

組合せオークションのための架空名義操作不可能なメカニズムの特性

東藤 大樹^{†a)} 岩崎 敦[†] 横尾 真[†] 櫻井 祐子[†]

Characterizing False-name-proof Allocation Rules in Combinatorial Auctions

Taiki TODO^{†a)}, Atsushi IWASAKI[†], Makoto YOKOO[†], and Yuko SAKURAI[†]

Abstract. メカニズムデザインとは、複数の人間（エージェント）が何らかの社会的決定をする場合に、社会的に望ましい結果をもたらすような相互作用のルール（割当規則と支払規則）を設計することである。この分野は電子商取引の拡大にともない、経済学だけでなく、人工知能/エージェント分野でも活発に研究が行われている。その中にメカニズムの単調性に関する研究がある。この研究によって、単調性を満たす割当規則さえ見つければ、メカニズムが戦略的操作不可能となるような支払規則が存在することが示されている（実装可能性）。しかし、複数のメールアドレスを用いて不正に利益を増加させるといった架空名義操作に関する性質はほとんど検討されていない。そこで本論文では、架空名義操作に対して、割当規則が満たすべき条件を吟味する。その結果、組合せオークションメカニズムが架空名義操作不可能となる支払規則が存在するために割当規則が満たすべき条件を示した。

Keywords. 組合せオークション, メカニズムデザイン, 電子商取引

1. はじめに

インターネットオークションは電子商取引の重要な一分野であり、人工知能やエージェント技術の有効な適用領域であると考えられる。インターネットの利用により低コストで大規模なオークションが実行可能となった反面、不特定多数の人々が参加可能であることから、オークション方式（メカニズム）の設計にあたっては様々な不正行為に関する頑健性、オークション結果に関する何らかの理論的な裏付けなどが重要となる。様々なオークションメカニズムに関して、これらの性質を解明しようとする研究は経済学の一分野となっており、特にメカニズムデザイン（制度設計）と呼ばれる。

メカニズムデザインとは複数の人間（エージェント）が何らかの社会的決定をする場合に、社会的に望ましい結果をもたらすような相互作用のルールを設計することである。各エージェントは利己的であり、ルールを守ることは期待できないため、ルールを守ることが各エージェントの利益となり、その結果、社会的に望

ましい結果が得られるように、ルールを設計することが要求される。メカニズムデザインはミクロ経済学/ゲーム理論の一分野として研究が行われており、近年、人工知能/エージェントの分野でも活発な研究が行われている。

メカニズムデザインに関連した研究の一つに、メカニズムの単調性に関する研究があり、社会的選択理論の一部としても知られている。これは、相互作用のルールである社会的選択関数（オークションで言えば割当規則）を持つメカニズムにおいて、何らかの均衡が実現可能となる条件として考察されている。例えば、Rochet は周期的単調性 (cycle monotonicity) という概念を提案し、社会的選択関数がこれを満たすことがメカニズムにおいて戦略的操作不可能性を満たすための必要十分条件であることを示した [1]。また、Bikhchandani や Lavi らは弱単調性 (weak monotonicity) というよりゆるやかな概念を提案し、参加者のタイプ空間に何らかの制約がある場合、弱単調性が戦略的操作不可能性の必要十分条件であることを示している [2], [3], [4]。これらの概念はジョブスケジューリングのためのメカニズムの設計などに応用されている [5]。

従来メカニズムデザインにおいて、割当規則と支払規則をあわせて考慮してメカニズムを設計していたが、

[†]九州大学大学院 システム情報科学府
a) E-mail: todo@agent.is.kyushu-u.ac.jp

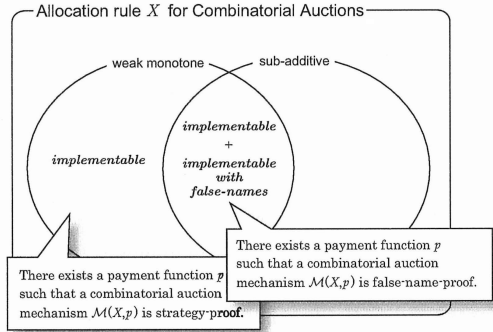


図1 劣加法性と弱単調性

こうした条件を満たすような割当規則さえ見つけることができれば、それに対応する自然な支払規則が存在することが保証される（これを実装可能性と呼ぶ）。

一方で、インターネットオークションに関連する研究の一つに組合せオークションがある [6], [7], [8]。従来のオークションでは一度に一つの財が販売されるが、組合せオークションでは価値に依存性（補完性や代替性）のある複数種類の財が同時に販売され、入札者は財の組合せ（バンドル）に対して入札する。入札者の補完的・代替的な嗜好を考慮することで、入札者の効用や主催者の利益を増加できる。インターネットは組合せオークションを行う上で非常に優れた環境を提供しているが、その匿名性により架空名義入札と呼ばれる新しい不正行為の可能性が指摘されている [9]。

