

電磁界数値解析における IDR(s)法の有効性評価

高橋康人*, 岩下武史**, 金澤正憲**, 若尾真治***

* 京都大学大学院情報学研究所システム科学専攻

** 京都大学学術情報メディアセンター

*** 早稲田大学先進理工学部電気・情報生命工学科

電磁界数値解析に基づく電気機器設計の高度化のためには、さまざまな数値解析手法の特長を活かし、対象に応じて使い分けることが重要だと考えられる。しかし、積分方程式法などいくつかの数値解析手法は、非対称な係数行列を扱わなければならない難点がある。近年、双直交条件に基づく BiCG 法系統の反復法や、最小条件に基づく GMRES 法とはまったく異なるクリロフ部分空間法である IDR(s)法が提案され、さまざまな分野においてその性能評価が進められているが、電磁界数値解析分野においてはその有効性について不明な点も残されている。そこで本稿では、非対称マトリクスを扱う電磁界数値解析手法を対象として、従来用いられている GMRES(k)法や BiCGSTAB2 法との比較を行い、IDR(s)法の有効性を検証する。

Performance Evaluation of IDR(s) Method for Various Nonsymmetric Matrices in Electromagnetic Field Computations

Yasuhiro Takahashi*, Takeshi Iwashita**, Masanori Kanazawa**, and Shinji Wakao***

* Department of System Science, Graduate School of Informatics, Kyoto University

** Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University

*** Department of Electrical Engineering and Bioscience, Waseda University

This paper investigates the performance of the IDR(s) method for various nonsymmetric matrices derived from some numerical methods in electromagnetic field computations such as the time-periodic finite-element method (TPFEM), the surface charge method (SCM) in eddy-current problems, and the hybrid finite element and boundary element (FE-BE) method. The IDR(s) method is compared with the some iterative solvers such as the GMRES(k) method and the BiCGSTAB method from the viewpoints of the computational costs. As a consequence, it is verified that the IDR(s) method is frequently effective for nonsymmetric matrices in electromagnetic field analysis.

1. はじめに

計算機の目覚ましい発達と様々な電磁界数値計算技術の研究開発は、電気機器の設計や物理現象の解明に画期的な進歩をもたらした。最近、相当に複雑な形状や構造の解析まで可能になっている。しかし、設計対象や解析対象がますます複雑化、大規模化し、数値解析におけるさらなる高精度化と計算時間の短縮化が要求されている状況にある¹⁾。

電磁現象は、本質的に無限遠にまでその影響がおよぶ領域問題である。また、導体や磁性体などを含む多媒質問題であり、不均質・非線形・異方性や渦電流などの複雑な媒質特性を考慮する必要がある。このような電磁界問題に

対し、有限要素法や境界要素法に代表されるさまざまな数値解析手法が活用されている。これらの数値解析手法は、計算時間・コスト、汎用性、データ作成の容易さなどに関して一長一短であり、対象が有する特徴に応じて解析手法を使い分けることが、電磁界数値解析に基づく電気機器設計の高度化において重要と考えられる。

電磁界解析手法の中でも有限要素法は、磁気特性の非線形・異方性や渦電流に容易に対応可能であるなどその汎用性の高さから広く普及している。有限要素法から得られる連立一次方程式はスパースな対称行列であるため、ICCG法により求解が行われる。しかしながら、積分方程式法などいくつかの数値解析手法においては非対称な係数行列を扱

う必要があり、非対称マトリクスに対する効果的な反復法の開発が望まれていた。近年、非対称マトリクス用の反復法として IDR (Induced Dimension Reduction) (s)法が提案され²⁾、疎行列データベースから選出された実数行列³⁾や多物体電磁波散乱問題の境界要素解析など、種々の非対称マトリクスにおける有効性検証が藤野・中嶋らのグループによって進められている^{4)~9)}。しかし、電磁界数値解析手法は多岐にわたるため、明らかになっていない点も残されている。

