

代用電荷法に基づく双方向的な 数値等角写像の方法†

天 野 要†

等角写像の数値計算法すなわち数値等角写像の方法は、数値解析の課題のひとつとして古くから研究され、近年、再び注目を集めている。それらは、与えられた問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に、標準領域から問題領域への写像を求める方法とに大別される。いずれの場合にも有効な方法はまだ知られていない。本論文では代用電荷法に基づいて双方向的な数値等角写像の方法を提案する。その原理は、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの実部と虚部の 1 次結合で近似して、まず問題領域から標準領域への近似写像関数を構成し、得られた境界上の対応関係を用いて、標準領域から問題領域への近似写像関数を同じ方法で逆写像として再構成するというものである。この方法は問題領域と標準領域との間の双方向の等角写像をまったく同一のアルゴリズムで簡単かつ高精度に計算することができる。このとき、非線形の反復収束計算は不要である。また、正則関数の最大値の原理により、境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価が可能である。ここでは、与えられた Jordan 領域と単位円内部との間の等角写像を扱う。しかし、提案される方法の原理は外部領域や 2 重連結領域の問題にも適用可能である。

1. はじめに

等角写像¹⁾は関数論の基本的な問題のひとつであり、応用も広い。しかし、その写像関数を初等関数で記述できる場合は限られている。したがって、等角写像の数値計算法すなわち数値等角写像の方法は、数値解析の課題のひとつとして古くから研究され²⁾、近年、再び注目を集めている^{3), 4)}。

数値等角写像の方法は、与えられた問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に、標準領域から問題領域への写像を求める方法とに大別される。いずれの場合にも境界対応関数を未知量とする積分方程式に帰着させる方法が主流である。しかし、従来、両者は比較的独立に研究され、いずれの場合にも有効な方法はまだ知られていない。問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像の双方に適用できる方法の開発は数値等角写像における重要な課題のひとつである。

一般的に、問題領域から標準領域への等角写像の場合には、積分方程式は線形である。Symm の積分方程式に基づく方法⁵⁾⁻⁷⁾が代表的である。これは、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界対応関数の導関数であるソース密度を未知量

とした第 1 種 Fredholm 型の線形特異積分方程式の問題に帰着させ、それを階段関数近似で離散化して解いたものである。その後、スプライン関数 (区分的多項式) 近似⁸⁾⁻¹⁰⁾による精度の向上や、特異関数の導入^{9), 10)}による境界上の角点の特異性処理などの改良がなされている。しかし、この系列の方法は標準領域から問題領域への写像の計算には適していない。なお、この場合の計算量は通常 $O(N^2)$ (N は離散化数) である。

これに対して、標準領域から問題領域への等角写像の場合には、積分方程式は非線形であり、共役作用素を含む Theodorsen の積分方程式に基づく方法¹¹⁾⁻¹³⁾が代表的である。これは、等角写像の問題を逆境界対応関数を未知量とした非線形積分方程式の問題に帰着させ、それをさまざまな反復法で解いたものである。反復の各段階では、離散化された共役周期関数の計算に高速 Fourier 変換が用いられる¹⁴⁾。しかし、この系列の方法¹⁵⁾は問題領域から標準領域への写像の計算には適していない。なお、この場合の計算量は 1 回の反復あたり $O(N \log N)$ である。

現在、数値等角写像がさまざまな分野でその可能性にふさわしく利用されているとは言い難い。最大の理由は、従来の方が難解で、しかも、問題領域から標準領域への写像と標準領域から問題領域への写像の計算に異なる 2 種のアルゴリズムを必要とすることであろう。数学ソフトウェアもほとんど存在していない。これらは数値等角写像の研究がまだ発展途上にあることを示している。

† A Bidirectional Method for Numerical Conformal Mapping Based on the Charge Simulation Method by KANAME AMANO (Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Ehime University).

† 愛媛大学工学部応用数学教室

代用電荷法¹⁶⁾に基づいて、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの実部と虚部の 1 次結合で近似して、与えられた Jordan 領域、その外部、または有界な 2 重連結領域から、それぞれ、単位円の内部、その外部、または円環領域への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる¹⁷⁾⁻¹⁹⁾。これに Newton 法を適用すれば、逆写像を比較的簡単に計算することも可能である^{20), 21)}。しかし、この方法は、他の多くの方法と同様に、標準領域から問題領域への写像に反復収束計算が必要である。

本論文では、この代用電荷法に基づいて、双方向的な数値等角写像の方法を提案する。すなわち、与えられた Jordan 領域から単位円内部への等角写像と単位円内部から与えられた Jordan 領域への等角写像がまったく同一のアルゴリズムで簡単かつ高精度に計算できることを示す。その原理は、まず問題領域から標準領域への近似写像関数を構成し、得られた境界上の対応関係を用いて、標準領域から問題領域への近似写像関数を同じ方法で逆写像として再構成するというものである。この数値等角写像の方法は、従来の方法と比較して、次のような著しい特徴を備えている。

(a) 問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像をまったく同一のアルゴリズムで計算することができる。

(b) 非線形の反復収束計算が不要である。

しかも、原理とプログラミングが簡単であり、数値積分が不要で計算量が少なく、精度が高く、境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価が可能であるなど、Laplace 方程式の Dirichlet 問題の数値解法としての代用電荷法の優れた性質を継承し、標準領域から問題領域への等角写像の場合にも実用的な精度を与えることができる。

本稿では、単連結領域の内部問題を扱い、併せて代用電荷法の実用的な電荷配置の方法をも提案する。提案される方法の原理は外部領域や 2 重連結領域の問題にも適用可能である。

2. 数値等角写像の方法

2.1 Riemann の写像定理

Riemann の写像定理によれば、少なくとも二つの点を含む境界をもつ任意の単連結領域は単位円の内部に等角写像することができる。ここでは、 z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D

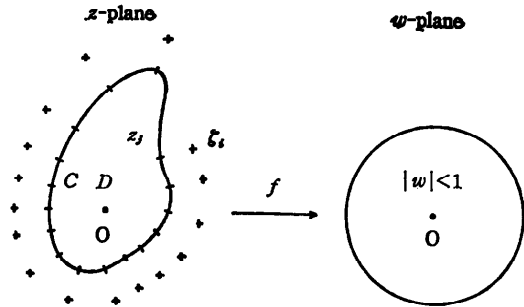


図-1 等角写像と代用電荷法
Fig. 1 Conformal mapping and the charge simulation method. The normalizing condition is $f(0)=0$ and $f'(0)>0$. ζ_i and z_j are the charge points and the collocation points, respectively.

