解 説

2. 有限次元非線形方程式に対する保証付き数値計算†

山 本 哲 朗†† 陳 小 君††

1. はじめに

R^n または C^n における非線形方程式

$$f(x)=0 \tag{1}$$

を数値的に解く問題は昔から多くの研究者に関心をもたれている．かつては，3次代数方程式 ($n=1$) を数値的に解くことさえ関心事であった[39]が，近年，科学技術の発展につれて，解くべき方程式はますます複雑となり大型化している．このような方程式をコンピュータを用いて数値的に解くためにいろいろなアルゴリズムが開発されている．しかし，通常の浮動小数点演算は常に誤差をともなうから，実際に方程式(1)の近似解 x^k をなんらかの方法で求めたとき，それがどの程度まで厳密に正しいかについての保証を与えることは非常に重要でかつ難しい問題である．よく用いられる便法は次のようなものであろう[12),40)]．

1. 残差 $f(x^k)$ を計算する．$f(x^k)\fallingdotseq 0$ ならば x^k は良い解である．

2. 高精度計算を行ってみる．解が違わなければ良い解である．

3. データに摂動を入れ，解の変化をみる．変化がゆるやかであれば，方程式の解は安定，得られた数値解は信用してよい．

しかし，これらはあくまでも便法であって，すべての場合に有効とはいえない．次の例が知られている．

例 1 (Forsyth 1970).

$$f(x)=\begin{pmatrix}0.780 & 0.563\\ 0.913 & 0.659\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.217\\ 0.254\end{pmatrix}$$

$x=(0.999,\ -1.001)^t \Rightarrow$

$$f(x)=(-0.001243,\ -0.001572)^t$$

$x=(0.341,\ -0.087)^t \Rightarrow$

$$f(x)=(-0.000001,\ 0.0)^t$$

真の解 $x^*=(1,\ -1)^t$

例 2 (Kulish-Miranker 1986). $f(x)=x^{50}+812-x^{50}+x^{55}+511-x^{55}$. $f(10)$ を求める．単精度，倍精度，4倍精度いずれを用いても出力結果は 0. 真値は明らかに $f(10)=1323$.

例 3(同上). $f(x)=\begin{pmatrix}100000 & 99999\\ 99999 & 99998\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$

$b=(200000,\ 200000)^t, \Rightarrow x=(200000,\ -200000)^t$

$b=(199990,\ 199990)^t, \Rightarrow x=(199990,\ -199990)^t$

$b=(200010,\ 200010)^t, \Rightarrow x=(200010,\ -200010)^t$

しかし

$(199990,\ 199990)^t \leqq b \leqq (200010,\ 200010)^t$ ならば

$(-1800000,\ -2200000)^t \leqq x \leqq (2200000,\ 1800000)^t$.

特に

$b=(199999,\ 1999997)^t \Rightarrow x=(1,1)^t$.

上記の例は，コンピュータから出力された数値的結果を盲信することの危険を示している．このような数値計算の難点を救うためにいくつかの精度保証付き数値計算法が考えられている．

本稿では，次の方法につき述べる．

1. 区間解析法：数演算のかわりに，計算の各ステップを区間として演算し，真値が存在する区間を最終計算結果として出力する．

2. Kantorovich 型と Urabe 型事後誤差評価法：通常のアルゴリズムで近似解を得た後に，真値が存在する範囲を評価する．

3. Smith 型事後誤差評価法：: 複素係数の n 次多項式の全ての近似根の精度を同時に判定する．

2. 区間解析法

この章では空間を R^n に限定し，Krawczyk-Moore 法，区間 Newton 法，Collatz-Moore 法を中心にして紹介する．

---

† Validated Methods for Solving Nonlinear Systems by Tetsuro YAMAMOTO (Ehime University, Faculty of Science) and Xiaojun CHEN (Xian Jiaotong University, Department of Mathematics).

