = \sup_{v \in \Re_+^n} \left[(n-1) w(N) - \sum_{i \in N} w(N \setminus \{i\}) \right]$$

さらに，コスト関数が非減少関数で劣モジュラ関数であるとき，以下の式となる．

$$\beta = \sum_{i \in N} C(N \setminus \{i\}) - (n-1) C(N)$$

3.3 平均費用価格メカニズム (Average Cost Pricing Mechanism)

平均費用価格メカニズムは，エージェントのグロス効用を考慮せずに，コストを均等配分する単純なメカニズムである．すなわち，サービスを受けることを希望するすべてのエージェントの価格は，エージェント集合 N に対してコスト $C(N)$ を人数割りして決定する．

$$\xi_i = \frac{C(N)}{n}$$

本メカニズムは，各エージェントのグロス効用を考慮せずに価格が決定される．従って，戦略的操作不可能性，パレート効率性，個人合理性を満たさない．しかしながら，コスト関数が劣モジュラ関数である場合，価格がクロス単調性を満たすため，シャプレイ値のメカニズムと同様に，個人合理性を満たさないエージェントが順次離脱していくメカニズムを用いることで，戦略的操作不可能性，個人合理性を満たす．

4. 提案メカニズム

従来，コスト関数が任意の場合において，戦略的操作不可能性と個人合理性を満たし，費用が不足することがないメカニズムは提案されていなかった．従って，本章では，これらの条件を満たすメカニズムの提案を行う．本提案メカニズムでは，まず，各エージェントに対して，費用均衡，すなわち，コストと費用の和が一致するように配分額を決定するコスト配分関数を定義する．コスト配分関数によって決定される金額に他のエージェントに与える迷惑料を税として追加して価格が決定される．

まず，はじめにコスト配分関数が費用均衡するように定義されているとき，次の不可能性定理を示す．

［定理 1］ コスト配分関数が費用均衡するように定義されているとき，

(i) このコスト配分関数に関して個人合理性制約を満す範囲で，社会的余剰を最大化するエージェント集合を常に選択し，

(ii) コスト配分関数の値に加えて，必要ならば個人合理性制約を満たす範囲で税を取り，費用超過を許容する場合，

戦略的操作不可能性を満たすメカニズムは存在しない．

［証明 1］ 以下の反例によって示す．$C(\{1,2\}) = C(\{1\}) = \alpha(1,\{1,2\}) + \alpha(2,\{1,2\})$，$C(\{2\}) = \alpha(2,\{1,2\})/2$，$\alpha(1,\{1,2\}) > 0, \alpha(2,\{1,2\}) > 0$ を仮定する．さらに，$v_1 = \alpha(1,\{1,2\}) + \alpha(2,\{1,2\})/2 + \epsilon, v_2 = \alpha(2,\{1,2\}) + \epsilon$ と仮定する．

エージェント集合 $\{1,2\}$ を選択した場合，明らかに個人合理性制約を見たし，社会的余剰は $v_1 + v_2 - C(\{1,2\}) = \alpha(2,\{1,2\})/2 + 2\epsilon$ となる．一方，エージェント集合 $\{1\}$ を選択した場合はエージェント 1 の個人合理性制約を満たさない．エージェント集合 $\{2\}$ を選択した場合，明らかに個人合理性制約を見たし，社会的余剰は $v_2 - C(\{2\}) = \alpha(2,\{1,2\})/2 + \epsilon$ となる．よって，$\{1,2\}$ が選択され，エージェント 2 の効用は $v_2 - \xi_2 \leqq v_2 - \alpha(2,\{1,2\}) = \epsilon$ となる．従って，$\xi_2 \geqq \alpha(2,\{1,2\})$ が導かれる．