架空名義入札とは、ある入札者が複数の架空名義を使ってオークションに参加し、自分の利益を大きくしようとする不正行為であり、インターネット環境において参加者を識別するのはほとんど不可能なため、防ぐことは困難である。さらに、架空名義入札が可能な場合には、個人合理性、パレート効率性、戦略的操作不可能性の三つの性質を同時に満足する組合せオークションメカニズムが存在しないことが証明されており [9]、理論的にもっとも優れているとされる Vickrey-Clarke-Groves メカニズム (VCG) [10] でさえ、架空名義入札の影響を受ける。そのため、架空名義入札の影響を受けない組合せオークションメカニズムがいくつか提案されている。しかし、決定版と呼ばれるメカニズムはまだなく、架空名義操作不可能性を特徴づける研究もほとんどなされていない。

そこで本論文では、組合せオークションメカニズム

に対象を限定し、架空名義入札に頑健なメカニズムを特徴づける性質を求める。メカニズムの割当規則に関して劣加法性という性質を定義し、割当規則が弱単調性と劣加法性を同時に満たすならばメカニズムが架空名義操作不可能となるように支払規則を設定できることを示す。図1はその概略図である。

本論文の構成を以下に示す。まず第2章で準備としてモデルを定義し、従来から提案されている概念について概説する。第3章では、メカニズムの割当規則に関して劣加法性という性質を定義するとともに、メカニズムが架空名義操作不可能となるための必要十分条件を示す。最後に第4章で結論と今後の課題を述べる。

2. 準備

本章では、組合せオークションのための架空名義操作不可能なメカニズムの記法について述べる。入札者の集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 、財の集合を G としたときの組合せオークションメカニズム \mathcal{M} は財の割当規則 $X : \Theta^n \rightarrow A$ 、支払規則 $p : \Theta^n \rightarrow \mathcal{R}$ から構成される。ここで、 Θ は入札者の選好（タイプ）の全体集合とし、 A は財の可能な割当ての集合とする。さらに、割当規則 X の出力となる入札者に対する財の割当て $a_i \subseteq G$ ($\forall i, \forall i \neq j, a_i \cap a_j = \emptyset$) は、 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ と定義する。

各入札者は他の入札者の評価値とは独立したタイプを財に対して持つ。これを個人価値のオークション [10] と呼ぶ。ここで、入札者 i への財の割当て $a_i \subseteq G$ に対する評価値は、タイプ $\theta_i \in \Theta$ を用いて $v(\theta_i, a_i)$ で表現する。また、タイプ θ_i を持つ入札者 i が a_i を獲得し、 p を支払った場合の効用を $v(\theta_i, a_i) - p$ と定義する（このような効用は準線形 [10] と呼ばれる）。

本論文では、議論を簡単にするため、シングルエージェントモデル [2] を導入する。これは、全ての入札者それぞれについて考慮するのではなく、 i 以外の $n-1$ 人の入札者のタイプを固定し、入札者 i に限定して考慮するモデルである。これにより、入札者 i のタイプおよび i が申告するタイプ（入札）に集中して、割当規則および支払規則を扱うことが出来る。

例えば、全ての入札者それぞれについて考慮する場合、割当規則の引数は全ての入札者が申告したタイプとなる。即ち、入札者 i の申告を θ_i とし、 i 以外の入札者の申告のベクトルを θ_{-i} と表すとき、入札者 i への財の割当てを $X(\theta_i, \theta_{-i})$ と表記する。しかし、シングルエージェントモデルを導入して入札者 i が申告する

タイプに集中することで、 $X(\theta_i, \theta_{-i})$ を $X(\theta_i)$ と簡単に表記できる。なお、支払規則 $p(\theta_i)$ についても同様に扱う。以降ではとくに断らない限り、 i 以外の入札者の申告は省略して表記する。

まず、メカニズムの流れを概説する。各入札者 $i \in N$ は自分のタイプ $\tilde{\theta}_i$ を申告する（真のタイプ θ_i を申告するとは限らない）。メカニズム \mathcal{M} は申告されたタイプにもとづき、割当規則 $X(\tilde{\theta}_i)$ および支払規則 $p(\tilde{\theta}_i)$ から財の割当てと支払額を決定する。

次に、組合せオークションにおける入札者のタイプに関して述べる。入札者のタイプはタイプ空間と呼ばれるタイプの集合 Θ から決定される。メカニズムの性質を議論する上で、 Θ の定義、および Θ からどのように入札者のタイプのインスタンスを取り出すかは重要である。実際、組合せオークションも含んだ広義のメカニズムを議論するには、メカニズムの参加者のタイプに関してより精緻な定義が必要となる。