このような背景のもと、本稿では IDR(s)法の概要を簡単に述べるとともに、非対称行列を扱う電磁界解析手法として、時間周期有限要素法⁹⁾、高速多重極法^{10), 11)}を導入した渦電流場における表面電荷解析^{12), 13)}、高速多重極法を導入した有限要素・境界要素併用法^{14)~17)}の3種類を取り上げ、従来用いられている GMRES(k)法^{18), 19)}や BiCGSTAB2 法¹⁹⁾との比較により IDR(s)法の有効性を検証する。

2. IDR(s)法

IDR(s)法はクリロフ部分空間法の一つだが、双直交条件に基づく BiCG 法系統の反復法や、最小条件に基づく GMRES 法とはまったく異なる方法であり、以下に示す拡張 IDR 定理に基づき近似解を生成する。

$$G_j = (I - \omega_j A)(G_{j-1} \cap \text{Null}(P^H)) \dots \dots \dots (1)$$

$$G_j \subseteq G_{j-1} \text{ for all } j > 0, G_j = \{\theta\} \text{ for some } j \leq N \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 G_j は一連の空間、 $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 、 P は一次独立なベクトル p_i ($i = 1, 2, \dots, s$) を列ベクトルにもつ行列、 $\text{Null}(P^H)$ は行列 P^H の零空間、 ω_j は非零のスカラー、上付き添え字 H は共役転置を表す。また、空間 G_j の次元を d_j とするとき、以下の式が成り立つ。

$$0 \leq d_j - d_{j+1} \leq d_{j-1} - d_j \leq s \dots \dots \dots (3)$$

証明は文献2)を参照されたい。残差ベクトル r_n が空間 G_j に属するように

$$r_n = (I - \omega_j A)v, v \in (G_{j-1} \cap \text{Null}(P^H)) \dots \dots \dots (4)$$

と生成することにより、反復ごとに残差を探索する空間の次元が減少していき、残差ベクトルは零ベクトルに収束する。

3. 時間周期有限要素法

〈3・1〉 定式化 A - ϕ (磁気ベクトルポテンシャルと電気スカラーポテンシャル) 法により離散化されたある時間ステップ i における準定常磁場解析における方程式を

$$S_i A_i + C \frac{\partial}{\partial t} A_i = F_i \dots \dots \dots (5)$$

とする。ここで、

$$S_i = \begin{bmatrix} R^T M_v' R & O \\ O & O \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} M_\sigma & M_\sigma G \\ G^T M_\sigma & G^T M_\sigma G \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [M_v']_{k,j} &= \iiint_V (\nu' N_k^f \cdot N_j^f) dV \\ [M_\sigma]_{k,j} &= \iiint_V (\sigma N_k^e \cdot N_j^e) dV \dots \dots \dots (6) \\ F_i|_k &= \iiint_V (N_k^e \cdot J^i) dV \end{aligned}$$

であり、 N_i^f は面要素基底関数、 N_i^e は辺要素基底関数、 σ は導電率、 ν は磁気抵抗率、 R は回転行列、 G は勾配行列、 O は零行列、 A_i は A と ϕ からなる解ベクトルである。

ここで外力項が周期関数であり、定常解において1周期を $2n$ 分割し、

$$A_{i+n} = -A_i, F_{i+n} = -F_i \dots \dots \dots (7)$$

の半周期の時間周期境界が成り立つ場合を考える。時間微分を θ 法で近似した時、時間周期有限要素法の定式化は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_0 + \tilde{S}_1 & \dots & O & \tilde{C}_0 \\ -\tilde{C}_1 & \tilde{C}_1 + \tilde{S}_2 & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & -\tilde{C}_{n-1} & \tilde{C}_{n-1} + \tilde{S}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \vdots \\ \tilde{F}_n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i &= \frac{C}{\Delta t} - (1-\theta)S_i, \tilde{S}_i = (1-\theta)S_{i-1} + \theta S_i \\ \tilde{F}_i &= \frac{(1-\theta)F_{i-1} + \theta F_i}{\Delta t} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

したがって、係数行列は非対称となる。時間微分の設定として、本稿では $\theta=1$ (後退差分) とした。

時間周期有限要素法は、過渡状態を経ることなく時間領域の定常解を直接求めることができる。しかし、(未知数の数 \times 1 周期 (もしくは半周期) のステップ数) 次元の係数行列を扱わなければならないため、計算コストに難点がある。