から w 平面上の単位円の内部 $|w|<1$ への等角写像を考える (図-1)。その写像関数 $w=f(z)$ は、 D の内部に原点をとれば (問題の一般性を失わない)、正規化条件 $f(0)=0$, $f'(0)>0$ の下に一意に定まり、

$$w=f(z)=ze^{g(z)+ih(z)}, \quad z \in D \quad (1)$$

で与えられる²⁾。ここに、 $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数で、 C が単位円に移るための境界条件と正規化条件 $f'(0)>0$ から、それぞれ

$$g(z)=-\log|z|, \quad z \in C, \quad (2)$$

$$h(0)=0 \quad (3)$$

を満たさなければならない ($f(0)=0$ の成立は明らかである)。 $\exp(g(z))$ と $h(z)$ は写像 (1) による絶対値の拡大率と偏角の回転量である。

さらに、 C は Jordan 曲線であるから、Carathéodory の定理により、 $f(z)$ は境界をも含む閉領域 $\bar{D}=D+C$ を $|w|\leq 1$ に 1 対 1、連続に写像する。

2.2 代用電荷法

代用電荷法に基づいて、この共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を領域 \bar{D} の外部に配置された N 個の電荷点 ζ_i を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の 1 次結合で近似して、問題の等角写像の簡潔かつ高精度な近似写像関数

$$W=F(z)=ze^{G(z)+iH(z)}, \quad z \in \bar{D} \quad (4)$$

$$G(z)=-\sum_{i=1}^N Q_i \log|z-\zeta_i|, \quad (5)$$

$$H(z)=-\sum_{i=1}^N Q_i \arg(z-\zeta_i)+\theta_0 \\ =-\sum_{i=1}^N Q_i \arg(1-z/\zeta_i), \quad (6)$$

を得ることができる¹⁷⁾。ここに、

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (7)$$

は正規化条件(3)から定まる回転の定数である。W, F, G, H などの大文字は近似値を表す。未定係数である電荷 Q_i は境界 C 上に選ばれた N 個の拘束点 z_j で境界条件(2)を満たすように定められる。すなわち、 Q_i は拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| = \log |z_j|, \quad z_j \in C \quad (8)$$

$j=1, 2, \dots, N$

の解である。

電荷点と拘束点の数と位置に起因する公式誤差の大小にかかわらず、また連立1次方程式を解く過程で大きな桁落ち誤差を生じて、近似写像関数 $F(z)$ の正則性が成立していることに注意する。

2.3 誤差

誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる。すなわち、 $f(z)$ と $F(z)$ はいずれも有界領域 D で1価正則、境界 C 上で連続であるから、正則関数の最大値の原理により、 w 平面上の誤差 $E_w(z)$ は C 上で最大値 E_w をとって、

$$\begin{aligned} E_w(z) &\equiv |W(z) - w(z)| \equiv |F(z) - f(z)| \\ &\leq \max_c |W(z) - w(z)| \equiv E_w \\ &\leq \max_c \{ ||W(z)| - |w(z)|| \\ &\quad + |w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \\ &\leq \max_c \{ ||W(z)| - |w(z)|| \\ &\quad + \max_c \{ |w(z)| |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \} \\ &= \max_c \{ |W(z)| - 1| \\ &\quad + \max_c |\arg W(z) - \arg w(z)| \} \quad (9) \end{aligned}$$

となる(図-2)。 \max_c は境界 C 上での評価を意味する。ここで、

$$E_M \equiv \max_c E_M(z) \equiv \max_c \{ |W(z)| - 1|$$

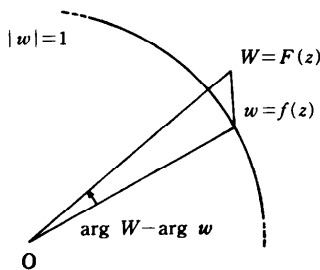


図-2 境界上での誤差評価

Fig. 2 Error estimation on the boundary curve using the maximum modulus theorem of regular functions.

$$\begin{aligned} &\equiv \max_c |G(z) - g(z)| \\ &\equiv \max_c E_G(z) \equiv E_G, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_A &\equiv \max_c E_A(z) \equiv \max_c |\arg W(z) - \arg w(z)| \\ &= \max_c |H(z) - h(z)| \\ &\equiv \max_c E_H(z) \equiv E_H, \quad (11) \end{aligned}$$

という関係が成立していることに注意する。このとき、定義式から予測されるように、 $G(z)$ と $H(z)$ の誤差の間に

$$E_G \doteq E_H, \quad (12)$$

すなわち、絶対値方向の誤差と偏角方向の誤差の間に

$$E_M \doteq E_A \quad (13)$$

という関係の存在することが知られている¹⁷⁾⁻¹⁹⁾。したがって、

$$E_w(z) \leq E_w \leq E_M + E_A \doteq 2E_M \quad (14)$$

という境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価式を得ることができる。

さらに、拘束条件(8)は $E_M(z_j) = 0$ と同値であるから、この E_M を

$$E_M \doteq \max_j \{ |W(z_{j+1/2})| - 1|, \quad z_{j+1/2} \in C \} \quad (15)$$