しかし、本論文では、メカニズムの対象を組合せオークションに限定するため、入札者のタイプに関しては以下の3つを定義するだけでよい。

- 非外部性 (no externalities): 入札者 i の効用は、 i に割り当てられるセットによってのみ決定され、他の入札者への割当には影響されない。
- 自由可処分性 (free disposal): 得た財を処分するための費用はゼロである。即ち、2つのセット $a_i, a'_i \in A$ について、 $a_i \subseteq a'_i$ ならば $v(\theta, a_i) \leq v(\theta, a'_i)$ である。
- 正規化 (normalization): 財を得ない場合の効用はゼロである。 $v(\theta, \emptyset) = 0$ 。

メカニズムデザインにおいてメカニズム設計者は、社会的に望ましい性質を満たすようにメカニズムを設計する。ここで、社会的に望ましい性質には、メカニズム設計者の意図によって様々な観点が存在する。例えば、個人合理性、予算制約、戦略的操作不可能性、架空名義操作不可能性といった制約条件やパレート効率性（社会的余剰最大化）、収入最大化などの目的関数が存在する。本章では、個人合理性、戦略的操作不可能性、および架空名義操作不可能性を定義する。

定義 1 (個人合理性 (individual rationality)). 任意のタイプ $\theta \in \Theta$ に関して、

$$v(\theta, X(\theta)) - p(\theta) \geq 0$$

が成立するとき、このメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は個人合

理性を満たすという。

これは、オークションに参加して θ を申告した入札者の効用が、オークションに参加しない場合の効用（即ちゼロ）より大きくなることを意味する。もしこれが保証されなければ、入札者は損をする可能性が生じるため、オークションに参加しないことがありうる。

定義 2 (戦略的操作不可能性 (strategy-proofness)). 任意の 2 タイプ $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ に関して、

$$v(\theta, X(\theta)) - p(\theta) \geq v(\theta, X(\tilde{\theta})) - p(\tilde{\theta}) \quad (1)$$

が成立するとき、このメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は戦略的操作不可能性を満たすという。

これは入札者が真のタイプ θ を正直に申告した方がどのようなタイプ $\tilde{\theta}$ を申告するよりも効用が常により大きくなることを意味する。即ち、正直に自身の真のタイプを入札することが支配戦略になる。

次に、メカニズムが戦略的操作不可能となるために割当規則を満たすべき性質として、割当規則の実装可能性 (implementability) を概説する。実装可能性は従来から社会選択理論において研究されている。これは、ある社会選択関数（割当規則）を持つメカニズムにおいて、何らかの均衡が実現可能であるための条件として従来から考察されている。

定義 3 (実装可能性 (implementability)). 任意の 2 タイプ $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ に関して、式 1 が成立するような支払規則 p が存在するとき、メカニズム \mathcal{M} の割当規則 X は支払規則 p によって実装可能 (implementable) であるという。

これはメカニズム \mathcal{M} の割当規則に対して、式 1 が与える戦略的操作不可能性を満たすような支払規則を設定できるならば、メカニズム \mathcal{M} において、入札者は真のタイプを正直に申告することを支配戦略にできることを意味する。割当規則が実装可能となるための代表的な性質として、次に述べる弱単調性 [2] がある。

定義 4 (弱単調性 (weak monotonicity)). 任意の 2 タイプ $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ に関して、

$$v(\theta, X(\theta)) - v(\theta, X(\tilde{\theta})) \geq v(\tilde{\theta}, X(\theta)) - v(\tilde{\theta}, X(\tilde{\theta})) \quad (2)$$

が成立するとき、この割当規則 X は弱単調性を満たすという。

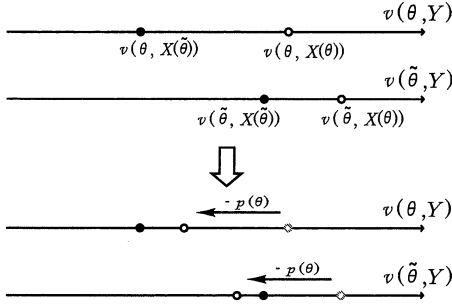


図 2 割当規則の弱単調性

ここで、実装可能性と弱単調性の関係について説明する。図 2 に、2 つのタイプ $\theta, \tilde{\theta}$ に対して弱単調性が成立している例を示す。図 2 の横軸は、あるタイプ θ もしくは $\tilde{\theta}$ を持つ入札者がある割当 Y を獲得した場合の評価値を表す。今、 θ については真のタイプを申告する方が効用が高くなるが、 $\tilde{\theta}$ については嘘のタイプを申告した場合の効用の方が高くなる（図 2 の上部）。ここで、 θ を申告した場合の支払額 $p(\theta)$ を、 $v(\tilde{\theta}, X(\theta)) - v(\tilde{\theta}, X(\tilde{\theta})) \leq p(\theta) \leq v(\theta, X(\theta)) - v(\theta, X(\tilde{\theta}))$ を満たすように導入すると、 $\tilde{\theta}$ の入札者にとっても真のタイプを申告する方が効用が高くなる（図 2 の下部）。このように、 $\theta, \tilde{\theta}$ にとって戦略的操作不可能となるような支払規則を定めることができる。即ち、割当規則が実装可能となる。