†† 愛媛大学理学部

2.1 基本概念

まず，区間演算における基本概念を述べる．

区間 $X=[\underline{x}, \bar{x}]$, $Y=[\underline{y}, \bar{y}]$ に対して，次のものを定義する．

区間Xの幅	$w(X)=\bar{x}-\underline{x}$
区間Xの中心	$m(X)=(\underline{x}+\bar{x})/2$
区間Xの絶対値	$\|X\|=\max(\|\underline{x}\|,\|\bar{x}\|)$
区間X, Yの距離	$d(X, Y)=\max(\|\underline{x}-\underline{y}\|,\|\bar{x}-\bar{y}\|)$
区間X, Yの演算	$X*Y=\{x*y \mid x\in X, y\in Y\}$, $*\in\{+,-,x,/\}$ (除算では $0\notin Y$)．

同様に

区間ベクトル $X=(X_i), X_i=[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$,

区間行列 $A=(A_{ij}), A_{ij}=[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$

に対して，

$$w(X)=\max w(X_i),\ \|X\|=\max|X_i|,$$
$$m(X)=(m(X_1), \cdots, m(X_n))^t$$
$$w(A)=\max w(X_i),\ \|A\|=\max|A_{ij}|,$$
$$m(A)=(m(A_{ij}))$$

と定義する．

R^n における全ての区間の集合を $I(R^n)$ で表す．M を R^n の部分集合とすれば，M における全ての区間の集合を $I(M)=\{X\in I(R^n) \mid X\subseteq M\}$ で表す．

よく知られているように(1)を解く反復法はいずれも

$$x^{k+1}=g(x^k),\ k=0, 1, \cdots$$

の形である．ただし，$g: R^n\to R^n$ である．ここで，$M_i\subseteq R^n$, $X_i\subseteq M_1(i=1, 2)$, $g: M_1\to M_2$, $G: I(M_1)\to I(M_2)$ として，次の諸概念を定義する．

Gが包含単調区間写像 (inclusion isotonic interval valued function) であるとは $X_1\subseteq X_2$ ならば $G(X_1)\subseteq G(X_2)$ であるときをいう．

Gがgの区間拡張 (interval extension) であるとは任意の $x\in X\subseteq M_1$ に対して，$g(x)=G(x)$ であるときをいう．

Gがgの区間包囲 (interval enclosure) であるとは任意の $x\in X\subseteq M_1$ に対して，$g(x)\in G(X)$ であるときをいう．

Gをgの包含単調区間拡張（または包囲）とするとき，次の命題 (Moore test と呼ばれる) が成り立つ．

命題 1 x^*を(1)の解とするとき，$x^*\in X$ ならば $x^*\in G(X)$.

命題 2 $G(X)\subseteq X$ ならば X 内に解が存在する．

命題 3 $G(X)\cap X=\phi$ ならば X 内に解がない．

これらの命題によって，(1)を解く一つの区間反復法は次のように定義される．

初期区間 X^0 と停止条件 $\varepsilon>0$ を選ぶ，$k\geqq 0$ に対して

1. $X^{k+1}=G(X^k)\cap X^k$ とおく．
2. $X^{k+1}=\phi$ ならば停止する．X^0 に解はない．
3. $X^{k+1}=G(X^k)$ ならば，X^k 内に解が存在する．4へ行く．$X^{k+1}\neq G(X^k)$ かつ $W(X^{k+1})\leqq\varepsilon$ ならば停止し，$m(X^{k+1})$ を近似解とする．その他の場合には1へ行く．
4. $X^{k+1}=G(X^k)$, $W(X^{k+1})\leqq\varepsilon$ を満たすまで，反復をくり返し，満たされたとき，停止し，$m(X^k)$ を近似解，X^{k+1} を解の存在区間として出力する．