〈3・2〉 数値解析による検証 電気学会「実規模電磁界解析のための数値計算技術調査専門委員会」にて提案されているベンチマークモデルの一つであるボックスシールドモデル¹⁾を対象として、線形渦電流解析を実行する。図1に、メッシュ分割図を示す。対称性より、1/8 領域を解析した。1 周期を 20 分割とし、半周期の時間周期境界条件を採用した。要素数は 24676、未知数は 831080 である。反復法は、相対残差が 10^{-8} 以下で収束とした。使用計算機は Xeon X5472 / 3.0GHz, 8.0 GB RAM である。IDR(s)法、BiCGSTAB2 法および GMRES(k)法の比較を行った。

図2に、各反復法を用いた際の収束特性を示す。また表1に、収束までに要した計算時間と反復回数を示す。GMRES(k)法では、リスタート周期 k が大きくなるにつれて反復回数が減少するが、計算時間は増加している様子が確認できる。同様に、IDR(s)法においても、 s を大きくするにつれて反復回数は減少するが、一反復あたりの計算コストは大きくなるため、 $s=15$ 程度で最も高速となる。しかし、計算時間・反復回数の観点では、本解析例においては BiCGSTAB2 法が最も有効であった。

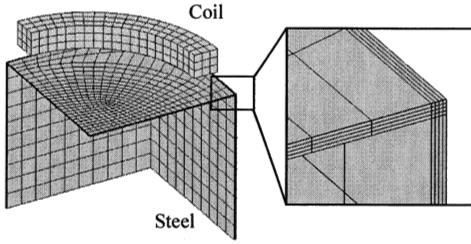


図1 Box shield model のメッシュ分割図 (1/8 モデル)

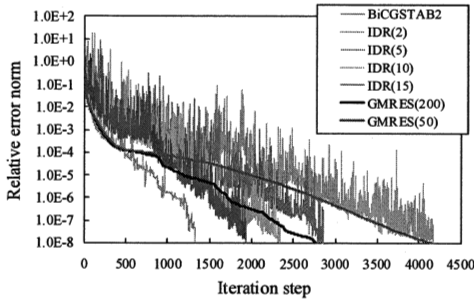


図2 残差の収束特性 (Box shield model)

表1 計算時間と反復回数 (Box shield model)

Iterative method	Iteration steps	CPU time [s]
BiCGSTAB2	1326	672.0
IDR(2)	4175	1146.0
IDR(5)	2856	886.9
IDR(10)	2331	869.4
IDR(15)	1935	843.0
IDR(20)	1827	908.5
GMRES(50)	4157	1828.0
GMRES(100)	2940	1904.8
GMRES(200)	2761	2917.6

4. 渦電流場における導体表面電荷解析

〈4・1〉 定式化 電気機器を設計する上で有用な情報を高精度に抽出する一手法として、渦電流場における導体表面電荷解析について述べる。導体表面電荷は導体中に発生する渦電流分布に大きく依存するため、例えば機器内における導体形状の変化が機器性能に及ぼす影響の評価をはじめ、様々な機器特性の情報抽出を行う上で有効に活用できる^{12), 13)}。

導体表面電荷解析の手順として、まず $A-\phi$ 法により得られた任意のゲージ条件下の解に対して、クーロンゲージを課す。辺要素有限要素解析では離散化後もゲージ変換が可能であり、 $A-\phi$ 法においてはベクトル場 A とスカラー場 ϕ のゲージ変換が数値計算上厳密に行うことができる。次に、得られたクーロンゲージ条件下での電気スカラーポテンシャル ϕ_c から、電束に関するガウスの法則により導出される(9)