さらに、組合せオークションメカニズムの割当規則が弱単調性を満たすことがメカニズムにおける戦略的操作不可能性（実装可能性）の必要十分条件であることが [2] により証明されている。

定理 1 (Bikhchandani, et al. [2]). 組合せオークションメカニズムの割当規則 X が実装可能となるための必要十分条件は、 X が弱単調性を満たすことである。

言いかえると、割当規則が弱単調性を満たすように設計すれば、その割当規則を持つメカニズムが戦略的操作不可能となるような支払規則を必ず定めることができる。このため、メカニズム設計者が戦略的操作不可能なメカニズムを設計したい場合、割当規則が弱単調性を満たすか否かについてのみ考慮すればよく、弱単調性は戦略的操作不可能なメカニズムを設計する上で、非常に強力な性質となっている。

しかし、架空名義操作不可能性を満たすメカニズムを弱単調性のような性質を用いて特徴付ける試みはこ

れまで行われていない。そこで本論文では、架空名義操作不可能なメカニズムを特徴付ける性質を提案する。

架空名義操作を定式化するには、オークションに参加する入札者の集合が不定となる点が問題となる。架空名義操作を考慮しない場合、入札者の集合 N のみに対してメカニズムがどのように機能するかを考慮すればよい。しかし、例えば、入札者 i が 2 つの架空名義 id_1, id_2 を用いた場合、メカニズムを設計するには、入札者の集合 N だけでなく、架空名義を含んだ $N \setminus \{i\} \cup \{id_1, id_2\}$ も考慮する必要が生じる。このとき、割当規則や支払規則の結果は単に真のタイプと異なるタイプを申告した場合と異なる結果を与える。

入札者 i が 2 つの架空名義 id_1, id_2 を用いる場合を例に挙げ、架空名義操作に関係する規則を区別することを考える。まず、ある入札者 i が θ_i を入札したときの割当および支払はそれぞれ、 $X(\theta_i, \theta_{-i})$ 、 $p(\theta_i, \theta_{-i})$ となる。次に、入札者 i が 2 つの架空名義 id_1, id_2 を用いる場合を考える。ここで、名義 id_1 に与えられる割当および支払額は $X(\theta_{id_1}, \theta_{-i} \cup \{\theta_{id_2}\})$ 、 $p(\theta_i, \theta_{-i} \cup \{\theta_{id_2}\})$ となる。本論文ではこれらを $X_{+\theta_{id_2}}(\theta_{id_1})$ および $p_{+\theta_{id_2}}(\theta_{id_1})$ と表記する。同様に、 id_2 に関して、 $X(\theta_{id_2}, \theta_{-i} \cup \{\theta_{id_1}\}) = X_{+\theta_{id_1}}(\theta_{id_2})$ 、 $p(\theta_{id_2}, \theta_{-i} \cup \{\theta_{id_1}\}) = p_{+\theta_{id_1}}(\theta_{id_2})$ とする。

これを一般化して、入札者 i が k 個の架空名義 $\theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_{k-1}}, \dots, \theta_{id_k}$ を利用する場合に拡張すると、任意のある架空名義 id_l からタイプ θ_{id_l} を申告する場合の割当規則は $X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) = X(\theta_{id_l}, \theta_{-i} \cup I_{-l}^k)$ となる。ただし、 $I_{-l}^k = \bigcup_{j \neq l}^k \theta_{id_j}$ とする。同様に支払規則は $p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) = p(\theta_{id_l}, \theta_{-i} \cup I_{-l}^k)$ となる。以上をもとに架空名義操作不可能性を定義する。

定義 5 (架空名義操作不可能性 (false-name-proofness)). 任意の $k + 1$ 個のタイプ $\theta, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_{k-1}}, \dots, \theta_{id_k}$ に関して

$$\begin{aligned} & v(\theta, X(\theta)) - p(\theta) \\ & \geq v(\theta, \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})) - \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) \end{aligned} \quad (3)$$

が成立するとき、このメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は架空名義操作不可能性を満たすという。

これは、入札者 i がただ 1 つの名義を用いてタイプを申告したときの利益が、 k 個の架空名義を用いて、タイプを分割して申告したときの利益より常に大きくなることを意味する。