区間反復法の特徴は解の存在・非存在性を機械的に判定できることにある．真の解 x^* が存在する範囲を区間として出力するから，従来のような誤差解析を不要にする．

2.2 区間写像 G の構成

(1) Krawczyk-Moore の区間写像

1969年 Krawczyk[8] は区間写像 $G=K$ を

$$K(X)=y-Yf(y)+(I-YF'(X))(X-y)$$

により定義した．ただし $y\in X$, Y は $n\times n$ 正則行列，F' は f' の包含単調区間拡張である．このように定義された $K(X)$ は $g(y)=y-Yf(y)$ の包含単調区間拡張である．

1977 年 Moore[15] は Krawczyk の区間写像における y と Y を具体的に与えて，区間反復写像

$$K(X^k)=y^k-Y^kf(y^k)+(I-Y^kF'(X^k))(X^k-y^k)$$
$$y^k=m(X^k)$$
$$Y^k=\begin{cases} Y & (k=0 \text{ または } [m(F'(X^k))]^{-1} \text{ の近似 } Y \text{ が } \|I-YF'(X^k)\|\leqq\|I-Y^{k-1}F'(X^{k-1})\| \text{ を満たすとき}) \\ Y^{k-1} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

を定義し，その収束性を証明した．その後，Moore (1978[17]) と Qi (1980[26]) は Moore の結果をさらに次のように改良した．

定理 1.1 $K(X^0)\subset\mathrm{int}(X^0)$ (X^0 の内点) ならば

a. X^0 内にただ一つの解 x^* が存在する．

b. $x^*\in X^k\subseteq X^{k-1}$.　　c. $W(X^k)\leqq(r^0)^kW(X^0)\to 0$.

d. 任意の $x^0\in X^0$ から出発する簡易 Newton 法は x^* に収束する．

この方法を用いる場合の計算手順は Moore-Jones[16] に与えられている．また，奥村，佐伯と木島[23] は Moore-Jones のアルゴリズムを電子回路の問題に応

用している．

$K(X)$ の改良はその後多くの人々により考えられている．

1981年 Hansen と Sengupta[6] は Gauss-Seidel 技法を用いて，次のような区間写像 $G=H$ を定義した．

$$H_i(X)=g_i+\sum_{j=1}^{i-1}R_{ij}(H_j'(X)-y_j)+\sum_{j=i}^{n}R_{ij}(X_j-y_j)$$

$$H_i'(X)=H_i(X)\cap X_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

ただし $g(y)=y-Yf(y)$, $R=(R_{ij})=I-YF'(X)$．1982年 Moore と Qi[20] は $H(X)\subseteq K(X)$ を証明することにより，この方法がすぐれていることを示した．そして $H(X)\subseteq X, K(X)\subsetneq X$ の一つの例を与えた．

1985年 Shearer と Wolfe[28] は次のような区間写像 $G=S$ を定義した．

$$S_i(X)=g_i+\sum_{j=1}^{i}R_{ij}(H_j'(X)-y_j)+\sum_{j=i+1}^{n}R_{ij}(S_j'(X)-S_j)$$

$$S_i'(X)=S_i(X)\cap H_i'(X)\quad (i=n,\cdots,1)$$

彼らは大きい n につき $S(X)$ は $H(X)$ より有効であることをいくつかの例で示した．

1983年 Krawczyk は $F'(X)$ の計算のかわりに区間 Lipschitz 条件

$f(x)-f(y)\in L(x-y)$, $x, y\in X^0$, L：区間行列

を考え，次の区間写像を提案した．

$$K(X)=m(X)-Yf(mX)+[-p,p](X-m(X))$$

$$p=|I-YL|\in R^{n\times n}$$

ただし，Y は適当な n 次正則行列である．したがって区間 $K(X)$ は Y に依存するが 1989年 Chen と Wang[4] は $K(X)\subseteq X$ と同値な次の解の存在条件

$$|g(m(X))-g(x)|\leqq pr(X) \qquad (2)$$

$$|g(m(X))-m(X)|\leqq(I-p)r(X) \qquad (3)$$

を考え，$K_Y(X)\subseteq X$（したがって(2)と(3)）を満たす Y のうちで最適なものは $Y=(mL)^{-1}$ であることを示した．

注意 1.1 次の定理はよく知られている．（たとえば文献 7），p. 110)