式を用いて表面電荷を算出する。ここで n は、境界要素数である。(9)式左辺の ϕ_c は、有限要素解析から得られた電気スカラーポテンシャルの中で、導体表面上のものを用いる。(9)式右辺第1項は、無限遠点においてポテンシャル値をゼロとする基準を有する電気スカラーポテンシャルである。しかし、有限要素解析で得られる ϕ_c には定数分の不定性が存在するので、その無限遠点における基準値を未知定数 λ とおき、(9)式右辺第2項のように考慮して解く必要がある。また新たに定数 λ を追加するため、方程式の数を補う目的で、導体表面上の電荷の総和がゼロであることを意味する(10)式を連立する。初期条件として、考察対象の導体に既知量の電荷が与えられている場合は、その電荷量に応じて(10)式の右辺を置き換えればよい。

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_S \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \right\} + \lambda \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_S \sigma_i(\mathbf{r}') dS' \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

対称性を有するモデルの場合、誘導される導体表面電荷分布は対称面に対して反対称な分布となる。この電荷分布の反対称性から(10)式は自動的に満足される。さらに反対称性を有する電荷分布が作る電気スカラーポテンシャルを(9)式右辺第1項で計算した場合、対称面上においても $\phi_c = 0$ となるのが容易にわかる。したがって、対称面上で $\phi_c = 0$ となる電気スカラーポテンシャルをあらかじめ有限要素解析から得ることができれば、その無限遠点における基準値 λ はゼロであり、(9)式の λ は消去できる。ここで有限要素解析において、対称面上で $\phi = 0$ 、 $\phi_c = 0$ の固定境界条件を与えれば、有限要素解析で得られる電気スカラーポテンシャルと積分方程式で用いる電気スカラーポテンシャルとの間で定数分の不定性は解消される。よって、(11)式のみによって表面電荷密度が決定できる。

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_S \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

もし、導体外部のソースから生じる静電場が存在する場合は、前述の積分方程式上で重畳させることにより、その影響を考慮できる。

〈4・2〉 高速多重極法と反復前処理 高速多重極法は、多体間相互作用の近似値を必要な精度を確保しつつ高速に計算する手法である。点電荷の集合を含む空間に階層構造を取り入れ、その構造を利用して分割統治計算を進める。その計算過程において、できるだけ多くの点電荷からの影響を多重極・局所展開表現を用いて一括計算を行う。この概要を簡単に述べる。

解析領域全体を含む立方体を根(ルートセル)と呼び、レベル0のセルとする。その立方体を8等分してレベル1のセルを作成する。以下同様に、レベル*i*のセル(親セル)を8等分してレベル*i+1*のセル(子セル)を作成し、設定し

た最下層までセル分割を繰り返す。セル構造の最下層を葉（リーフセル）と呼ぶ。このセル構造に基づいて、以下の計算を実行する。

1. リーフを含む点電荷が作る場合を、セル中心に定義された多重極展開を用いてまとめて表現する。
2. レベルを一つずつ減少させながら、子セルで定義された多重極展開の中心を親セルの中心に移動して加え合わせ、これをルートセルまで繰り返す (M2M)。以上で、すべてのセルに多重極展開が定義された状態となる。
3. 親セルに局所展開がある場合には、その局所展開の中心を自分のセルの中心に移動し、加え合わせる (L2L)。
4. 親セルの近傍に含まれる自分のセルと同レベルのセルのうち、自分から遠方にあるセルを選び、そのセルの多重極展開を自分のセルの局所展開に変換して加え合わせる (M2L)。以上で、遠方セルからの全寄与が、各セルの局所展開として表現される。
5. リーフにおいて、局所展開の寄与と近傍セル内の点電荷の影響を加え合わせ、任意の点でのポテンシャルを求める。

なお、FMM ではセルの遠近をセルの離隔数で判定する。本稿では、近傍セルは 1 隣接セルまでとし、対角変換版高速多重極法を用いた^{11), 12), 21)} (9), (11)式を数値面積公式に応じた積分点に離散化すれば、上述のアルゴリズムはそのまま適用可能である。FMM の導入により、密係数行列をメモリに格納することなく、行列ベクトル積を高速に計算することができる。