3. 架空名義操作に対する実装可能性と劣加法性

本章では、組合せオークションメカニズムが架空名義操作不可能となるために割当規則が満たすべき性質として、劣加法性を提案する。まず、架空名義を利用して割り当てられる財が、架空名義を用いず真のタイプを申告して割り当てられる財と同一である場合に限定して、弱架空名義操作不可能性および架空名義に対する実装可能性を定義する。続いて、組合せオークションメカニズムの割当規則が弱単調性と劣加法性を同時に満たすことが、(割当が同一でない場合も含めて) 架空名義操作に対して実装可能となるための必要十分条件となることを示す。

入札者が架空名義を利用したとき、効用を増加させたい場合、架空名義を利用する前と後での割当がどうなるかを考える必要がある。そこで、架空名義を利用して割り当てられる財と、架空名義を用いず真のタイプを申告して割り当てられる財が同一となる場合から始める。これは、割当が変わらない場合に限定することで、支払額の変化のみを考慮して架空名義による効用の増減を議論するためである。

定義 6 (弱架空名義操作不可能性). $X(\theta) = \bigcup_{i=1}^k X_{+I_i^k}(\theta_{id_i})$ を満たすような任意の $k+1$ タイプ $\theta, \theta_{id_1}, \theta_{id_2}, \dots, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}$ に関して、式 3 が成立するとき、このメカニズム $\mathcal{M}(X, p)$ は弱架空名義操作不可能性を満たすという。

式 3 の左辺は入札者が正直にタイプ θ を申告した場合の効用を、右辺はその入札者が k 個の架空名義 id_1, id_2, \dots, id_k を用いてタイプ $\theta_{id_1}, \theta_{id_2}, \dots, \theta_{id_k}$ を申告した場合の効用を表している。

ここで定義した弱架空名義操作不可能性は、全く同じ財を獲得する場合に限定している点で弱い条件である。しかし、弱架空名義操作不可能性と戦略的操作不可能性とをあわせることで、架空名義を利用する前後で割り当てられる財が変化するような場合でも、架空名義操作不可能性を保証することができる。

定理 2. あるメカニズムが戦略的操作不可能性と弱架空名義操作不可能性を同時に満たすことは、架空名義操作不可能性を満たすことと同値である。

これは戦略的操作不可能性を満たすメカニズムに限定すれば、弱架空名義操作不可能性と架空名義操作不

可能性とは同値となることを意味する。この証明に入る前に次の定義を導入する。

定義 7 (消費者主権). 任意の入札者にとって、他の入札者の申告に関わらず、その財のセットを獲得できるような十分大きな評価値が存在する。

この定義は、ある財のセットに対して十分大きな入札をするならば、入札者はその財を獲得できることを意味する。Consumer sovereignty [11] や Player decisiveness [3] とも呼ばれる。定義 7 を仮定した上で、定理 2 を以下に証明する。

証明. 架空名義操作不可能ならば、戦略的操作不可能かつ弱架空名義操作不可能であることは明らかである。そこで、戦略的操作不可能性と弱架空名義操作不可能性を前提とし、架空名義操作可能であると仮定して矛盾を導く。

タイプ θ を持つ入札者が k 個の架空名義を用いてタイプ $\theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}$ を申告したとき、メカニズムが架空名義操作不可能性を満たさない、即ち、式 3 の逆が成立すると仮定する。

定義 7 より、 $X(\theta') = \bigcup_{i=1}^k X_{+I_i^k}(\theta_{id_i})$ を満たすような θ' が存在するため、弱架空名義不可能性より、 $p(\theta') \leq \sum_{i=1}^k p_{+I_i^k}(\theta_{id_i})$ が成立する。 θ に関して定義 2 より

$$\begin{aligned} v(\theta, X(\theta)) - p(\theta) &\geq v(\theta, X(\theta')) - p(\theta') \\ &\geq v(\theta, X(\theta')) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k p_{+I_i^k}(\theta_{id_i}) \\ &= v(\theta, \bigcup_{i=1}^k X_{+I_i^k}(\theta_{id_i})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k p_{+I_i^k}(\theta_{id_i}) \end{aligned}$$

となり、式 3 の逆が成立する、という仮定に矛盾する。よって定理 2 が示される。□

定理 2 より、戦略的操作不可能なメカニズムに限定すれば、弱架空名義操作不可能性のみを扱っても、架空名義操作不可能性を同時に扱うこととなる。よって、以降では弱架空名義操作不可能性に限定して議論する。

次に、メカニズムが弱架空名義操作不可能となるために割当規則が満たすべき性質として、架空名義に対する実装可能性を定義する。

定義 8 (架空名義に対する実装可能性 (implementability with false-names)). $X(\theta) =$

$\bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ を満たす任意の $k+1$ タイプ $\theta, \theta_{id_1}, \theta_{id_2}, \dots, \theta_{id_l}, \dots, \theta_{id_k}$ に関して、式 3 が成立するような支払規則 p が存在するとき、この割当規則 X は架空名義に対して実装可能であるという。