定理 1.2

$$\|g(x)-g(y)\|\leqq L\|x-y\|,\quad x,y\in D \qquad (4)$$

$$\|g(x^0)-x^0\|\leqq r(1-L), \qquad (5)$$

$S(x^0, r)=\{x\mid\|x^0-x\|\leqq r\}\subseteq D$ とすれば，$S(x^0, r)$ 内に g の不動点（したがって(1)の解）が存在する．

(2)と(3)は(4)と(5)に対応する条件である．

Williamson[33] は条件(4)を満たす Lipschitz 写像 $g(x)$ の不動点についていろいろな不動点存在定理を与えた．

この他に 1980年 Moore と Kioustelidis[19] が発表した精度判定法，1985年 Pandian[25] による区間反復法に対する収束検証法などがある．

(2) 区間 Newton 写像

1966年 Moore[13] は $\boldsymbol{R}$ における方程式(1)に対して，区間 Newton 写像 $G=N$ を

$$N(X)=y-f(y)/F'(X)$$

より定義した．ただし，F' は f' の包含単調区間拡張，$0\notin F'(X)$, $y\in X$ である．

1973年 Alefeld と Herzberger（文献1)のドイツ語版）は $N(X)$ を R^n における方程式系に応用して

$$N(X)=y-IGA(F'(X),\ f(y))$$

を提案した．ただし $IGA(A,b)$ は $Ax=b$ を区間 Gauss 消去法で解いたときの解を表す．しかし区間 Gauss 法の計算は複雑であり，十分な対角優位性がないと途中で計算不能となりやすい．これに対し，1980年 Krawczyk[9] は

$$N(X)=y-[I-q,I+q](Yf(x))$$

を提案した．ただし，$q=r(I-r)^{-1}$, $r=|I-YL|$, L は f に対する Lipschitz 区間行列である．この写像による区間反復法の収束性および解の存在・非存在検証などは Krawczyk (1980[9], 1983[10], 1987[11]) により研究された．特に彼は $N(X)\subseteq K(X)$ を示した．

(3) Collatz-Moore 区間写像

1964年 Collatz[5] は $g(x)$ が

$$g(x)=p(x)-q(x),$$

p, q：isotone 写像

i.e., $x\leqq y\Rightarrow p(x)\leqq p(y)$, $q(x)\leqq q(y)$

とかけるとき，反復法

$$x^{k+1}=p(x^k)-q(y^k),\quad y^{k+1}=p(y^k)-q(x^k),\quad x^0\leqq y^0$$

を提案し次の定理を証明した．

定理 1.3 もし $x^0\leqq x^1$, $y^0\geqq y^1$ ならば，x^k, y^k は x^*, y^* に収束し，$x^k\leqq x^{k+1}\leqq x^*\leqq y^*\leqq y^{k+1}\leqq y^k$ が成り立つ．そして(1)の一つの解が区間 $[x^*, y^*]$ 内に存在する．また $[x^*, y^*]$ は $[x^0, y^0]$ 内にある解をすべて含む．