と簡単に評価することができる。ここに、 $z_{j+1/2}$ は拘束点 z_j と z_{j+1} の間の中間点である。

このように、代用電荷法に基づく数値等角写像では、境界上の中間点における計算値を用いた簡潔な誤差の評価が可能である。

3. 数値逆等角写像の方法

3.1 写像定理

ここでは w 平面上の単位円の内部 $|w| < 1$ から z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D への等角写像を考える(図-3)。その写像関数 $z = f^*(w)$ は、 D の内部に原点をとれば(問題の一般性を失わない)、正規化条件 $f^*(0) = 0, f^{*'}(0) > 0$ の下に一意的に定まる³⁾。さらに、Carathéodory の定理により、 $f^*(w)$ は境界をも含む閉領域 $|w| \leq 1$ を $\bar{D} \equiv D + C$ に1対1、連続に写像する。

この等角写像 $z = f^*(w)$ は前述の等角写像 $w = f(z)$ の逆写像 $z = f^{-1}(w)$ にはかならない。なぜなら、 $f(z)$ は \bar{D} から $|w| \leq 1$ の上への1対1写像であるから、その逆写像 $f^{-1}(w)$ は $|w| \leq 1$ を定義域とする1価関数として一意的に定まる。しかも、 $|w| < 1$ で正則で、

$$f^{-1'}(w) \cdot f'(z) = 1 \quad (16)$$

という関係が成立している。したがって、 $w = f(z)$ の

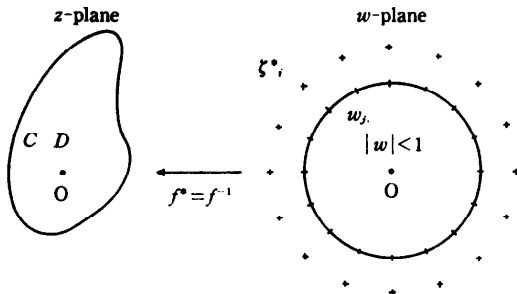


図-3 逆等角写像と代用電荷法

Fig. 3 Inverse conformal mapping and the charge simulation method. The normalizing condition is $f^*(0)=0$ and $f^{*'}(0)>0$. ζ_i^* and w_j are the charge points and the collocation points, respectively.

正規化条件から、 $f^{-1}(0)=0$ かつ $f^{-1'}(0)>0$ である。ゆえに、 $f^*(w)$ の一意性から、 $f^*(w) \equiv f^{-1}(w)$ でなければならない。

ここで、 $w=f(z)$ の場合と同様に、この写像関数を $z=f^*(w) = we^{g^*(w)+ih^*(w)}$, $|w|<1$ (17)

とおけば、 $g^*(w)$ と $h^*(w)$ は $|w|<1$ で共役な調和関数で、単位円が C に移るための境界条件と正規化条件 $f^{*'}(0)>0$ から、それぞれ

$$g^*(w) = \log |z| - \log |w|, \quad |w|=1, \quad (18)$$

$$h^*(0) = 0 \quad (19)$$

を満たさなければならない ($f^*(0)=0$ の成立は明らかである)。(18)式は右辺に未知の量 $z=f^*(w)$ を含んでいる。したがって、この条件の下に Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解いて調和関数 $g^*(w)$ を求めることは困難である。

なお、(18)式の右辺第2項を残した理由は後で述べる。また、2組の共役な調和関数の間には

$$g^*(w) + g(z) = 0, \quad (20)$$

$$h^*(w) + h(z) = 0, \quad (21)$$

という関係が成立している。

3.2 代用電荷法

ここで、問題の等角写像 $z=f^*(w)$ の値を等角写像 $w=f(z)$ の近似写像関数 $F(z)$ の逆写像 $F^{-1}(w)$ として求めることを考える。これは、 $F(z)$ の場合とまったく同一のアルゴリズムで、以下のように計算することができる。

まず、 $w_j = F(z_j)$, $z_j \in C$ なる N^* 個の適当な点 w_j を選び、これを w 平面上の拘束点として採用する。次に、単位円領域 $|w| \leq 1$ の外部にこの拘束点に対

応する適当な電荷点 ζ_i^* を選ぶ。そして、共役な調和関数 $g^*(w)$ と $h^*(w)$ を ζ_i^* を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合で近似して、問題の等角写像 $z=f^*(w)$ の簡潔な近似写像関数

$$Z = F^*(w) = we^{G^*(w)+iH^*(w)}, \quad |w| \leq 1 \quad (22)$$

$$G^*(w) = - \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^* \log |w - \zeta_i^*| \quad (23)$$

$$\begin{aligned} H^*(w) &= - \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^* \arg (w - \zeta_i^*) + \theta^*_0 \\ &= - \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^* \arg (1 - w/\zeta_i^*) \end{aligned} \quad (24)$$

を得ることができる。ここに、

$$\theta^*_0 = \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^* \arg (-\zeta_i^*) \quad (25)$$

は正規化条件(19)から定まる回転の定数である。未定係数である電荷 Q_i^* は前述の拘束点 w_j で境界条件(18)を満たすように定められる。すなわち、 Q_i^* は拘束条件の連立1次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N^*} Q_i^* \log |w_j - \zeta_i^*| &= \log |w_j| - \log |z_j|, \\ j &= 1, 2, \dots, N^* \end{aligned} \quad (26)$$

の解である。右辺第2項の $z_j = F^{-1}(w_j)$ が上記の拘束点 w_j に対しては既知であることに注意する。また、右辺第1項は $w_j = F(z_j)$ の誤差によって厳密には0にならない。これが(18)式の右辺第2項を残した理由である。

もっとも簡単には、 \bar{D} から $|w| \leq 1$ への等角写像の計算に用いられた z 平面上の拘束点 z_j の像 $w_j = F(z_j)$ ($j=1, \dots, N$) を w 平面上の拘束点としてそのまま採用することができる。このとき、 w_j が z_j から自動的に定まるというだけでなく、 z_j の配置が適切であれば w_j の配置もまた問題の領域 D の形状の情報を良く反映しているという意味で適切であることに注意する。逆等角写像 $Z = F^*(w)$ の計算に新たなプログラミングの必要はない。基本的には、 z 平面と w 平面の入力と出力の関係を入れ換えて、 $W = F(z)$ の場合と同じ副プログラムを呼び直すだけでよい。これは、数値等角写像の方法として、他の方法にはみられない重要な特徴である。また、(20)、(21)式の関係は計算結果の確認に有用である。