一方，エージェント 2 がグロス効用を $v_2' = \alpha(2,\{1,2\}) - \epsilon$ と過少申告した場合，エージェント集合 $\{1,2\}$ はエージェント 2 の個人合理性制約を満たさない．エージェント集合 $\{1\}$ を選択した場合は，エージェント 1 の個人合理性制約を満たさない．エージェント集合 $\{2\}$ を選択した場合，明らかにエージェント 2 の個人合理性制約を満たす．よって，$\{2\}$ が選択され，エージェント 2 の個人合理性制約より $\xi_2 \leqq v_2'$ となる．従って，エージェント 2 の真の効用は $v_2 - \xi_2 \geqq v_2 - v_2' = 2\epsilon$ より，エージェント 2 は過少申告によって効用を増加できる． □

従って，この不可能性定理より，個人合理性制約を満たす範囲で社会的余剰の最大化を諦めることで，費用超過を許容し，戦略的操作不可能性と個人合理性を満たすメカニズムの提案を行うこととする．

本メカニズムのフローは次のように定義される．

（1） 全てのエージェント $i \in N$ はグロス効用を申告する．

（2） 申告されたグロス効用から，個人合理性制約を満たす範囲で社会的余剰を最大化するエージェント集合 S^* を決定する．

（3） エージェント集合 S^* に含まれるエージェント i の価格 ξ_i を決定する．

（4） 個人合理性制約を満たすエージェントに対してサービスを提供する．

次に，S^*，ξ_i の定義を述べる．まず，コスト配分関数 α を定義する．

[定義 7] コスト関数 C に対して，コスト配分関数 α を以下のように再帰的に定義する．

$$
\begin{aligned}
\alpha(i,\{i\}) &= C(\{i\}) \\
\beta(i,S) &= \max_{S'\subset S, i\in S'} \alpha(i,S') \\
\alpha(i,S) &= \begin{cases} \beta(i,S), \\ \quad \text{if } \sum_{i\in S}\beta(i,S) \geqq C(S) \\ \beta(i,S) + (C(S) - \sum_{i\in S}\beta(i,S))/|S|, \\ \quad \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\beta(i,S)$ の和が費用 $C(S)$ 以上になる場合は，$\alpha(i,S) = \beta(i,S)$ とする．そうでない場合は，不足分を均等割りで負担するということを意味する．ここでは，簡単のため，不足分は均等割りすることを仮定しているが，重み付きの比例配分等，任意の方法で割当てても以下の議論は成立する．

α の定義より，以下の不等式が成立する．

$$
\sum_{i\in S} \alpha(i,S) \geqq C(S)
$$

これは，コスト配分関数 $\alpha(i,S)$ の和が，費用 $C(S)$ をカバーできることを意味する．さらに，次の定理で，コスト配分関数 $\alpha(i,S)$ はエージェント集合 S の任意の部分集合 $S'\subseteqq S$ の費用 $C(S')$ をカバーできることを示す．

[定理 2] コスト配分関数 α は，$S'\subseteqq S$ に関して，S でのコスト配分関数の値の和が $C(S')$ 以上となる，すなわち，誰かが買わなくても部分集合 S' はサービスを受けることができる．

$$
\sum_{i\in S'} \alpha(i,S) \geqq C(S'),\quad \forall S\subseteqq N,\quad S'\subseteqq S
$$

[証明 2] α の定義より，$S'\subseteqq S$ に関して，

$$
\alpha(i,S) \geqq \alpha(i,S')
$$

が成立する．よって

$$
\sum_{i\in S'} \alpha(i,S) \geqq \sum_{i\in S'} \alpha(i,S') \geqq C(S')
$$

となり，定理 2 が成立する． □

[定義 8] エージェントの集合 $S\subseteqq N$ に対して以下を定義する．

$$
C'(S) = \sum_{i\in S} \alpha(i,S)
$$

$$
C'_{-i}(S) = C'(S) - \alpha(i,S)
$$

これは α を用いてコスト関数を再定義している．α の定義より，$C'(S) \geqq C(S)$ が成立する．

以下に，エージェント i の価格を定義する．

[定義 9] エージェント i に対して，i がサービスを受ける場合の価格 ξ_i を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\xi_i &= \alpha(i,S_i) \\
&\quad + \max\{U(S_{-i}) - C'(S_{-i}), U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i)\} \\
&\quad - \{U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i)\}
\end{aligned}
$$

