

## 平面の検出・姿勢推定を利用した 一般道路環境下におけるロバストな障害物検出

関 晃仁<sup>†</sup> 奥富 正敏<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 東京工業大学 大学院理工学研究科 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1

E-mail: †a-seki@ok.ctrl.titech.ac.jp, ††mxo@ctrl.titech.ac.jp

あらまし 本論文では、車載ステレオカメラを使った障害物検出手法を提案する。一般道路では、歩行者や自転車などの比較的小さい障害物から自動車などの大きな障害物まで検出することが必要である。また路面パターンと障害物を画像中から区別するには、道路面に対する物体の位置を測定する必要がある。しかし、舗装の状態が高速道路に比べてよくないため、走行中に車両が大きく揺れることがあり、カメラと道路面の位置関係を動的に推定する必要がある。本論文では、平面に相当する画像間の射影変換行列を動的に推定することで平面領域を決定する。次に、ステレオ計測をして得られた空間位置を推定された平面の射影変換行列から得られた平面の姿勢を使って平面に対する座標系に変換する。さらに、この座標系を利用してセグメンテーションを行なうことで障害物を検出する。最後に実画像を用いて、提案手法の有効性を示す。

キーワード 障害物検出, 平面抽出, 姿勢推定, ステレオカメラ

## Robust Obstacle Detection in General Road Environment Based on Road-Region Extraction and Pose Estimation Method

Akihito SEKI<sup>†</sup> and Masatoshi OKUTOMI<sup>†</sup>

<sup>†</sup> Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

Ookayama 2-12-1, Meguro-ku, Tokyo, 152-8550 Japan

E-mail: †a-seki@ok.ctrl.titech.ac.jp, ††mxo@ctrl.titech.ac.jp

**Abstract** In this paper, we propose the method for obstacle detection using vehicle-mounted stereo cameras. We have to measure the position from road plane for the purpose of deviding road patterns or obstacles in the image. But, the state of general road is worse than that of highway, a vehicle sometimes vibrates larger in the road. We first dynamically estimate road region and position. Subsequently, we measure 3D position of points within non-road region using stereo images. Next, segmentation method is applied about the possible space of vehicle's passing and we detect obstacles. Finally, we present the experimental results of obstacle detection with our method.

**Key words** obstacle detection, planar region extraction, pose estimation, stereo camera

### 1. はじめに

近年、自動車のインテリジェント化が進み、車載カメラを利用して白線を認識し、走行車線をキープする機能を持つものや、ミリ波レーダなどのセンサを利用して前走車を検出して最適な制御を行う自動車などが実用化されている。

しかし、これらの技術は、センサの特性や環境が整備されている必要などから、高速道路などの限られた環境下でしか利用できない。一方、交通事故の大部分は市街地で起こっている。市街地は、高速道路などに比べて整備されておらず、白線などの路面パターンがかすれていたり存在しなかったり、歩行者や

自転車などの比較的小さい物体が存在したりと、複雑な環境である。一般道路環境のように複雑な状況を認識するには、空間解像度が高いことが必要とされる。そのようなセンサとして、比較的安価であるカメラがあげられる。

単眼カメラを用いる方法として、画像内の2次元的な動きをオプティカルフローなどを用いて推定し、道路路面などの背景と動きの異なるものを障害物領域として検出する方法[8]、[16]がある。しかし、小さい物体などについてはオプティカルフローを正確に求めることが難しい。また、道路平面上にある水平エッジと障害物上にある水平エッジの複比を比較することで障害物を検出する方法[11]などが提案されている。これら単眼