3.3 誤差

単位円内部から与えられた Jordan 領域 D への等角写像 $z=f^*(w)$ を D から単位円内部への等角写像 $w=f(z)$ の逆写像 $f^{-1}(w)$ として求める代わりに、その近似写像関数 $W=F(z)$ の逆写像 $F^{-1}(w)$ を代

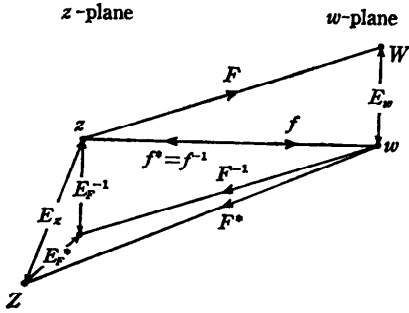


図-4 逆等角写像の誤差評価
Fig. 4 Error estimation of the numerical inverse conformal mapping.

用電荷法を用いて $F^*(w)$ で近似した (図-4)。この逆等角写像の場合にも、誤差の評価には正則関数の最大値の原理を利用することができる。

まず、 $F^*(w)$ と $F^{-1}(w)$ はいずれも有界領域 $|w| < 1$ で 1 価正則、境界 $|w| = 1$ 上で連続であるから、正則関数の最大値の原理により、 $F^*(w)$ の $F^{-1}(w)$ に対する誤差 $E_{F^*}(w)$ は境界上で最大値 E_{F^*} をとって、

$$\begin{aligned} E_{F^*}(w) &\equiv |F^*(w) - F^{-1}(w)| \\ &\leq \max_k |F^*(w) - F^{-1}(w)| \equiv E_{F^*} \\ &\equiv \max_k |F^*(z_k) - z_k| \end{aligned} \quad (27)$$

となる。ここに、 \max_k は単位円 $|w| = 1$ 上での評価を意味する。また、添字の k は前述の拘束点と中間点における評価であることを意味している。一方、 $F^{-1}(w)$ の $f^{-1}(w)$ に対する誤差は、同様に、

$$\begin{aligned} E_{F^{-1}}(w) &\equiv |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)| \\ &\leq \max_k |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)| \equiv E_{F^{-1}} \\ &\equiv \max_k \{ |F(z) - f(z)| / |F'(z)| \} \\ &\leq E_w / \min_k |F'(z)| \equiv \tilde{E}_{F^{-1}} \\ &\equiv E_w / \min_k |F'(z_k)| \end{aligned} \quad (28)$$

となる。ここでは、最大値の原理とともに、正則関数の局所的な拡大率がその導関数の絶対値に等しいことを用いている。 $F'(z) \neq 0$ は等角性の必要条件である。したがって、全体の誤差は

$$\begin{aligned} E_z(w) &\equiv |F^*(w) - f^{-1}(w)| \\ &\leq \max_k |F^*(w) - f^{-1}(w)| \equiv E_z \\ &\leq \max_k \{ |F^*(w) - F^{-1}(w)| + \\ &\quad |F^{-1}(w) - f^{-1}(w)| \} \\ &\leq E_{F^*} + E_{F^{-1}} \\ &\leq E_{F^*} + \tilde{E}_{F^{-1}} \equiv \tilde{E}_z \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

このように、逆等角写像の場合にも境界上の計算値

を用いた簡潔な誤差の評価が可能である。しかし、 $\tilde{E}_{F^{-1}}$ と \tilde{E}_z の値は $F(x)$ の誤差と逆写像によるその拡大率 $1/|F'(z)|$ が同一の点で最大値をとるという最悪の想定に基づいていることに注意する。実際には、後述のように

$$E_z \approx E_{F^*} \ll \tilde{E}_z \quad (30)$$

という関係の成立していることが多い。なお、(4)~(6)式から、

$$F'(z) = e^{G(z)+iH(z)} \left\{ 1 - z \sum_{i=1}^N Q_i / (z - \zeta_i) \right\}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} |F'(z)| &= e^{G(z)} \left[\left\{ 1 - \sum_{i=0}^N Q_i \frac{x(x-\xi_i) + y(y-\eta_i)}{|z-\zeta_i|^2} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i \frac{x(y-\eta_i) - y(x-\xi_i)}{|z-\zeta_i|^2} \right\}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (32)$$

である。

4. 数値実験

4.1 電荷配置

代用電荷法では拘束点と電荷点の配置が重要である。しかし、現在のところ、配置の妥当性は次のような定性的な尺度によって数値実験的に評価しなければならない。

- (a) 高い計算精度が得られること。
- (b) 計算が簡単であること。
- (c) 適用範囲が広いこと。
- (d) 精度が安定していること。

ここでは、次のような方法を採用する (図-5)。すなわち、まず与えられた領域の境界の形状の変化の大きい部分で密になるように適当な拘束点 $z_i (i=1, \dots, N)$ を左回りに選び、次いで各拘束点に対応する電荷点を

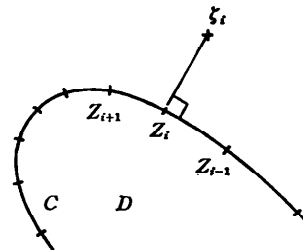


図-5 拘束点と電荷点の配置法
Fig. 5 A method of arrangement of collocation points and charge points in the charge simulation method.

$$\zeta_i = z_i + r |z_i - z_{i-1}| e^{i(\arg(z_i - z_{i-1}) - \pi/2)} \quad (33)$$