第 2 項から第 3 項を引いたものがクラーク税に値するものである．

ここで，$U(S)$ をエージェントの集合 S のグロス効用の和を

$$
U(S) = \sum_{j\in S} v_j
$$

さらに，$U_{-i}(S)$ をエージェントの集合 S のエージェント i 以外のグロスの効用の和を

$$
U_{-i}(S) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} v_j
$$

とする．

また，S_i は i 以外の個人合理性制約を満たし，i が含まれるエージェント集合で i 以外の効用の和を最大化するものである．

$$
\begin{aligned}
S_i &= \\
&\arg\max_{S}\{U_{-i}(S) - C'_{-i}(S) : i\in S, \alpha(j,S) \leqq v_j, \\
&\qquad \forall j \neq i\}
\end{aligned}
$$

一方，S_{-i} は i 以外の個人合理性制約を満たし，i を

含まないエージェント集合で全員の効用の和を最大化するもの（i の効用は 0）である．

$$S_{-i} = \arg\max_{S}\{U(S) - C'(S) : i \notin S, \alpha(j,S) \leqq v_j, \forall j \neq i\}$$

以下より，サービスを受けるエージェントの集合 S^* を定義し，その集合に含まれないエージェントがサービスを受けても正の効用は得られないことを示す．

［定義 10］ S^* を全員の個人合理性制約を満たすエージェント集合の中で全員の効用の和を最大化するものとする．

$$S^* = \arg\max_{S}\{U(S) - C'(S) : \alpha(i,S) \leqq v_i, \forall i \in N\}$$

［定理 3］ S^* に含まれないエージェントはサービスを受けても正の効用は得られない．

$$\xi_i \geqq v_i, \quad \forall i \notin S^*$$

［証明 3］ $i \notin S^*$ より ξ_i の S_{-i} は S^* と一致する．

（1） $v_i \leqq \alpha(i,S_i)$ の場合，$\xi_i \geqq \alpha(i,S_i) \geqq v_i$ より，効用は負になる．

（2） $v_i \geqq \alpha(i,S_i)$ の場合，S_i は i に関する個人合理性制約を満たす．よって，

$$\begin{aligned} &U(S^*) - C'(S^*) \geqq U(S_i) - C'(S_i) \\ &= v_i + U_{-i}(S_i) - \{C'_{-i}(S_i) + \alpha(i,S_i)\} \end{aligned}$$

となる．$v_i \geqq \alpha(i,S_i)$ より，

$$U(S^*) - C'(S^*) \geqq U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i)$$

となり，税が発生する．

$$\begin{aligned} \xi_i &= \alpha(i,S_i) + \{U(S^*) - C'(S^*)\} \\ &\quad -\{U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i)\} \\ &\geqq \alpha(i,S_i) + v_i + U_{-i}(S_i) \\ &\quad -\{C'_{-i}(S_i) + \alpha(i,S_i)\} \\ &\quad -\{U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i)\} \geqq v_i \end{aligned}$$

従って，$\xi_i \geqq v_i$ より，効用は負になる．

(1)，(2) より，エージェント i の効用は常に負になるので，定理 3 が成立する． □

以下より，S^* 中のエージェントがゲームに参加した場合，費用不足にならないことを示す．

［定理 4］ S^* に含まれるエージェントの価格 ξ_i は S^* におけるコスト配分関数以上となる．

$$\xi_i \geqq \alpha(i,S^*), \quad \forall i \in S^*$$

［証明 4］ S^* は i の個人合理性制約を満たすため，$\alpha(i,S^*) \leqq v_i$ が成立する．

（1） S_i が i の個人合理性制約を満たさない場合 ($\alpha(i,S_i) \geqq v_i$)，$\xi_i \geqq \alpha(i,S_i) \geqq v_i \geqq \alpha(i,S^*)$ より，$\xi_i \geqq \alpha(i,S^*)$ が成立する．