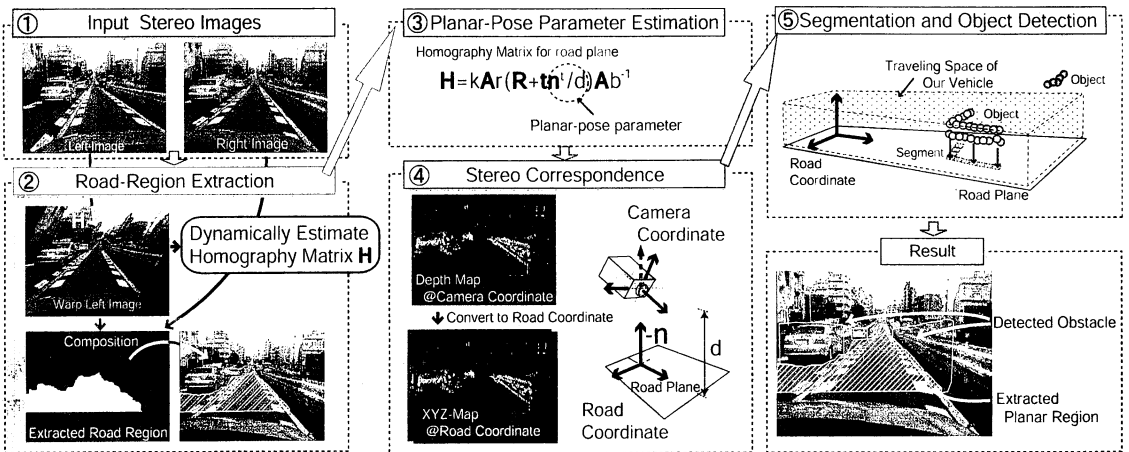


図1 提案手法の処理の流れ

による方法では、対象やカメラ配置などに何らかの拘束を設けないと障害物までの距離を出すことができない。

次に複眼カメラを用いる方法として、著者らは以前に道路面を平面と仮定して道路平面領域の時間変化によって障害物を検出する手法を考案した[14]。他には、ステレオ画像をそれぞれ平面に投影した2枚の画像間の差から障害物を求める方法が考案されている[2], [3], [6]。しかし、障害物が平面と接していないと障害物までの距離を正しく求めることができない。また、それぞれの画像の対応点探索を行うことで、3次元再構成をし、障害物を求める手法が考案されている[7], [10], [13], [17]。Labayardeら[7]は、ステレオ計測された点群の3次元情報から道路面を推定し、車両の後面などをカメラに対して平行な平面と想定することで、障害物を検出する手法を提案している。この手法は空間中の平面を決定するために、画像中の道路面内についてもフロントパラレルを想定した従来のウィンドウベースのマッチングを行ない、その3次元位置情報より平面を決定している。しかし、Williamsonら[15]は道路面のようにフロントパラレルと大きく異なる面に対して、従来の変形を許さないウィンドウベースのマッチングでは左右画像のウィンドウ内での変形が大きく、対応点を正しく求めることが難しいと述べている。

そこで本論文で提案する手法では先に道路面を検出し、非平面領域について3次元計測を行なう。計測された3次元位置を道路面に対する座標系に変換し、自車両の通過する空間についての物体を抽出することで障害物を検出する。

本論文で提案する手法は、ステレオ画像の入力から障害物検出までの一貫したシステムとして、平面領域を検出する処理を用いることで、非平面領域だけに限定して対応点探索を行えばよいことや動的に推定された姿勢パラメータを利用することで車両の振動に耐えることができること、さらに投影面を用いることで陽に対象をモデル化することなく安定に物体を抽出できることなどのそれぞれの処理の性質を巧く利用することで、実環境で実際に機能するシステムを構築した。

## 2. 提案手法の概要

提案する障害物検出手法の流れを図1に示す。始めに奥富ら[9], [12]の手法を利用して道路平面領域を抽出する。この手法では道路平面内について、左右の画像を一致させる射影変換行列を動的に推定する<sup>(注1)</sup>ことで平面領域を特定する。次に著者らが既に述べた方法[14]を利用することで、道路平面に対する射影変換行列から、カメラと道路面の姿勢パラメータを求める。道路面に対する射影変換行列は動的に推定されるため、道路領域と姿勢パラメータも路面に応じたものとなる。そのため車両に振動が生じ、道路面とカメラの関係が変わったとしてもそれに対応した姿勢パラメータを得ることができる。

次に障害物の空間位置を求める。障害物は画像中の平面領域以外に存在するため、抽出した平面領域以外のエッジ点に関して、ステレオ対応点探索を行なう。抽出した平面領域を活用することで、エッジ点の数を減らすことや探索範囲を限定することで計算コストを抑えられる。

さて、ステレオ対応点から得られた3次元位置はカメラを基準とする座標系である。カメラと路面の関係が分からないとそのエッジ点が障害物に属するものなのか、平面に属するものなのか区別することが困難である。また、自動車の振動などによって平面とカメラの位置関係が変化するため、その位置関係を固定することはできない。そこで、先ほど求めた姿勢パラメータを使うことで、道路面を基準とした座標系(道路座標系)に変換できる。道路座標系を使うことで、道路面に属するエッジ点は高さが0となるため、容易に区別することができる。また、自車両が通過する可能性のある、平面から一定の高さを持つ空間も容易に特定することができる。