で配置する。配置のパラメータ $r (> 0)$ の値はすべての i に対して一定である。その結果、電荷点に対応する拘束点を通る法線の方向にあって、形状の変化の大きい部分で密かつ境界近くに分布するような配置が得られる。この方法は、計算が簡単で、パラメータはただ一つであり、その値の変化に対する計算精度の変化も簡単かつ規則的で、広い範囲にわたって高い精度を得ることができる。しかも、なめらかな境界をもつ任意(凸または凹、星形(starlike)または非星形、内部問題または外部問題)の領域に適用可能である。境界が角をもつ場合でも、角の拘束点 z_i に対応する電荷点の方向に注意して、たとえば(33)式を

$$\zeta_i = z_i + r/2 |z_{i+1} - z_{i-1}| e^{i(\arg(z_{i+1} - z_{i-1}) - \pi/2)} \quad (33')$$

と修正すればよい。いずれの場合にも、 $r \approx 1 \sim 10$ で満足すべき精度の得られることが多い。 w 平面上の拘束点は、前述のように、 z 平面上の拘束点の像として自動的に定まる。また、 w 平面上の電荷点も(33)式または(33')式に従って機械的に配置される。

電荷配置の方法として従来一般的な境界拡大(縮小)法¹⁶⁾は、境界の形状が円に近い場合には高い精度を得ることができるが、扁平な領域や凹部をともなう領域の場合には適していない。また、非星形領域には原理的に適用不可能である。

4.2 結果

計算結果の提示に用いられる記号は次のとおりである。

N : 電荷数 = 拘束点数。括弧内の数字は対称性を利用した場合の拘束条件の連立1次方程式の元の数。

r_z, r_w : z 平面上と w 平面上の電荷配置のパラメータ。

E_M, E_A, E_W : 与えられた Jordan 領域から単位円内部への等角写像の誤差。(9)~(11)の定義式に基づく評価値。

$E_{F^*}, E_{F^{-1}}, E_Z, \tilde{E}_{F^{-1}}, \tilde{E}_Z$: 逆等角写像、すなわち、単位円内部から与えられた Jordan 領域への等角写像の誤差。(27)~(29)の定義式に基づく評価値。

誤差の評価式をまとめて以下に記す。

$$\begin{aligned} E_M &\doteq E_G = \max_j | |F(z_{j+1/2})| - 1 | \\ E_A &= E_H = \max_k | \arg F(z_k) - \arg f(z_k) | \\ E_W &= \max_k | F(z_k) - f(z_k) | \\ E_{F^*} &= \max_k | F^*(w_k) - z_k |, \quad w_k = F(z_k) \\ E_{F^{-1}} &= \max_k | z_k - f^{-1}(w_k) |, \quad w_k = F(z_k) \end{aligned}$$

$$E_Z = \max_k | F^*(w_k) - f^{-1}(w_k) |$$

$$\tilde{E}_{F^{-1}} = E_W / \min_k | F'(z_k) |$$

$$\tilde{E}_Z = E_{F^*} + \tilde{E}_{F^{-1}}$$

前述のように、添字の k は境界上の拘束点と中間点における評価を意味している。また、真の写像関数が知られていない場合には $\tilde{E}_{F^{-1}}$ の評価に $E_W = 2E_M$ の近似を用いることにする。

数値実験には、愛媛大学情報処理センターの FACOM M-360 AP システムを利用した。連立1次方程式には Crout 法(SSL II の LAX または DLAX)を用いている。

例1 偏心円(図-6, 表-1)

問題領域 $(x - x_c)^2 + y^2 \leq 1$

写像関数 $w = f(z) = z / [1 + x_c(z - x_c)]$

$$z = f^{-1}(w) = (1 - x_c^2)w / (1 - x_c w)$$

拘束点 $x_j = \cos(j-1)\Delta\theta + x_c$

$$y_j = \sin(j-1)\Delta\theta, \quad \Delta\theta = 2\pi/N$$

これは凸形領域の例である。境界に対する正規化点の相対的な位置を表すパラメータ $x_c (0 < x_c < 1)$ の値によって問題の難易が調節される。 z 平面上の拘束点は境界上に等間隔に配置する。この場合の電荷配置は結果的には境界拡大法と同じである。 w 平面上の拘束点は z 平面上の拘束点の像として自動的に定まる。このとき、前述のように、 z 平面上の拘束点の配置が適切であれば、 w 平面上の拘束点の配置も与えられた領域の形状を良く反映しているという意味で適切である。 w 平面上の電荷点も z 平面上の電荷点と同様に(33)式に従って機械的に配置される。図-6 は表-1 (b) (ただし、 $r_w = 1.5$) の場合である。左側が z 平面、右側が w 平面で、上の1対が問題領域から単位円内部への等角写像の、下の1対がその逆の等角写像の様子を表している。図の○印は正規化点すなわち原点を、×印と+印はそれぞれ拘束点と電荷点を示している。

この例では初等的な写像関数との比較による直接的な誤差の評価が可能である。表-1 の E_W と E_Z の値はいずれも問題の等角写像と逆等角写像の計算精度が高いことを示している。さらに、問題領域から単位円内部への等角写像の誤差の関係式(13)の $E_M \doteq E_A$ と(14)の $E_W \leq E_M + E_A \doteq 2E_M$ 、および逆等角写像の誤差の関係式(30)の $E_Z \doteq E_{F^*} \ll \tilde{E}_Z$ の成立を確認することができる。このとき、16進6桁の浮動小数点数の有効精度は10進で6.3~7.2桁にすぎず、(a)と(b)の値は丸め誤差の影響を受けていると考えられること

に注意する。正規化点が境界に近づくほど、計算精度は低下し、 $E_{F^{-1}}$ と $\tilde{E}_{F^{-1}}$ および E_z と \tilde{E}_z の差異は大きくなる。しかし、(c1) と (c2) のように、電荷数を増して倍精度計算を行えば精度は大幅に向上する。

なお、電荷配置のパラメータ rz と rw の値の変化に対して計算精度は安定している。すなわち、 rz と rw の値の増大に従って、精度はまず向上し、次いで低下する。そのとき、広い範囲にわたって高い精度を得ることができる。