この定義は、メカニズム \mathcal{M} の割当規則に対して、式 3 が与える弱架空名義操作不可能性を満たすような支払規則を設定できるならば、メカニズム \mathcal{M} は入札者に架空名義を使う誘因を与えないことを意味する。ここから架空名義に対する実装可能性を示す性質である劣加法性が導入できる。

定義 9 (劣加法性 (sub-additivity)). 任意の正の整数 k と、 $X(\theta) = \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ を満たす任意の $\theta, \theta_{id_1}, \theta_{id_2}, \dots, \theta_{id_l}, \dots, \theta_{id_k}$ に関して、

$$\begin{aligned} \forall \theta_0 \quad \text{where} \quad & v(\theta_0, X(\theta_0)) = 0, \\ \forall \theta_l \quad \text{where} \quad & \begin{cases} X_{+I_{-l}^k}(\theta_l) \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}), \\ v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_l)) \\ = v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})), \end{cases} \\ & (l = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

$$v(\theta_0, X(\theta)) \leq \sum_{l=1}^k v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})) \quad (4)$$

が成立するとき、この割当規則 X は劣加法性を満たすという^(注1)。

この定義の直観的な意味は以下の通りである。まず、弱架空名義実装可能性は架空名義の利用によって同じ財が得られる場合に限定しているため、式 3 において $v(\theta, X(\theta)) = v(\theta, \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$ となる。よって、支払規則は $p(\theta) \leq \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ を満たさなければならない。この $p(\theta)$ は、割当て $X(\theta)$ に対して効用が 0 となるようなタイプ θ_0 の中で最大となる評価値を表している。実質、割当て $X(\theta)$ を獲得できない (オークションに負ける) 入札者の中で最大の評価値となっている。一方で、式 4 の右辺は、架空名義の利用により入札者の数が増えた状況において、 $X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ を含む財を獲得できるようなタイプの中の評価値の最小値となっている。つまり、架空名義を利用した場合の割当てを少なくとも獲得できる入札者

(注1)：一般に劣加法性は式 4 のように、引数を分割した値の総和が分割する前の値より大きくなる場合のことをいう。本論文では、架空名義操作に対する実装可能性を示すための条件として、新たに式 4 を導入している。

の中で最小の評価値をそれぞれの架空名義に対して和をとった値となっている。

弱単調性と劣加法性をあわせて用いることで、次の定理が得られる。

定理 3. 組合せオークションにおける割当規則 X が実装可能、かつ、架空名義に対して実装可能となるための必要十分条件は、 X が弱単調性と劣加法性を同時に満たすことである。

定理 1 では、割当規則が弱単調性を満たす場合、またその場合に限り、メカニズムが戦略的操作不可能性を満たすように支払規則 p を設定できることを示している。本定理は、割当規則が弱単調性と劣加法性を満たす場合、またその場合に限り、メカニズムが戦略的操作不可能、かつ弱架空名義操作不可能となる支払規則 p を設定できることを示している。以降の節では、必要条件と十分条件に分けてこの定理を証明する。

3.1 必要性の証明

補題 1. 割当規則 X が実装可能、かつ架空名義に対して実装可能ならば、 X は弱単調性と劣加法性を同時に満たす。

証明. すでに定理 1 において、割当規則 X が実装可能ならば弱単調性が成立することが示されているため、割当規則 X が実装可能、かつ架空名義に対して実装可能ならば劣加法性が成立することを示せばよい。そのため、式 4 の逆が成立すると仮定して矛盾を導く。即ち実装可能、かつ架空名義に対して実装可能な割当規則 X に対して、 $X(\theta) = \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ のもとで劣加法性を満たさない $\theta, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}$ が存在すると仮定する。

θ_0 の定義および式 1 より $v(\theta_0, X(\theta_0)) = 0$ および $p(\theta_0) = 0$ が成立する。 θ_0 は実装可能性を満たすので、これらを式 1 に代入すると、

$$v(\theta_0, X(\theta)) \leq p(\theta) \quad (5)$$

が成立する。

$\theta, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}$ は $X(\theta) = \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ のもと、架空名義に対する実装可能性を満たすので、式 3 より、

$$p(\theta) \leq \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) \quad (6)$$

が成立する。

次に、 $p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) = p_{+I_{-l}^k}(\theta_l)$ が成立することを

示す。まず、 θ_l ($l = 1, 2, \dots, k$) は実装可能性を満たすので、これらを式 1 に代入すると、 $p_{+I_{-l}^k}(\theta_l) \leq p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ が成立する。