道路環境中に存在する障害物は、自動車、歩行者やガードレールなど道路面に垂直なものが多い。そこで、自車両の通過する空間に含まれるエッジ点の空間位置を道路面に対して高さ

(注1): ウィンドウに変形を施して、左右画像のマッチングをとることに相当する。

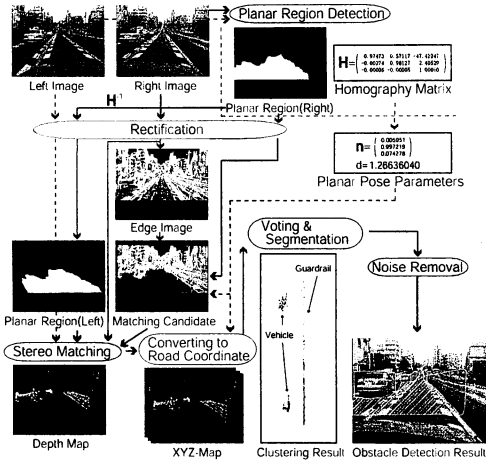


図2 障害物検出処理の全体図

方向に垂直に投影し、道路面を投票面とした投票を行なう。そして投票面を使い、セグメンテーションをして障害物を検出する。

### 3. ステレオ計測と障害物の検出

本節では、求められた平面領域と平面の姿勢パラメータを利用して、障害物を検出する方法について述べる。ステレオ画像の入力から障害物の検出処理までの全体像を図2に示す。

#### 3.1 画像の Rectification

ステレオ画像間の対応点探索は、基準画像上の注目点に関して参照画像のエピポーラライン上を探索することで対応点を求める。ステレオ画像間では、エピポーララインを画像の横軸と平行に一致させることで、ステレオ対応点探索時の処理を容易に高精度に推定することができる。そこで、Fusielloら[5]の手法を利用し、ステレオ画像の Rectification を行う。同様に平面領域画像も Rectification を行なう。

#### 3.2 平面領域と姿勢を利用した対応点探索候補の限定

対応点探索の候補を決定する方法について述べる。

まず自動車のボディのようにテクスチャレスな部分は、対応点を直接求めることができないため、対応点探索候補をエッジ部分のみにする。さらに先ほど求められた道路平面領域には障害物が存在しないことから、対応点探索候補から除く。また、平面の姿勢パラメータを使うことで画像中での検出範囲を決めることができるため、例えば画像の上部のように検出範囲外の領域に属する対応点探索候補を削除することができる。

次にステレオ画像の対応点を求める処理について説明する。対応点は実空間の奥行き方向に設定された範囲で参照画像のエピポーラ線上を探索し、最も類似性の高い位置を対応した位置とすることで求めることができる。図3に示すように、平面については射影変換行列で対応がついているため、その性質を考慮した対応点探索を行なう。同図で、基準カメラの光学中心  $O$  から  $AB$  方向への光線を考える。 $A$  は奥行き  $Z_{\min}$  での位置、 $B$  は  $Z_{\max}$  での位置とする。 $A$  が参照画像に投影される点は  $m_{r2}$  で

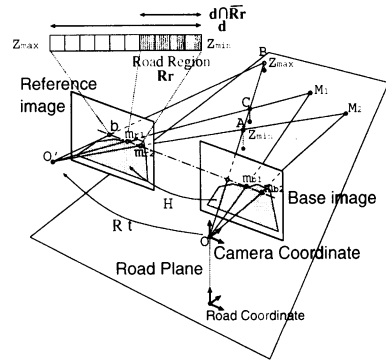


図3 対応点探索と平面領域の関係

あり、平面領域に含まれるため、基準画像の  $m_{b2}$  と対応がついている。すると、参照画像のエピポーラ線上で平面領域の端点である  $m_{r1}$ 、空間中では  $C$  より遠方が対応点の探索候補である。さて、その範囲において正規化相互相関関数が最大になる位置、

$$E(\hat{x}_r) = \arg \max_{x_r \in (d \cap R_r)} ZNCC[I_b(x_b), I_r(x_r)] \quad (1)$$