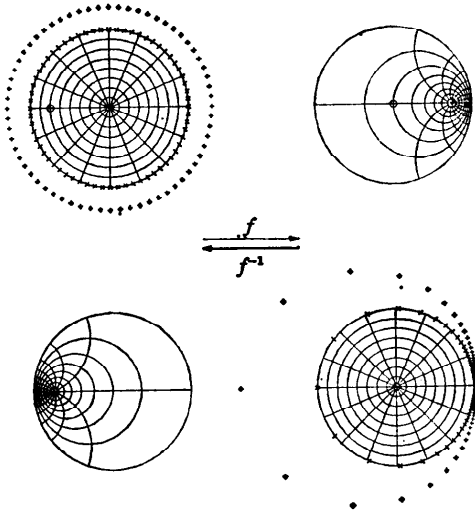


図-6 数値等角写像 (偏心円)

Fig. 6 Numerical conformal mapping of a circular domain and its inverse mapping by the charge simulation method.

表-1 誤差評価 (偏心円)

Table 1 Error estimation in the case of circular domains $(x-x_c)^2+y^2 \le 1$. N is the number of simulation charges, and rz and rw are the parameters for their arrangement on the z -plane and w -plane, respectively. E 's denote the computational error. Double precision arithmetic is used in (c2).

	(a)	(b)	(c1)	(c2)
x_c	1/2	3/4	7/8	
N	33 (17)	64 (33)	64 (33)	128 (65)
rz	4.0	3.0	2.0	3.0
rw	4.0	3.0	3.0	4.0
E_M	1.4E-6	1.7E-5	1.1E-3	1.2E-6
E_A	1.4E-6	3.2E-6	1.2E-3	1.2E-6
E_W	1.9E-6	1.9E-5	1.2E-3	1.2E-6
E_{F^*}	3.0E-6	1.0E-5	4.3E-4	1.1E-6
$E_{F^{-1}}$	2.5E-6	1.9E-5	1.8E-4	1.3E-7
E_z	3.1E-6	1.6E-5	5.4E-4	1.2E-6
$\tilde{E}_{F^{-1}}$	5.7E-6	1.3E-4	1.8E-2	1.8E-5
\tilde{E}_z	7.9E-6	1.4E-4	1.8E-2	1.9E-5

例 2 Cassini の楕形 (図-7, 表-2)

問題領域 $\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\} \leq a^4$

写像関数 $w=f(z)=az/(a^4-1+z^2)^{1/2}$

$z=f^{-1}(w)=(a^4-1)^{1/2}w/(a^2-w^2)^{1/2}$

拘束点 $x_j=r \cos \theta, y_j=r \sin \theta$

$r = \{\cos 2\theta + (\cos^2 2\theta + a^4 - 1)^{1/2}\}^{1/2}$

$\theta = 2\pi(j-1)/N$

これは $(-1, 0)$ と $(1, 0)$ からの距離の積が一定値 a^2 以下であるような領域である。パラメータ a の値によって形状が変化して問題の難易が調節される。ここで

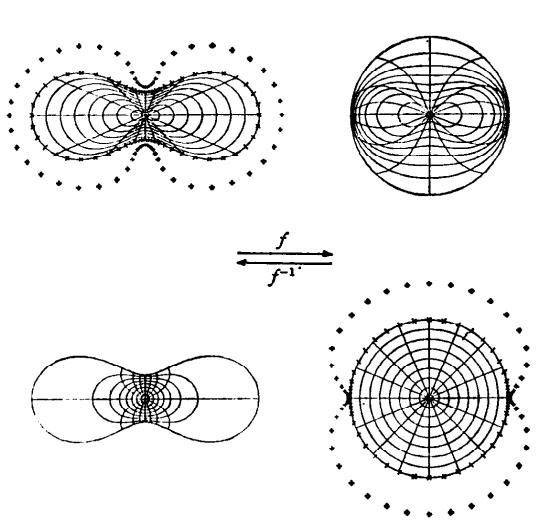


図-7 数値等角写像 (Cassini の楕形)

Fig. 7 Numerical conformal mapping of a domain of oval of Cassini and its inverse mapping by the charge simulation method.

表-2 誤差評価 (Cassini の楕形)

Table 2 Error estimation in the case of domains of the oval of Cassini $\{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\} \leq a^4$. Double precision arithmetic is used in (c2).

	(a)	(b)	(c1)	(c2)
a	$2^{1/2}$	$2^{1/16}$		$2^{1/128}$
N	32 (9)	64 (17)	64 (17)	128 (33)
rz	2.5	2.0	1.0	2.5
rw	3.0	2.5	1.5	2.5
E_M	2.8E-6	1.9E-5	2.6E-4	8.9E-7
E_A	3.6E-6	3.9E-6	2.1E-4	7.0E-7
E_W	3.7E-6	1.7E-5	2.7E-4	8.9E-7
E_{F^*}	5.9E-6	2.9E-5	1.9E-3	1.7E-5
$E_{F^{-1}}$	8.4E-6	3.6E-5	2.8E-3	1.9E-6
E_z	6.3E-6	3.1E-5	3.4E-3	1.6E-5
$\tilde{E}_{F^{-1}}$	1.3E-5	3.0E-4	3.5E-2	1.1E-4
\tilde{E}_z	1.9E-5	3.2E-4	3.7E-2	1.3E-4

は、凹部をもつ領域の例として、 $1 < a \leq 2^{1/2}$ の範囲を探り上げる。境界の形状は、 $a=2^{1/2}$ では楕円 $x^2/3+y^2=1$ に似ていて、 a の値の減少とともに凹部の幅が狭くなり、 $a=1$ では原点で二分される。図-7 は表-2(b) ($a=1.044273$) の場合である。例(c) ($a=1.005430$) では、凹部の幅は(b)の場合の約 1/3 になる。 z 平面上の拘束点は境界を偏角で等分割して配置する。その他の拘束点と電荷点は円の場合と同様に機械的に定められる。 w 平面上の拘束点と電荷点の実軸近傍への局所的な集中がより顕著であることに注意する。