（2） S_i が i の個人合理性制約を満たす場合 ($\alpha(i,S_i) \leqq v_i$)，

$$U(S^*) - C'(S^*) \geqq U(S_i) - C'(S_i)$$

すなわち，

$$\begin{aligned} &v_i + U_{-i}(S^*) - \{C'_{-i}(S^*) + \alpha(i,S^*)\} \\ &\geqq v_i + U_{-i}(S_i) - \{C'_{-i}(S_i) + \alpha(i,S_i)\} \qquad (1) \end{aligned}$$

が成立する．

一方，S_i の定義から，

$$U_{-i}(S^*) - C'_{-i}(S^*) \leqq U_{-i}(S_i) - C'_{-i}(S_i) \qquad (2)$$

が成立する．(1) 式，(2) 式から，$\alpha(i,S_i) \geqq \alpha(i,S^*)$ となる．さらに，$\xi_i \geqq \alpha(i,S_i)$ より，$\xi_i \geqq \alpha(i,S^*)$ となる．

(1)，(2) より，定理 4 が成立する． □

［定義 11］ ξ_i のもとで，S^* の中で効用が非負のエージェント集合を S^f とする．すなわち，以下のように定義する．

$$S^f = \{i : i \in S^*, \xi_i \leqq v_i\}$$

［定理 5］ 提案メカニズムは費用不足になることはない．

$$\sum_{i \in S^f} \xi_i \geqq C(S^f)$$

［証明 5］ 定理 4 と α の定義より，

$$\xi_i \geqq \alpha(i,S^*) \geqq \alpha(i,S^f)$$

が成立する．よって，

$$\sum_{i \in S^f} \xi_i \geqq \sum_{i \in S^f} \alpha(i,S^f) = C'(S^f)$$

となる．$C'(S^f) \geqq C(S^f)$ より，

$$\sum_{i \in S^f} \xi_i \geqq C(S^f)$$

となり，定理 5 が成立する． □

以下に，コスト関数が優モジュラ関数である場合は，コスト関数を再定義することのないコスト負担関数が存在することを示す．初めに優モジュラ関数について定義する．

[定義 12](優モジュラ関数 (super-modular function))
コスト関数が優モジュラ関数であるとは，すなわち，任意のエージェントの集合 A, B に関して，

$$C(A) + C(B) \leqq C(A \cup B) + C(A \cap B)$$

が成立することである．

優モジュラ関数のコスト関数では，例えば，二人のエージェントが同時にサービスを受ける際の費用は，一人ひとりのエージェントが個別でサービスを受ける場合の費用の和以上になる．

[定理 6] コスト関数が優モジュラ関数である場合，$S' \subseteqq S$ に関して，$\alpha(i, S') \leqq \alpha(i, S)$ で，$\sum_{i \in S} \alpha(i, S) = C(S)$ となる α が存在する．

[証明 6] コスト関数が優モジュラ関数である場合，$X \subseteqq Y, i \notin Y$ について，

$$C(X \cup \{i\}) - C(X) \leqq C(Y \cup \{i\}) - C(Y)$$

が成立する．すなわち，i の限界コストは，元の集合が大きいほど大きくなる．

ここで，$S = \{1, 2, \ldots, s\}$ とし，α を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} \alpha(i, S) &= C(\{i, i+1, \ldots, s\}) \\ &\quad - C(\{i+1, i+2, \ldots, s\}) \end{aligned}$$

これは，集合 $\{i+1, i+2, \ldots, s\}$ に関する i の限界コストである．

$$\begin{aligned} \alpha(1, S) &= C(S) - C(\{2, \ldots, s\}) \\ \alpha(2, S) &= C(\{2, \ldots, s\}) - C(\{3, \ldots, s\}) \\ &\vdots \\ \alpha(s, S) &= C(\{s\}) \end{aligned}$$