1979年 Moore[18] はこの定理の区間版として

$$G[x^0,y^0]=[p(x^0)-q(y^0),q(y^0)-q(x^0)]\subseteq[x^0,y^0]$$

ならば $[x^0, y^0]$ 内に解 x^* が存在し $x^*\in[x^{k+1},$

$y^{k+1}]\subseteq[x^k, y^k]$, $k\geqq 0$ であることを示した．

1984年 Li[13]は f が order convex[24]の場合に対して，順序区間 Newton 写像

$$G[x, y]=[g(x), g(y)],\ g(x)=x-f'(x)^{-1}f(x),$$

を考えた．1987年 You と Chen[47]は一般化された順序区間写像

$$G[x, y]=[g(Ax, By),\ g(Ay, Bx)]$$

$$A, B: n\times n \text{ 行列},\ g: g(Ax, By)\leqq g(Ay, Bx)\quad (x\leqq y)$$

による区間反復法の収束性および解の存在・非存在検証法を研究した．特に条件

$$G_i[x, y]\subseteq[x_i, y_i],\ i\in I$$

$$[x_j, y_j]\subseteq G_j[x, y],\ j\in J$$

$$I\cap J=\phi,\ I\cup J=\{1, 2, \cdots, n\}$$

のもとで，解の存在性を証明した．

3. Kantorovich 型と Urabe 型事後誤差評価法

1948年 Kantorovich は Newton 法に対する有名な収束定理と誤差評価を与えた．この結果をなんらかの方法によりえられた近似解に適用すればその誤差を評価することができる．その後，多くの人たちにより，Newton 法および Newton-like 法に対する誤差評価およびその改良が与えられている[39]．特に，Yamamoto[41]はこれらの誤差限界をある関係式を用いて，統一的に導き，それらの間に完全な優劣関係が存在することを示した．最近 Yamamoto と Chen[2),3),42),45]はこの結果を微分不可能項をもつ非線形方程式系に拡張し，解の存在・非存在検証法を与えた．ここでは，その特別な場合として次の結果を述べる．

$f: D\subseteq X\to Y$ はある凸領域 $D_0\subseteq D$ において，Fréchet 微分可能かつ次の条件を満たすと仮定する．

$f'(x^0)^{-1}$ は存在して，$\|f'(x^0)^{-1}f(x^0)\|\leqq\eta$ かつ $\|f'(x^0)^{-1}(f'(x)-f'(y))\|\leqq K\|x-y\|$, $x, y\in D^0$.

定理 2.1　もし $h=K\eta\leqq 1/2$, $S(x^0, t^*)=\{x\in X|\ \|x-x^0\|\leqq t^*\}\subseteq D_0$ ならば，$S(x^0, t^*)$ 内に解がただ一つ存在する．ただし，$t^*=2\eta/(1+\sqrt{1-2h})$．もし $h>1/2$ ならば $S(x^0, r^*)$ 内に解は存在しない．ただし

$$r^*=2\eta/(1+\sqrt{1+2h})\geqq\min\{1/K, h/2\}.$$

この定理に対応する成分ごと事後誤差評価法が Yamamoto[38]により与えられた．その後，Yamamoto と Chen[46]はこれをさらに次のように改良した．

$x\in R^n$, $H\in R^{n\times n\times n}$, $H\geqq 0$ に対して，

$$\nu[x]=(|x_1|, \cdots, |x_n|)^t,$$

$$h_q=((\sum_j\sum_k h_{ijk})^{1/q})\in R^n,\ q>0$$

$$\varepsilon=\nu[f'(x^0)^{-1}f(x^0)],$$

$$\nu[f'(x^0)^{-1}(f'(x)-f'(y))]\leqq H\nu[x-y]$$

とするとき，

定理 2.2　(ⅰ) もし $h\leqq 1/2$ ならば $U(x^0, u)=\{x|\ \nu[x-x^0]\leqq u\}$ 内に解が存在する．ただし $u=\varepsilon+t^{*2}h_q$
(ⅱ) $U(x^0, v)$ 内に解は存在しない，ただし

$$v=2\|\varepsilon\|/(1+\sqrt{1+2\|H\|\cdot\|\varepsilon\|})\ (1, 1, \cdots, 1)^t$$

注意 2.1　1980年 Rall[27]は定理 1.1 の条件 $K(X^0)\subset\mathrm{int}(X^0)$ を Kantorovich の条件 $h\leqq 1/2$ と比較した．彼の結論は次のとおりである．

a. 精度は後者がわずかによい．

b. しかし，前者は後者より計算量が少なく適用しやすい．

また，1984年 Shen[29]は両者の仮定がある意味で同値であることを示した．

1967年 Urabe は次の定理を与えた．

定理 2.3　x^0 を (1) の近似解とし，次の条件を満たす線形作用素 $L: X\to Y$, 正数 δ, および非負定数 $\kappa<1$ が存在するものと仮定する．