ただし、 $x_b = (u_b, v_b)$ 、 $d = (d_r, v_b)$  であり、 $d$  については奥行き範囲から、視差の範囲を限定することで、

$$d_r = f(Z, x_b) = \frac{P'_{11}X + P'_{12}Y + P'_{13}Z + P'_{14}}{P'_{31}X + P'_{32}Y + P'_{33}Z + P'_{34}} \quad (2)$$

ただし、 $d_r$  は  $Z \in [Z_{\min}, Z_{\max}]$  の範囲であり、

$$(X \ Y)^T = A^{-1}b$$

$$A = \begin{pmatrix} P_{11} - P_{13}u_b & P_{12} - P_{32}u_b \\ P_{21} - P_{13}v_b & P_{22} - P_{32}v_b \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} (-P_{13} + P_{33}u_b)Z - P_{14} + P_{34}u_b \\ (-P_{23} + P_{33}v_b)Z - P_{24} + P_{34}v_b \end{pmatrix}$$

で求められる。式中の  $P_{ij}$  は Rectification 後の基準カメラの透視投影行列の  $i$  行  $j$  列の要素である。同様に  $P'_{ij}$  は参照カメラについてである。また、 $R_r$  は参照画像における平面領域である。参照画像の平面領域は、基準画像の平面領域を射影変換行列  $H^{-1}$  で変換すればよい。式(1)より、対応点を求めることができる。非平面領域のみ探索を行なうことで、計算コストを抑えることができる<sup>(注2)</sup>。本論文では、Cross checking[4]を利用することで、マッチングミスを抑えている。

#### 3.3 カメラ座標系から道路座標系への変換

左右の画像の対応点を求めることで、三角測量の原理からカメラ座標系における3次元位置を求めることができる。カメラ座標系では、路面パターンなどの非障害物を区別することが困難であるため、道路面を基準とした座標系である道路座標系に変換する。射影変換行列から分解して得た、平面とカメラの距

(注2)：平面領域内のエッジ点を使わない処理と合わせて、約35%計算量が減少した。

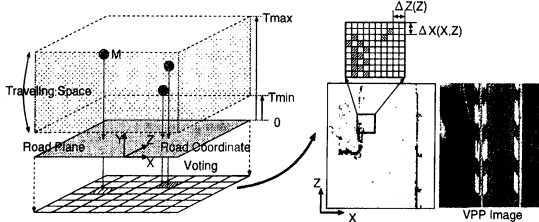


図4 車両の通過空間と投票処理

離  $d$  と基準カメラに対する平面の法線ベクトル  $\mathbf{n}_c$  を利用して、カメラ座標と道路座標間の変換を行う。この座標変換では、光軸方向が変わらない。道路座標系からカメラ座標系に変換するには、式 (3) を使う。

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{R}_{rc}(\mathbf{X}_r - \mathbf{t}) \quad (3)$$

回転行列  $\mathbf{R}_{rc}$  は、付録 1. で算出方法を示す。

この変換によってカメラと平面の位置関係が変化しても、点群は常に道路面を基準とした座標系に変換することができる。

### 3.4 道路面への投票を利用した障害物の抽出

道路座標系における点群の 3 次元位置を利用して障害物を抽出する。抽出したい障害物は、自車両が走行して通過する可能性のある空間に存在する物体である。そこで道路座標系に変換した点群のうち、車両の通過する可能性のある空間である、高さ  $T_{max}$  から  $T_{min}$  <sup>(注3)</sup> までに存在する点を垂直に投票面に射影し、投票する。その様子を図 4 に示す。同図の右側は、図 2 の入力画像を使用した際の投票した結果とその領域に相当する VPP 画像 [14] を示している。この例では、右側のガードレールと左車線の前走車や対応点探索ミスによるノイズに投票値があることがわかる。道路環境に存在する構造物は高さ方向に大きさを持つため、高さ方向に射影することによって少ない点群の 3 次元位置情報から障害物を抽出することが可能である。