同様に、 θ_{id_l} ($l = 1, 2, \dots, k$) も実装可能性を満たす。ここで定義より $X_{+I_{-l}^k}(\theta_l) \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ であるから、自由可処分性の仮定より $v(\theta_{id_l}, X_{+I_{-l}^k}(\theta_l)) \geq v(\theta_{id_l}, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$ 。それゆえ、式 1 より、 $p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) \leq p_{+I_{-l}^k}(\theta_l)$ が成立する。以上より、 $p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) = p_{+I_{-l}^k}(\theta_l)$ となるため、

$$\sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) = \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_l)$$

が成立する。

最後に、定義 1 と 9 より任意のタイプ θ_l は

$$p_{+I_{-l}^k}(\theta_l) \leq v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_l)) = v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$$

を満たすので、

$$\sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_l) \leq \sum_{l=1}^k v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})) \quad (7)$$

が成立する。式 5, 6, 7 より、

$$v(\theta_0, X(\theta)) \leq \sum_{l=1}^k v(\theta_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$$

を導くことができ、これは劣加法性を満たさないという仮定に矛盾する。以上より補題 1 が証明された。□

3.2 十分性の証明

補題 2. 割当規則 X が弱単調性と劣加法性を同時に満たすならば、 X は実装可能、かつ架空名義に対して実装可能である。

証明. すでに定理 1 において、割当規則 X が実装可能ならば弱単調性が成立することが示されているため、割当規則 X が弱単調性と劣加法性を満たすならば、架空名義に対して実装可能となることを示せばよい。

そこで、弱単調性と劣加法性を満たす割当規則 X が架空名義に対する実装可能性を満たさないと仮定し、矛盾を導く。即ち、どのように支払規則 p を定めたとしても、架空名義 $\theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}$ の利用によって効用を増加できるタイプ θ が存在すると仮定する：

$$\begin{aligned} & \forall p, \\ & \exists(\theta, \theta_{id_1}, \dots, \theta_{id_k}) \text{ s.t. } X(\theta) = \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}), \\ & v(\theta, X(\theta)) - p(\theta) \\ & > v(\theta, \bigcup_{l=1}^k X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})) - \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}). \end{aligned}$$

これより、 $p(\theta) > \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ となるので、

$$p(\theta) - \gamma = \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) \quad (8)$$

を満たすような $\gamma (> 0)$ を定めることができる。

矛盾を導くために、 $0 < \epsilon < \frac{\gamma}{k+1}$ を満たす十分小さい ϵ を用いて、以下のような $k+1$ 個のタイプを考える。まず、

$$v(\bar{\theta}_0, Y) = \begin{cases} p(\theta) - \epsilon & \text{if } Y \supseteq X(\theta), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を満たすような $\bar{\theta}_0$ を導入する。次に、任意の $l = (1, \dots, k)$ に対して、

$$v(\bar{\theta}_l, Y) = \begin{cases} p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) + \epsilon & \text{if } Y \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

満たすような $\bar{\theta}_l$ を導入する。これらの $k+1$ 個のタイプが劣加法性の前提を満たすことは付録の補題 3 および 4 で証明する。

これらの θ_0 および θ_l について、劣加法性より、

$$v(\bar{\theta}_0, X(\theta)) \leq \sum_{l=1}^k v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$$

が成立する。これに θ_0 および θ_l の定義を代入すると、

$$p(\theta) \leq \sum_{l=1}^k p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) + (k+1)\epsilon \quad (9)$$

を得る。

ここで式 8 を式 9 に代入すると $\gamma \leq (k+1)\epsilon$ となり、 $\epsilon < \frac{\gamma}{k+1}$ に矛盾する。以上より、補題 2 が証明された。□

補題 1 および 2 より、定理 3 が証明された。よって、定理 2 および 3 より、割当規則が弱単調性と劣加法性を満たす場合、またその場合に限り、メカニズムが架空名義操作不可能性を満たすような支払規則 p を設定できることが示された。

4. おわりに

本論文では、組合せオークションメカニズムの割当規則が満たすべき性質として劣加法性を提案した。また、組合せオークションメカニズムの割当規則が弱単調性と劣加法性を満たすことが、組合せオークション

メカニズムが架空名義操作不可能となるための必要十分条件であることを示した。これは、架空名義操作不可能性を満たす組合せオークションメカニズムを特徴づけるという、従来行われていなかった試みである。この成果を用いて、既存の組合せオークションメカニズムが架空名義操作不可能性を満たすか否かの評価を比較的容易に行うことが可能となる。

以降では、今後の研究課題について述べる。まず、本研究で提案した劣加法性を用い、既存の組合せオークションメカニズムの評価をすることが必要である。また、組合せオークションに限定しない一般のオークションメカニズムや、より広義な一般のメカニズムに対して、架空名義操作不可能性のための必要十分条件を拡張する。複数のエージェントの共謀に対して頑健なメカニズムを特徴づける割当規則の性質を求めることも重要な課題である。