(1)　L^{-1} が存在して有界：$\|L^{-1}\|\leqq M(M>0)$

(2)　$S(x^0, \delta)\subset D^0$ かつ，そこで $\|f'(x)-L\|\leqq\kappa/M$

(3)　$\|F(x^0)\|\leqq r$, $Mr/(1-\kappa)\leqq\delta$

このとき，$S(x^0, \delta)$ 内にただ一つ解が存在する．

注意 2.2　この定理は注意 1.1 に述べた定理の特別な場合である．

注意 2.3　これらの定理を用いてなんらかの方法により得られた数値解 x^0 の誤差を厳密に評価する場合，$h, t^*, r^*, u, v, \delta$ などの計算には区間演算が必要となろう．

4. Smith 型事後誤差評価法

実係数または複素係数 n 次代数方程式

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0,\ a_n\neq 0\qquad(6)$$

を考える．$z_1, \cdots, z_n$ をなんらかの方法 (Durand-Kerner-Aberth 反復法[34]が一つの有効な方法と考えられる) により求めた (6) の近似解とすれば，これらの精度は次の定理により判定できる．

定理 3.1 (Smith 1970[30])　仮定 $z_i\neq z_j$, $(i\neq j)$ の下で，(6) のすべての根は n 個の閉円板

$$\Gamma_k:\ |z-z_k|\leqq|P(z_k)/\prod_{j\neq k}(z_k-z_j)|\quad(=r_k \text{ とおく})$$

の合併に含まれる．もし m 個の閉円板 $\Gamma_{k_1}, \cdots, \Gamma_{k_m}$

が，他の閉円板と交わらなければ，$\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_{k_i}$ はきっちりm個の根を含む．特にある Γ_k が他の Γ_j と交わらなければ，Γ_k 内にちょうど一つの根がある（したがって r_k は z_k に対する誤差限界を与える）．

しかしこの定理は各 r_k が z_k の誤差限界であることを一般には主張しない．各 z_k の誤差限界を求める方法は Yamamoto[36] および Zheng[48] により得られているが最近，Yamamoto と Chen[46] はこれらの結果を次のように改良した．

$$\beta_{ij}=|z_i-z_j|^{-1},\quad \beta=\max\beta_{ij},$$
$$\varepsilon_i=|P(z_i)|\prod_{j\neq i}\beta_{ij},\quad \eta=\sum_i\varepsilon_i$$
$$\mu=\eta\beta,\quad b=1+2\mu/(n-2)$$
$$\gamma=\begin{cases}2\mu\beta b^{n-3}+2\beta b^{n-2}, & n\geqq 3 \text{ のとき}\\ 2\beta, & n=2 \text{ のとき}\end{cases}$$
$$h=\gamma\eta$$

とおくとき，

定理 3.2 （ i ） $h\leqq 1/2$ ならば

a．各閉円板 D_k: $|z-z_k|\leqq d_k=\varepsilon_k+t^{*2}s$ 内に少なくとも一つ根が存在する．（したがって d_k は z_k の誤差限界である．）ただし $t^*=2\eta/(1+\sqrt{1-2h})$，$s=\max(\beta b^{n-2},\ 2\eta\beta^2b^{n-3})$．

b．もしm個の閉円板 $D_{k_1},\cdots,D_{k_m}$ が，他の閉円板と交わらなければ，$\bigcup_{i=1}^{m}D_{k_i}$ はきっちり m 個の根を含む．

（ii） $h<1/2$ ならば $P(z)$ のすべての根は単根である．

注意 3.1 定理 3.1，3.2を実際に用いる場合，注意 2.3と同様な注意が適用される．

注意 3.2 区間演算を用いた簡単な計算例は文献43)に報告されている．

注意 3.3 現行で使用可能な数値計算用のソフトとして ACRITH, PASCAL-SC, FORTRAN-SC などがある．これらについては別稿に紹介されるであろう．

参考文献

1) Alefeld, G. and Herzberger, J.: Introduction to Interval Computations (Translated by Rokne, J.), Academic Press, New York (1983).