一方、反復前処理²⁰⁾は、FMM の特長を活用した前処理である。反復法では、係数行列 A と任意ベクトル b_{arb} の積 Ab_{arb} の計算が必要である。その収束性を高めるため、近似行列 A_{approx} を用いた前処理 $A_{approx}^{-1}b_{arb}$ を行う。反復前処理では、 $A_{approx}x_{arb} = b_{arb}$ に反復法を適用し $x_{arb} = A_{approx}^{-1}b_{arb}$ を求めることで前処理を実行する。つまり、 $Ax = b$ の解を求めるループ (主反復) の中に前処理部分である $x_{arb} = A_{approx}^{-1}b_{arb}$ を求めるループ (副反復) が存在し、入れ子状の構造となる。副反復は前処理用であるから求める値は近似値でよい。そのため、FMM の計算精度を故意に落とすことで高速化を図ることができる。このとき、 A_{approx} は遠方からの寄与も含めた A の大域的な近似行列となるため、良好な収束特性が期待できる。

密連立一次方程式の反復法として、GMRES 法や BiCGSTAB 法などが一般的に用いられている。GMRES 法は 1 反復あたりの行列ベクトル積の回数が 1 回だけであり、BiCG 系統の反復法の 2 回に比べ計算時間の観点から優位だと考えられる。しかし、GMRES 法では反復ごとに生成されるクリロフ部分空間基底ベクトルを破棄せずメモリに格納する必要があり、反復回数が増えるたびに計算量およびメモリ量が急激に増加する。反復前処理を導入した反復法では、主反復は高々数回の反復で収束するが、副反復内では多くの反復回数が必要とされる。以上の理由から、GMRES 法は副反復内の解法としては適さないと考えられるため、

主反復にのみ採用した。また、IDR(s)法を主反復に採用する場合は、反復回数が高々数回であるため、 $s = 2$ とした。主反復・副反復は、相対残差が $10^{-8} \cdot 10^{-4}$ 以下で収束とした。

〈4・3〉 数値解析による検証 複雑形状を有する実機として、電気学会誘導電動機ベンチマークモデル (K モデル)²²⁾を対象に大規模導体表面電荷解析を実行する¹³⁾。有限要素解析には四面体要素、導体表面電荷解析には三角形要素を採用し、表面に現れる四面体要素の三角形と境界要素を一致させている。図 3 に、有限要素解析に用いたメッシュ分割図を示す。モデルの対称性を考慮し、1/4 領域を解析領域とした。四面体要素数・境界要素数は、それぞれ 629,152・18,598 であり、すべりは 1 とした。図 4(a)に、有限要素解析により得られた二次導体中のある瞬間の渦電流密度分布を示す。この渦電流分布に対応した 2 次導体の表面電荷密度分布を図 4(b)に示す。渦電流が強く拘束されている部分に表面電荷が誘導されていることが確認できる。

表 2 に、収束までに要した計算時間と反復回数を示す。(a)と(b)を比べると、IDR(s)法は BiCGSTAB2 法よりも副反復の収束を加速することができるため、高速化が達成されている。一方、(a)と(c)を比較すると、IDR(s)法を主反復で用いた場合には GMRES 法ほどの収束性が得られていない。以上の結果より、GMRES 法を主反復、IDR(s)法を副反復で用いる組み合わせが、計算時間の観点から最も効果的であった。

5. 有限要素・境界要素併用法

〈5・1〉 定式化 有限要素法と境界要素法の特徴を併せ持つ有限要素・境界要素併用法は、空気領域の要素分割が不要で、電磁現象特有の様々な困難さ (開領域、非線形・異方性・多媒質、移動境界) にも対応可能であり、汎用性および解析モデル作成の観点から非常に有効な解析手法である。本稿では、有限要素・境界要素併用法として、未知数に磁気スカラーポテンシャルを多用する $T\text{-}\Omega\text{-}\psi$ 法¹⁴⁾を採用する。本手法の特長として、広大な空気領域や非線形磁性体領域など、渦電流領域以外はすべてスカラー変数で定式化するため、未知数の個数を最小限に抑えることができる。したがって、有限要素・境界要素併用法の膨大な使用メモリを極力抑えることが可能となり、大規模問題への適用を視野に入れた場合、有効な解析手法と考えられる。