次に投票面を利用してクラスタリングを行なう。クラスタリングは、空間中の幅と奥行を特徴量とした最短距離法を用いる。ここで、ステレオ計測では遠方になるにつれて奥行方向の誤差が大きくなる。対応点候補はピクセル単位であるため、遠方に存在する点数より近くに存在する点数が大きくなる。つまり、最短距離法によるクラスタの結合範囲を距離にかかわらず一定としてしまうと、遠方の物体が検出されなくなってしまう。そこで、結合範囲を平行ステレオ時の誤差 <sup>(注4)</sup> に従って、

$$\Delta Z(Z) = \frac{2\delta_u b f Z^2}{b^2 f^2 - \delta_u^2 Z^2} \quad (4)$$

$$\Delta X(X, Z) = \begin{cases} -\frac{\delta_u Z(2X-b)}{bf} & X < 0 \\ \frac{\delta_u Z}{2f} & 0 \leq X \leq b \\ \frac{\delta_u Z(2X-b)}{bf} & X > b \end{cases} \quad (5)$$

とする。ただし、 $\delta$  は有効画素間隔、 $f$  は焦点距離、 $b$  はベース

(注3)：本論文では、実験車両の大きさを考えて  $T_{max} = 2.0[\text{m}]$ 、 $T_{min} = 0.2[\text{m}]$  とした。

(注4)：本論文の実験環境が平行に近いステレオカメラ配置である。

ライン距離である。さらに生成されたクラスタから、ノイズを除去し、障害物を抽出する。障害物は、実空間中の位置とステレオ画像中での位置を求めることができるため、自動車の制御や他の画像処理に利用しやすいと考えられる。

## 4. 実験結果

提案手法を適用し、実画像に対して障害物検出を行なった結果を示す。

実験環境は、車両に PointGray Corp.Flea(焦点距離 6mm) を 2 台ほぼ平行に配置した。ベースライン長は 0.7m である。この装置で撮影される画像は 640x480pixel(VGA) である。処理はオフラインで行なった。

### 4.1 さまざまな環境における実験結果

車載カメラによる障害物検出には、耐環境性が求められる。そこで、本手法の有効性を確認するためにさまざまな環境下で撮影された画像に対して本手法を適用した。

まず図 6 の (A),(B) は晴天時の画像に関して、適用した結果を示す。実験結果には抽出した道路領域を斜線領域で示し、抽出した障害物は斜線の無い枠で囲み、平面から 1.5m の一定の高さで表示した。それぞれの結果から道路の側壁や車両、(B) ではコーンなどが障害物として検出されている。(C) は逆光のシーンである。(D) はトンネル内で走行しているシーンである。どちらも光量が少なく、暗い画像であるが、車両などが検出されている。さらに、(E),(F) は降雪中を走行するシーンである。降雪中の画像は、雪が映り込みノイズ成分となるが、本提案手法では雪壁や雪の積もった車両なども正しく検出されている。また、実験結果のカラー動画を [1] に掲載している。

#### 4.1.1 障害物の検出率

次に検出率について説明する。表 1 は、図 6 に示す Scene1 から Scene4 に対して提案手法を適用した結果である。表中の「画像枚数」はシーンの枚数である。「車両」「2 輪車」「歩行者」は、処理する前にあらかじめ画像に写るそれぞれの個数を数えて出現する数を調べた。検出数は、提案手法を適用して検出された障害物の数を数えた。検出率は、検出数の合計を出現数の合計で割った比率である。次に表 2 は表 1 で示したシーンにおける誤検出と未検出の内訳である。誤検出については、誤検出が生じた個数を距離ごとに数えた。未検出については、未検出が生じた時のその物体位置を距離ごとに数えた。

まず Scene1 は晴天の高速道路を走行するシーンである。表 1 より、出現した車両 184 個はすべて検出されているものの、2 輪車が検出されない場合があり、検出率が 96% である。Scene1 において未検出となった 2 輪車は、表 2 より 30~45m に存在していることを示している。未検出の原因としては、遠方で隣接車線の車両の陰によって障害物が明確に映らない場合であった。

Scene2 は、晴天時の市街地を走行するシーンである。検出率は 98.9% であり、未検出はなかったが誤検出が遠方に少し発生している。誤検出の原因は、繰り返しパターンやオクルージョンなどによってステレオ画像間の対応点が正しく求めることができない場合、路面が平面でない場合や逆光によるフレアの影響であった。