2) Chen, X. and Yamamoto, T.: Convergence Domains of Certain Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations, Numer. Funct. Anal. Optim., Vol. 10, No. 1 & 2, pp. 37-48 (1989).

3) Chen, X. and Yamamoto, T.: A Necessary and Sufficient Condition for Convergence of Certain Iterative Methods for Nonlinear Equations, in Agarwal, R. P. et al. ed., International Series of Numerical Mathematics, pp. 95-104, Birkhauser Verlag, Basel (1988).

4) Chen, X. and Wang, D.: On the Optimal Properties of the Krawczyk-type Interval Operator, Int. J. Comp. Math., Vol. 29, pp. 235-245 (1989).

5) Collatz, L.: Functional Analysis and Numerical Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, translated by Oser, H., Academic Press, New York (1966).

6) Hansen, E. and Sengupta, S.: Bounding Solutions of Systems of Equations Using Interval Analysis, BIT, Vol. 21, pp. 203-211 (1981).

7) Isaacson, E. and Keller, H. B.: Analysis of Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney (1966).

8) Krawczyk, R.: Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken, Computing, Vol. 4, pp. 187-201 (1969).

9) Krawczyk, R.: Zur Konvergenz iterierter Mengen, Freiburger Intervall-Berichte 80/3, pp. 1-33 (1980).

10) Krawczyk, R.: Interval Operators of a Function of which the Lipschitz Matrix is an Interval M-Matrix, Computing, Vol. 31, pp. 245-253 (1983).

11) Krawczyk, R.: Conditionally Isotone Interval Operators, Computing, Vol. 39, pp. 261-270 (1987).

12) Kulisch, U. W. and Miranker, W. L.: The Arithmetic of the Digital Computer: A New Approach, SIAM Review, Vol. 28, pp. 1-40 (1986).

13) Li, Q.: Order Interval Test and Iterative Method for Nonlinear Systems, J. Comp. Math., Vol. 1, pp. 50-55 (1984).

14) Moore, R. E.: Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1966).

15) Moore, R. E.: A Test for Existence of Solutions to Nonlinear Systems, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 14, pp. 611-615 (1977).

16) Moore, R. E. and Jones, S. T.: Safe Starting Regions for Iterative Methods, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 14, pp. 1051-1065 (1977).

17) Moore, R. E.: A Computational Test for Convergence of Iterative Methods for Nonlinear Systems, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, pp. 1194-1195 (1978).

18) Moore, R. E.: Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Studies in Applied Mathematics. 2, SIAM, Philadelphia (1979).