本稿では、解析領域として次の 2 つを想定する。領域 Ω_0 は空気領域であり、その中には励磁電流 J_0 が含まれ、領域境界 Γ_0 は無限遠まで及ぶものとする。考察物理量は磁気スカラーポテンシャル ψ である。領域 Ω_c は渦電流領域であり、領域境界を Γ_c 。その導電率 σ_c は線形、透磁率 μ_c は線形または非線形とする。考察物理量は電流ベクトルポテンシャル T と磁気スカラーポテンシャル Ω である。空気領域には境界要素法を、渦電流領域と非線形磁性体領域には有限要素法を適用する。有限要素解析には一次四面体要素、境界要素解析には 0-1 次混合四角形要素¹¹⁾を採用し、表面に現れる六面体要素の四角形と境界要素を一致させている。

渦電流領域における定式化は、従来用いられている $T\text{-}\Omega$

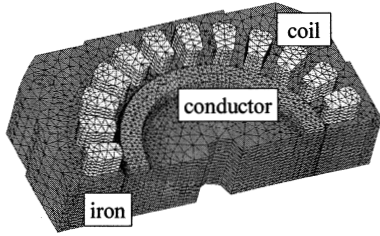


図3 かご型誘導電動機のメッシュ分割図 (1/4 モデル)

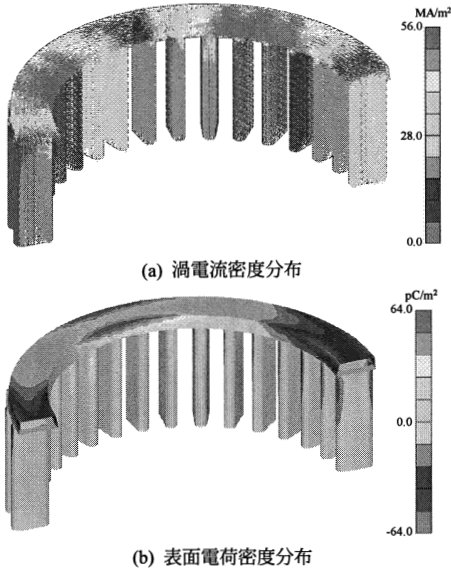


図4 かご型誘導電動機の表面電荷解析結果

法の有限要素法と同形式となる。 W をベクトル補間関数, N をスカラー補間関数とし, 境界条件を考慮すると残差方程式は次のようになる。

$$\int_{\Omega_c} \frac{1}{\sigma_c} (\nabla \times T) \cdot (\nabla \times W) d\Omega + \int_{\Omega_c} W \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu_c (T - \nabla \psi) d\Omega = 0, \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\int_{\Omega_c} \nabla N \cdot \mu_c (T - \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Gamma} N \mu_c (T - \nabla \psi) \cdot n d\Gamma = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで, n は境界の外向き単位法線ベクトルである。
励磁電流の存在する空気領域 Ω_0 における定式化は, 3 次元ラプラス場におけるグリーン関数 G を用いて以下の式で表すことができる。

$$\frac{C_p}{4\pi} \psi_p = \int_{\Gamma} G \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \psi d\Gamma + \psi_j \quad \dots\dots\dots(14)$$

表2 計算時間と反復回数 (かご型誘導機の二次導体)

	s	Iteration steps	CPU time [s]
(a) GMRES(k)+BiCGSTAB2	1	5	48.64
	2	5	51.94
	3	5	45.38
	5	5	42.80
(b) GMRES(k)+ IDR(s)	5	5	42.08
	8	5	40.55
	10	5	40.34
	15	5	43.41
	2	6	55.67
(c) IDR(2)+ IDR(s)	3	6	52.86
	5	6	51.41
	8	6	50.59
	10	6	48.39
	15	6	50.25
(d) BiCGSTAB2+BiCGSTAB2		3	54.38

ここで, C_p は考察点 P より対象領域を見込む立体角, ψ_j は励磁電流により形成される磁気スカラーポテンシャルである¹⁴⁾。境界要素法部分の膨大な計算コストを削減するために, (14)式右辺第1項と第2項に対角変換版高速多重極法を導入する。