文 献

- [1] J.-C. Rochet: "A necessary and sufficient condition for rationalizability in a quasi-linear context", *Journal of Mathematical Economics*, **16**, 2, pp. 191–200 (1987).
- [2] S. Bikhchandani, S. Chatterji, R. Lavi, A. Mu'alem, N. Nisan and A. Sen: "Weak monotonicity characterizes deterministic dominant-strategy implementation", *Econometrica*, **74**, 4, pp. 1109–1132 (2006).
- [3] R. Lavi, A. Mu'alem and N. Nisan: "Towards a characterization of truthful combinatorial auctions", *FOCS*, IEEE Computer Society, pp. 574–583 (2003).
- [4] A. Mu'alem and M. Schapira: "Mechanism design over discrete domains", *EC '08: Proceedings of 9th ACM Conference on Electronic Commerce*, ACM, pp. 31–37 (2008).
- [5] R. Lavi and C. Swamy: "Truthful mechanism design for multi-dimensional scheduling via cycle monotonicity", *EC '07: Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce*, ACM, pp. 252–261 (2007).
- [6] S. de Vries and R. V. Vohra: "Combinatorial auctions: A survey", *INFORMS Journal on Computing*, **3**, pp. 284–309 (2003).
- [7] B. Rastegari, A. Condon and K. Leyton-Brown: "Revenue monotonicity in combinatorial auctions", *AAAI*, AAAI Press, pp. 122–127 (2007).
- [8] S. Dobzinski and M. Sundararajan: "On characterizations of truthful mechanisms for combinatorial auctions and scheduling", *EC '08: Proceedings of 9th ACM Conference on Electronic Commerce*, ACM, pp. 38–47 (2008).
- [9] M. Yokoo, Y. Sakurai and S. Matsubara: "The Effect of False-name Bids in Combinatorial Auctions: New Fraud in Internet Auctions", *Games and Economic*

Behavior, **46**, 1, pp. 174–188 (2004).

- [10] A. Mas-Colell, M. D. Whinston and J. R. Green: "Microeconomic Theory", Oxford University Press (1999).
- [11] C. Borgs, J. T. Chayes, N. Immorlica, M. Mahdian and A. Saberi: "Multi-unit auctions with budget-constrained bidders", *EC '05: Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic Commerce*, ACM, pp. 44–51 (2005).

付 録

補題 3. $\bar{\theta}_0$ は定義 9 に含まれる $v(\bar{\theta}_0, X(\bar{\theta}_0)) = 0$ を満たす。

証明. $\bar{\theta}_0$ の定義より、常に $X(\bar{\theta}_0) \not\subseteq X(\theta)$ となることが示せればよい。そこで、 $X(\bar{\theta}_0) \supseteq X(\theta)$ と仮定して矛盾を導く。

定義 1 と $\bar{\theta}_0$ の定義より、

$$\begin{aligned} p(\bar{\theta}_0) &\leq v(\bar{\theta}_0, X(\bar{\theta}_0)) \\ &= p(\theta) - \epsilon \end{aligned}$$

が成立する。

また、 θ は自由可処分性を満たすので、 $X(\bar{\theta}_0) \supseteq X(\theta)$ より、 $v(\theta, X(\bar{\theta}_0)) \geq v(\theta, X(\theta))$ となる。これを式 1 に代入すると

$$p(\theta) \leq p(\bar{\theta}_0)$$

が成立する。したがって、

$$p(\theta) \leq p(\bar{\theta}_0) \leq p(\theta) - \epsilon$$

となり、 $\epsilon > 0$ の仮定に矛盾する。以上より、 $\bar{\theta}_0$ は常に $X(\bar{\theta}_0) \not\subseteq X(\theta)$ となる。したがって、 $\bar{\theta}_0$ は $v(\bar{\theta}_0, X(\bar{\theta}_0)) = 0$ を満たす。□

補題 4. 任意の $l = 1, \dots, k$ に対する $\bar{\theta}_l$ は定義 9 に含まれる $X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l) \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ および $v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l)) = v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$ を満たす。

証明. $\bar{\theta}_l$ の定義より、常に $X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l) \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ となることが示せればよい。そこで、 $X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l) \not\subseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ を仮定して矛盾を導く。

$\bar{\theta}_l$ は定義 3 を満たすので、定義 1 と $\bar{\theta}_l$ の定義から、

$$\begin{aligned} p_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}) &\geq v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})) \\ &= p_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l) + \epsilon \end{aligned}$$

となり、 $\epsilon > 0$ に矛盾する。以上より、 $\bar{\theta}_l$ は常に $X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l) \supseteq X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l})$ となる。したがって、 $\bar{\theta}_l$ は $v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\bar{\theta}_l)) = v(\bar{\theta}_l, X_{+I_{-l}^k}(\theta_{id_l}))$ を満たす。□