この例でも初等的な写像関数との比較による誤差の評価が可能である。表-2 の E_w と E_z の値はいずれも問題の等角写像と逆等角写像の計算精度が高いことを示している。このとき、円の場合と同様に、誤差の関係式(13)と(14)および(30)の成立を確認することができる。パラメータ a の値が1に近づくほど、計算精度は低下し、 $E_{F^{-1}}$ と $\tilde{E}_{F^{-1}}$ および E_z と \tilde{E}_z の差異も大きくなる。しかし、(c1)と(c2)のように、電荷数を増して倍精度計算を行えば精度は大幅に向上する。

電荷配置のパラメータ r_z と r_w の値の変化に対して計算精度は安定している。

例3 正方形(図-8、表-3)

問題領域 $|x-x_c| \leq 1, |y-y_c| \leq 1$

拘束点 $x_j = 1 + x_c$

$$y_j = (1 - r^{j-1}) / (1 - r^{N/8}) + y_c$$

$$r^{N/8-1} = 1/r_c, \quad j=1, \dots, N/8+1$$

これは境界上に角点をもつ領域の例である。 z 平面上の拘束点は角の付近で密になるよう等比級数的に配置する。すなわち、パラメータ r_c は隣接する拘束点間の距離を与える等比級数の公比を決定し、その密度が角点付近で辺の中央付近の約 r_c 倍であることを意味する。この場合にも、他の拘束点と電荷点はなめらかな境界をもつ例1や例2の場合とまったく同様に、(33')式を用いて、機械的に配置される。図-8 は表-3(b2)の場合である。

単位円内部から正方形領域への等角写像は Schwarz-Christoffel 変換である。写像関数 $f(z)$ と $f^{-1}(w)$ はそれぞれ楕円関数と楕円積分で表現される。しかし、初等的ではないので、これとの比較による誤差の評価は行わない。むしろ、真の写像関数が知られていない場合でも計算精度の見積りが可能であることに注目する。すなわち、誤差の関係式(14)の $E_w \leq$

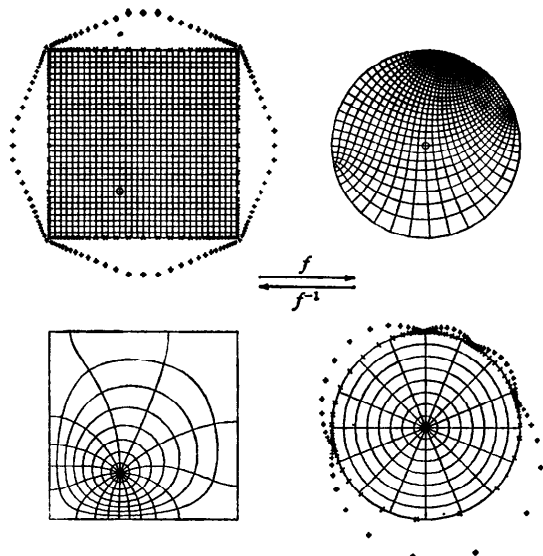


図-8 数値等角写像(正方形)

Fig. 8 Numerical conformal mapping of a square domain and its inverse mapping by the charge simulation method.

表-3 誤差評価(正方形)

Table 3 Error estimation in the case of square domains $|x-x_c| \leq 1$ and $|y-y_c| \leq 1$.

(x_c, y_c)	(a)	(b1)	(b2)	(b3)
(0,0)	(0,0)	(1/4, 1/2)	(1/4, 1/2)	(1/4, 1/2)
N	64 (17)	64	128	256
r_c	10.0	10.0	10.0	10.0
r_z	2.0	2.0	2.5	3.0
r_w	0.5	1.0	1.0	1.0
E_M	1.5E-4	7.0E-4	1.3E-5	6.6E-6
E_{F^*}	9.9E-3	1.3E-2	6.5E-3	3.0E-3
E_c	8.5E-3	1.2E-2	5.6E-3	2.6E-3

$E_M + E_A \doteq 2E_M$ と E_M の値から、問題領域から単位円内部への等角写像の精度は満足すべきものであると考えることができる。逆等角写像に関しては、角点が $f'(z)=0$ となる特異点であるから、 $\tilde{E}_{F^{-1}}$ と \tilde{E}_z の評価も不可能である。しかし、単位円 $|w|=1$ の逆写像の与えられた正方形からのずれ

$$E_c = \max_c^*(\min |F^*(w) - z_c|) \doteq \max_k(\min |F^*(e^{i \arg w_k}) - z_c|), \quad z_c \in C \quad (34)$$

を直接計算することは容易である。結果はこの場合にも(30)式の $E_z(\doteq E_c) \doteq E_{F^*}$ の関係が良く成立していると考えられることを示している。電荷数を増せば(b1)~(b3)のように計算精度も向上する。しかし、

逆等角写像の精度の向上は緩やかである。これは代用電荷法が境界値にも特異性をもたない場合に適した方法であることによるものである。しかし、単位円領域から正方形領域への等角写像が特別な処理を行うことなく 10^{-3} の精度で計算できることは重要である。

なお、電荷配置のパラメータ rz の変化に対する計算精度は安定しているが、 rw が大きすぎると逆等角写像の誤差は急激に増大する。

例 4 勾玉形 (図-9, 表-4)

問題領域 半径 $1/4, 1/4, 1, 1/2$ の半円をこの順に接続した曲線の内部。最大の半円は $(x-x_c)^2+y^2=1, x \leq x_c$ 。

拘束点 これらの半円上に $N/8, N/8, N/2, N/4$ 個ずつ等間隔に配置。

これは非星形、すなわち、原点から境界全体を見わ

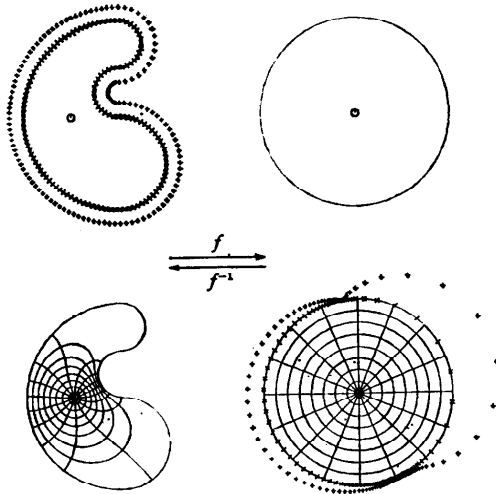


図-9 数値等角写像 (勾玉形)

Fig. 9 Numerical conformal mapping of a domain of comma-shaped bead and its inverse mapping by the charge simulation method.