〈5・2〉 数値解析による検証 高速多重極法を導入した有限要素・境界要素併用法による解析を, 図5に示す非対称渦電流場検証モデル (TEAM Workshop Problem 7)²³⁾ を例題として実行する。定常状態を解析するため, (12)式の時間微分を $j\omega$ で置き換え, 複素数解析を行った。穴あき導体を単連結領域とするため, 本稿では穴部分に導電率 1.0 S/m を与えた²⁴⁾。図6に, メッシュ分割図を示す。導体領域 (有限要素領域) には(12)式および(13)式を, 空気領域 (境界要素領域) には(14)式を用いた。前処理として, 不完全LU分解付き反復前処理¹⁷⁾を用いた。反復法は, 主反復・副反復それぞれで相対残差が $10^{-8} \cdot 10^{-4}$ 以下で収束とした。また, 副反復における反復回数上限値を 500 とした。有限要素数は 43200, 境界要素数は 10800 である。

図7に, 主反復と副反復のさまざまな組み合わせにおける残差の収束状況を示す²⁵⁾。4.3節と同様, GMRES法を主反復, IDR(s)法を副反復で用いる組み合わせにより, 計算時間の観点から最も良好な収束性が得られている。

6. まとめ

非対称マトリクスを扱う電磁界数値解析手法として時間周期有限要素法, 渦電流場における表面電荷解析, 有限要素法・境界要素法を取りあげ, 近年開発された反復法である IDR(s)法の有効性を検証するとともに, 従来良く用いられている GMRES 法や BiCGSTAB2 法との比較を行った。その結果, 時間周期有限要素法においては, BiCGSTAB2 法が最も良好な収束特性を有していた。一方, 高速多重極法および反復前処理を導入した表面電荷解析および有限要素・境界要素併用法においては, 主反復に GMRES 法, 副反復に IDR(s)法という組み合わせが, 計算コストの観点から非常に有効であることを明らかにした。IDR(s)法では, パラメータ s の選び方により収束性が大きく変化する。今後の課題として, 最適な s の決定法の開発があげられる。

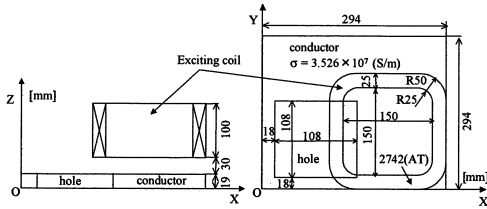


図5 TEAM workshop problem 7

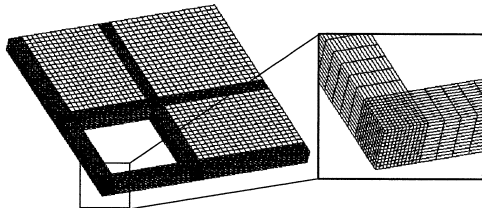


図6 TEAM workshop problem 7 のメッシュ分割図.

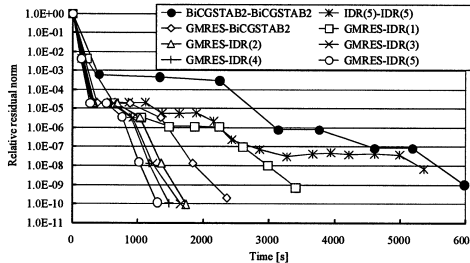


図7 残差の収束特性 (TEAM workshop problem 7)

参考文献

- 1) 実規模電磁界解析のための数値計算技術調査専門委員会：「実規模電磁界解析のための数値計算技術」, 電気学会技術報告, no. 1129 (2008).
- 2) P. Sonneveld and M. B. van Gijzen, "IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems," Delft University of Technology, Report 07-07 (2007).
- 3) T. A. Davis, Sparse Matrix collection, <http://www.cis.ufl.edu/research/sparse/matrices/>
- 4) 尾上勇介, 藤野清次, 中嶋徳正: 「IDR(s) 法の算法の概要と収束性評価」, 日本応用数理学会 2007 年度会講演予稿集, pp. 126-127 (2007).
- 5) 尾上勇介, 藤野清次, 中嶋徳正: 「前処理つき IDR(s) 法の演算量と収束性評価」, 日本応用数理学会 2007 年度会講演予稿集, pp. 128-129 (2007).
- 6) 中嶋徳正, 藤野清次, 立居場光生, 尾上勇介: 「多物体電磁波散乱問題の境界要素解析における IDR(s) 法の適用 (1) - 左前処理と右前処理による収束性の比較 - 」, 日本応用数理学会 2007 年度会講演予稿集, pp.130-131 (2007).
- 7) 中嶋徳正, 藤野清次, 立居場光生, 尾上勇介: 「多物体電磁波散乱問題の境界要素解析における IDR(s) 法の適用 (2) - GMRES 法との収束性およびメモリ量の比較 - 」, 日本応