19) Moore, R. E. and Kioustelidis, J. B.: A Simple Test for Accuracy of Approximate Solutions to Nonlinear (or Linear) Systems, SIAM J. Anal., Vol. 17, pp. 521-529 (1980).
20) Moore, R. E. and Qi, L.: A Successive Interval Test for Nonlinear Systems, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 19, pp. 845-850 (1982).
21) 中尾充宏：関数方程式の解の存在に対する数値的検証法，数学，Vol. 42, pp. 16-31 (1990).
22) Neumaier, A.: New Techniques for the Analysis of Linear Interval Equation, Linear Algebra and its Applications, Vol. 58, pp. 273-325 (1984).
23) 奥村浩二，佐伯秀一，木島 昭：区間解析による非線形回路方程式の求解アルゴリズムに関する一考察，電子通信学会論文誌，Vol. 69, pp. 489-496 (1986).
24) Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York (1970).
25) Pandian, M. C.: A Convergence Test and Componentwise Error Estimates for Newton Type Methods, SIAM J. Nemer. Anal, Vol. 22, pp. 779-791 (1985).
26) Qi, L.: A Generalization of the Krawczyk-Moore Algorithm, in Nickel, K. ed. Interval Mathematics 1980, pp. 481-488, Academic Press, New York (1980).
27) Rall, L.: A Comparison of the Existence Therems of Kantorovich and Moore, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 17, pp. 148-161 (1980).
28) Shearer, J. W. and Wolfe, M. A.: An Improved Form of the Krawczyk-Moore Algorithm, Applied Math. Comp., Vol. 17, pp. 229-239 (1985).
29) 沈 祖和：関於 Kantorovich 定理与 Moore 定理的等価性，計算数学，Vol. 6, pp. 319-323 (1984).
30) Smith, B. T.: Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based upon Gerschgorin's Theorems J. A. C. M., Vol. 17, 661-674 (1970).
31) Urabe, M.: The Newton Method and Its Application to Boundary Value Problems with Nonlinear Boundary Conditions, Proc. US-Japan Seminar on Differential & Functional Equations, Benjamin, pp. 383-414 (1967).
32) 王 徳人，張 連生，鄧 乃揚：非線形方程的区間算法，上海科学技術出版社 (1986).
33) Williamson, T. E. Jr.: Geometric Estimation of Fixed Point of Lipschitzian Mapping II. J. Math. Anal. Appl., Vol. 62, pp. 600-604 (1978).
34) Wolfe, M. A.: Interval Methods for Algebraic Equations, in Moore, R. E. ed., Reliability in Computing, pp. 229-248, Academic Press (1988).
35) 山本哲朗：ある代数方程式に対する解の事後評価法，数理科学，Vol. 157, pp. 52-57 (1976).
36) Yamamoto, T.: An Existence Theorem for Solution of Nonlinear Systems and Its Application to Algebraic Equations, 3rd USA-JAPAN Computer Conference Proceedings, pp. 300-304 (AFIPS and IPSJ, 1978).
37) 山本哲朗：ニュートン法の魅力，数理科学，Vol. 8, pp. 5-9 (1981).
38) Yamamoto, T.: Error Bounds for Approximate Solutions of Systems of Equations, Japan J. Appl. Math., Vol. 1, pp. 157-171 (1984).
39) 山本哲朗：Newton 法とその周辺，数学，Vol. 37, pp. 1-15 (1985) (改訂英訳版：Sugaku Expositions, Vol. 1, No. 2, pp. 219-238 (1988)).
40) 山本哲朗：数値計算における基本手法“区間演算”について，情報処理学会研究報告，86-NA-17 (1986).
41) Yamamoto, T.: A Method for Finding Sharp Error Bounds for Newton's Method under the Kantorovich Assumptions, Numer. Math., Vol. 49, pp. 203-220 (1986).
42) Yamamoto, T.: A Note on a Posteriori Error Bound of Zabrejko and Nguen for Zincenko's Iteration, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., Vol. 9, pp. 987-994 (1987).
43) 山本哲朗，陳 小君，菅野幸夫：精度保証付き数値計算について，情報処理学会研究報告，88-NA-27 (1988).
44) 山本哲朗，陳 小君：非線形方程式に対する存在・非存在定理と代数方程式への応用，情報処理学会研究報告，89-NA-28 (1989).
45) Yamamoto, T. and Chen, X.: Ball-Convergence Theorems and Error Estimates for Certain Iterative Methods for Nonlinear Equations, Japan J. Appl. Math., Vol. 7, pp. 131-143 (1990).
46) Yamamoto, T. and Chen, X.: An Existence and Nonexistence Theorem for Solutions of Nonlinear Systems and Its Application to Algebraic Equations, J. Comp. Appl. Math. (1990).
47) You, Z. and Chen, X.: Interval Iterative Methods for Nonlinear Numerical Equations under Partial Ordering (1), J. Comp. Math., Vol. 6, pp. 39-47 (1988).
48) 鄭 士明：関於多項式求根的一個並行算法的収束性，数学研究与評論，Vol. 7, pp. 657-660 (1987).

(平成2年4月5日受付)