表-4 誤差評価 (勾玉形)

Table 4 Error estimation in the case of a comma-shaped bead.

	(a 1)	(a 2)	(a 3)
(x_c, y_c)		(0.5, 0)	
N	64	128	256
rz	1.5	3.0	3.5
rw	1.0	1.5	1.5
E_M	1.0E-3	2.4E-4	8.2E-5
E_{F^*}	1.5E-2	1.5E-3	7.5E-4
$\tilde{E}_{F^{-1}}$	7.5E-2	2.5E-2	8.6E-3
\tilde{E}_z	9.0E-2	2.7E-2	9.0E-3
E_c	7.0E-3	1.1E-3	3.4E-4

たすことができない領域の例であり、数値等角写像では扱いが難しい問題のひとつである。写像関数は知られていない。 z 平面上の電荷配置は結果的には区分的に拡大 (縮小) 率の異なる境界拡大 (縮小) 法と同じである。他の拘束点と電荷点は例 1~3 の場合とまったく同様に機械的に配置される。図-9 は表-4 (a 2) の場合である。領域が非星形であるため、境界に相似な曲線群と原点からの放射状の直線群で問題領域から単位円内部への等角写像の様子を図示することはできない。しかし、逆等角写像の図からそれを読み取ることは容易である。

写像関数は知られていないが、例 3 の場合と同様に、誤差の関係式 (14) と E_M の値から、問題領域から単位円内部への等角写像の計算精度は満足すべきものであると考えることができる。逆等角写像の誤差 $\tilde{E}_{F^{-1}}$ と \tilde{E}_z の値は前述のような最悪の場合を想定していることに注意する。実際、この場合にも、(34) 式に従って単位円 $|w|=1$ の逆写像の与えられた勾玉形からのずれを計算することは困難ではない。結果は、逆等角写像の精度が満足すべきものであり、(30) 式の関係もよく成立していると考えられることを示している。

電荷数を増せば計算精度は向上する。また、電荷配置のパラメータ rz の変化に対する精度は安定であるが、 rw が大きすぎると逆等角写像の誤差は急激に増大する。その変化はおおむね偏心円や Cassini の楕形の場合と正方形の場合との中間的な振舞いを示している。

5. おわりに

与えられた Jordan 領域と単位円内部との間の双方向的な数値等角写像の方法を提案し、典型的ないくつかの領域に対する数値実験を行ってその有効性を確認した。この方法は、非線形の反復収束計算を行うことなく、問題領域から標準領域への等角写像とその逆の等角写像をまったく同一のアルゴリズムで簡単かつ高精度に計算することができる。境界上の計算値を用いた簡潔な誤差の評価も可能である。

この問題に関連する今後の研究課題は以下のとおりである。

- (a) 外部領域や 2 重連結領域への適用性。提案された数値等角写像の方法の原理はこれらの問題にも適用可能であるが、誤差の評価法も含めて、その有効性を実証する必要がある。

(b) 代用電荷法の電荷配置問題、最適性に関する理論的研究とともに、与えられた問題に依存しない機械的な配置法を確立する必要がある。等角写像の場合には問題が領域の形によって一意的に定まるという制約が存在する。しかし、ここで採用された配置法の外部領域や2重連結領域の数値等角写像の問題への有効性を検証することは重要である。

(c) 数学ソフトウェアの開発。数値等角写像のための数学ソフトウェアはさまざまな分野で広く利用されるであろうと考えられる。しかし、精度、効率、汎用性、操作性を兼ね備えた実用的なアルゴリズムはまだ知られていない。代用電荷法に基づく方法は、ある程度機械的な電荷の配置が可能であれば、この目的に利用できる可能性を備えている。数値解析の汎用的な方法である差分法や有限要素法は数値等角写像の問題には適していない。

参 考 文 献

- 1) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 1, pp. 286-432, John Wiley & Sons, New York (1974).
- 2) Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung*, 294 p., Springer-Verlag, Berlin (1964).
- 3) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-570, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 4) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 p., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2 (1986).
- 5) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 6) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 7) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 8) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 9) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 10) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 11) Gutknecht, M. H.: Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Non-linear Iterative Methods, *Numer. Math.*, Vol. 36, pp. 405-429 (1981).
- 12) Gutknecht, M. H.: Numerical Experiments on Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-30 (1983).
- 13) 宋 殷志, 杉浦 洋, 櫻井鉄也: 数値等角写像における Theodorsen 方程式の解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 4, pp. 393-401 (1989).
- 14) Henrici, P.: Fast Fourier Methods in Computational Complex Analysis, *SIAM Rev.*, Vol. 21, No. 4, pp. 481-527 (1979).
- 15) Gutknecht, M. H.: Numerical Conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 31-77 (1986).
- 16) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 p., 森北出版, 東京 (1983).
- 17) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 18) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 19) 天野 要: 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 20) 天野 要: 高松孝安, 安倍 齊: 代用電荷法とNewton法による逆等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 4, pp. 411-418 (1989).
- 21) 天野 要: 高松孝安, 安倍 齊: 代用電荷法とNewton法による外部逆等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 30, No. 8, pp. 923-931 (1989).

(平成元年8月9日受付)