この和をとると，$\sum_{i \in S} \alpha(i, S) = C(S)$ となる．

また，$S' \subseteqq S$ について，S' 中で i より順序が後ろのエージェントの集合を S'_r，S 中で i より順序が後ろのエージェントの集合を S_r とすると，明らかに $S'_r \subseteqq S_r$ となる．

$$\begin{aligned} \alpha(i, S') &= C(S'_r \cup \{i\}) - C(S'_r) \\ \alpha(i, S) &= C(S_r \cup \{i\}) - C(S_r) \end{aligned}$$

i の限界コストは，元の集合が大きいほうが大きいため，

$$\alpha(i, S) \geqq \alpha(i, S')$$

が成立する．よって定理 6 が成立する． □

[定理 7] 提案メカニズムは戦略的操作不可能性を満たす．

[証明 7] エージェント i の費用 ξ_i は，自身のグロス効用 v_i に依存せずに決定し，定理 3 より，個人合理性制約を満たすエージェントは必ずサービスを受けることができる．よって定理 7 が成立する． □

以下，提案メカニズムの例を示す．

[例 1] エージェント $N = \{1, 2, 3\}$ が存在し，各エージェントのサービスに対するグロス効用を $v_1 = 60$, $v_2 = 50$, $v_3 = 45$ とする．さらに，任意のエージェント集合に対するコスト関数が以下で与えられる費用分担問題を考える．

- $C(\{1, 2, 3\}) = 120$
- $C(\{1, 2\}) = C(\{2, 3\}) = 60$, $C(\{3, 1\}) = 80$
- $C(\{1\}) = C(\{3\}) = 30$, $C(\{2\}) = 40$

最初に，コスト配分関数 $\alpha(i, \{i\})$ を算出する．定義より，$\alpha(1, \{1\}) = C(\{1\}) = 30$ となる．同様に，$\alpha(2, \{2\}) = 40, \alpha(3, \{3\}) = 30$ となる．

次に $\beta(i, S)(\forall i \in S, |S| = 2)$ を算出する．定義より，$\beta(1, \{1, 2\}) = \max_{S \subset \{1,2\}, 1 \in S} \alpha(1, S) = \alpha(1, \{1\}) = 30$ となる．同様に，$\beta(1, \{1, 3\}) = 30, \beta(2, \{1, 2\}) = 40, \beta(2, \{2, 3\}) = 40, \beta(3, \{1, 3\}) = 30, \beta(3, \{2, 3\}) = 30$ となる．

上記の β から，α を算出する．ここで，集合 {1,3} に関して，$\beta(1, \{1, 3\}) + \beta(3, \{1, 3\}) = 60 < 80 = C(\{1, 3\})$ となり，コスト $C(\{1, 3\})$ をカバーしてない．よって，$\alpha(1, \{1, 3\}) = \beta(1, \{1, 3\}) + (80 - (30 + 30))/2 = 40$ となる．同様に，$\alpha(3, \{1, 3\}) = 40$ となる．その他の集合に関しては，β がコストをカバーしているので，$\alpha(i, S) = \beta(i, S)$ となる．

上記を繰り返すと，

- $\alpha(1, N) = \alpha(2, N) = \alpha(3, N) = 40$
- $\alpha(1, \{1, 2\}) = 30, \alpha(1, \{1, 3\}) = 40$

表 1　メカニズムの特徴

	シャプレイ値のメカニズム	限界費用価格メカニズム	平均費用価格メカニズム	提案メカニズム
戦略的操作不可能性	△（条件付）	○	△（条件付）	○
個人合理性	○	○	○	○
パレート効率性	×	○	×	×
費用	均衡	不足	均衡	超過

- $\alpha(2, \{1,2\}) = \alpha(2, \{2,3\}) = 40$
- $\alpha(3, \{1,3\}) = 40, \alpha(3, \{2,3\}) = 30$
- $\alpha(1, \{1\}) = \alpha(3, \{3\}) = 30, \alpha(2, \{2\}) = 40$