- 用数理学会 2007 年度会講演予稿集, pp. 132-129 (2007).
- 8) 尾上勇介, 藤野清次, 中嶋徳正: 「適応的に s を変化させる IDR(s) 法 Adaptively tuned IDR(s) method for parameter s 」, クリコフ別府フォーラム, pp.71-76 (2008).
- 9) T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, K. Muramatsu, H. Ohashi, and H. L. Zhu, "Practical Analysis of 3-D Dynamic Nonlinear Magnetic Field Using Time-Periodic Finite Element Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1416-1419 (1995)
- 10) H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin, "A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions," *J. Comput. Phys.*, vol. 155, pp. 468-498 (1999).
- 11) L. Greengard and V. Rokhlin, "A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions," *Acta Numerica*, vol. 6, pp. 229-269, 1997.
- 12) Y. Fujishima and S. Wakao, "Surface Charge Analysis in Eddy Current Problems," *IEEE. Trans. Magn.*, vol. 39, No. 3, pp. 1123-1126, 2003.
- 13) Y. Takahashi, Y. Fujishima, and S. Wakao, "Large-Scale Analysis of Surface Charge in Eddy-Current Problems by the Fast Multipole Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1700-1703 (2005).
- 14) S. Wakao and T. Onuki, "Novel Boundary Element Formulation in Hybrid FE-BE Method for Electromagnetic Field Computation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, pp. 1162-1165 (1992).
- 15) S. Wakao, T. Onuki, and M. Shimazaki, "3D Eddy Current Analysis by the Hybrid FE-BE Method Using Magnetic Field Intensity H_z ," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 5, pp. 2259-2261 (1992).
- 16) S. Wakao and T. Onuki, "Electromagnetic Field Computations by the Hybrid FE-BE Method Using Edge Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1487-1490 (1993).
- 17) Y. Takahashi and S. Wakao, "Large-scale Analysis of Eddy Current Problems by the Hybrid Finite Element-Boundary Element Method Combined with the Fast Multipole Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 671-674 (2006).
- 18) Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems," SIAM, 2003
- 19) 藤野清次, 張 紹良: 「反復法の数理」, 朝倉書店 (1996)
- 20) S. Hamada and T. Takuma, "Effective Precondition Technique to Solve a Full Liner System for the Fast Multipole Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 3, pp.1666-1669 (2003).
- 21) 濱田昌司, 小林哲生: 「ボクセルデータ用高速多重極表面電荷法による低周波磁界誘導電界計算」, 電学論, vol. 126-A, no. 5, pp. 355-362 (2006)
- 22) 電気学会: 「回転機のバーチャルエンジニアリングのための電磁界解析技術」, 技術報告, no. 776 (2000).
- 23) K. Fujiwara and T. Nakata, "Results for benchmark problem 7 (asymmetrical conductor with a hole)," *COMPEL*, vol. 9, no. 3, pp. 137-154 (1990).
- 24) T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, and Y. Okada, "Improvements of the T - Ω Method for 3-D Eddy Current Analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, no. 1, pp. 94-97 (1988).
- 25) T. Tatsuishi, Y. Takahashi, S. Wakao, M. Tobita, I. Tominaga, and H. Kikuchi, "Large-Scale Eddy-Current Analysis of Conductive Frame of Large-Capacity Inverter by Hybrid Finite Element-Boundary Element Method," *IEEE Trans. Magn.* (to be published).