が得られる．

結果，個人合理性制約を満たす範囲で社会的余剰を最大にするエージェント集合は $S^* = \{1,2\}$ となる．従って，エージェント 1，2 の費用は，エージェント 1 について $S_1 = \{1,2,3\}, S_{-1} = \{2,3\}$ より，$U_{-1}(S_1) - C'_{-1}(S_1) = (50+45) - (40+40) = 15$，$U(S_{-1}) - C'(S_{-1}) = (50+45) - (40+30) = 25$ が得られる．よって，エージェント 1 の支払額は $\xi_1 = 40 + (25-15) = 50$ となり，同様にエージェント 2 の支払額は $\xi_2 = 40 + (30-30) = 40$ となる．

最後に，提案メカニズムと既存メカニズムの特徴を表 1 にまとめる．シャプレイ値のメカニズムおよび平均費用価格メカニズムは，コスト関数が劣モジュラ関数のもとで，戦略的操作不可能性，個人合理性，費用均衡を満たすが，パレート効率性を満たさない．一方，限界費用価格メカニズムはコスト関数に制約を持たず，個人合理性およびパレート効率性を満たすが，費用が不足してしまう可能性がある．

5. おわりに

本論文では，費用分担問題に対してクラーク税を課すことで，任意のコスト関数に対して適用可能な，費用が不足することのない戦略的操作不可能なメカニズムを提案した．これは，一定の条件を満たすコスト配分関数に対して，そのエージェントがサービスを受けることで他の人に与える迷惑料を税として課すことによって，戦略的操作不可能性を満足している．また，個人合理性を満たさないエージェントが離脱し，サービスを受けるエージェント集合が小さくなっても，残りのエージェントで費用を賄えることを保証している．

今後の課題として，エージェントが複数のサービスを同時に受けたい場合を対象とした費用分担メカニズムの提案や，費用の超過分が少ないメカニズムの提案を行う．

文　献

[1] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos and V. V. Vazirani Eds.: "Algorithmic Game Theory", Cambridge University Press (2007).

[2] N. Ohta, V. Conitzer, Y. Satoh, A. Iwasaki and M. Yokoo: "Anonymity-proof shapley value: Extending shapley value for coalitional games in open environments", Proceedings of the 7th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, AAMAS 2008, pp. 927–934 (2008).

[3] A. Mehta, T. Roughgarden and M. Sundararajan: "Beyond moulin mechanisms", EC '07: Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce, New York, NY, USA, ACM, pp. 1–10 (2007).

[4] 鈴木："新ゲーム理論", 勁草書房 (1994).

[5] L. Hurwicz: "On the existence of allocation systems whose manipulative nash equilibria are pareto optimal: the case of one public good and one private good", Presented at the 3rd World Congress Econometric Society meetings (1975).

[6] J. Green and J.-J. Laffont: "Characterization of satisfactory mechanisms for the revelation of preferences for public goods", Econometrica, **45**, 2, pp. 427–38 (1977).

[7] R. B. Myerson and M. A. Satterthwaite: "Efficient mechanisms for bilateral trading", Journal of Economic Theory, **29**, 2, pp. 265–281 (1983).

[8] 岡田："ゲーム理論", 有斐閣 (1996).

[9] L. S. Shapley: "A value for n-person games.", Contributions to the Theory of Games, Princeton University Press, pp. 307–317 (1953).

[10] S. C. Littlechild and G. Owen: "A simple expression for the shapley value in a special case", Management science, **20**, pp. 370–372 (1973).

[11] H. Moulin and S. Shenker: "Serial cost sharing", Econometrica, **60**, 5, pp. 1009–1037 (1992).

[12] H. Moulin and S. Shenker: "Strategyproof sharing of submodular costs: Budget balance versus efficiency", Economic Theory, **18**, pp. 511–533 (2001).

[13] E. H. Clarke: "Multipart pricing of public goods", Public Choice, **2**, pp. 19–33 (1971).

[14] T. Groves: "Incentives in teams", Econometrica, **41**, pp. 617–631 (1973).