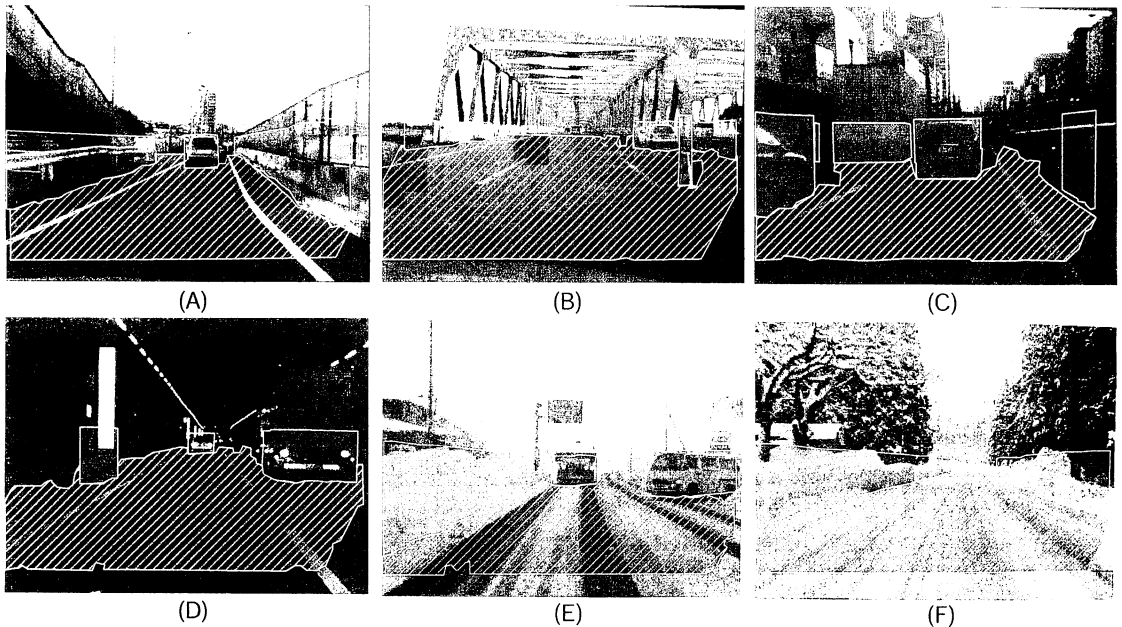


図5 様々な環境下における結果 (斜線領域が抽出された平面領域. 模様がない領域は検出された障害物領域)

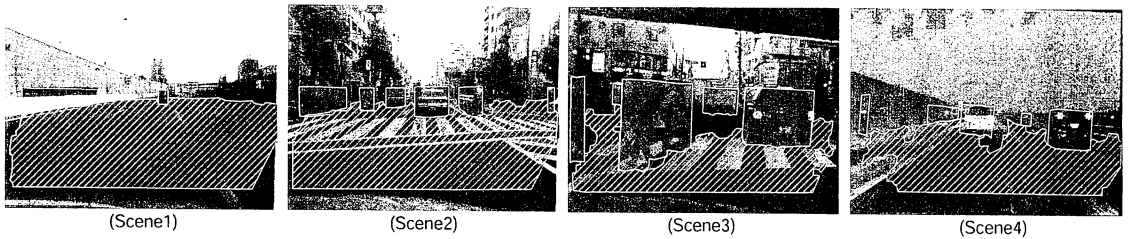


図6 検出率評価シーン (斜線領域が抽出された平面領域. 模様がない領域は検出された障害物領域)

Scene3は夕暮れの交差点で停止している車両の前を障害物が写るシーンである。このシーンでは、未検出誤検出ともになく、安定して障害物検出ができています。

Scene4は降雪している夜間の実験結果である。障害物が比較的近いところに存在することもあって、完全に検出されている。

これらの結果から晴天や夜間時においても提案手法は有効であることが確認できた。

#### 4.2 姿勢パラメータ利用の比較実験

本論文で提案する方法では、動的に推定された平面の姿勢パラメータを利用して障害物を検出しているが、姿勢パラメータを固定した結果について、比較実験を示す。

図7は、姿勢パラメータを車両が平地で静止している状態に固定した結果と、動的に推定した結果を示している。また姿勢パラメータを固定した方は、動的に射影変換行列が推定できないため、3.2節で述べた平面領域を利用した処理をしていない。同図の結果から平面の姿勢パラメータを固定すると、路面パターンである横断歩道が障害物として検出されていることが

表1 障害物の検出率

Scene (画像枚数)	車両 [数]		2 輪車 [数]		歩行者 [数]		検出率 [%]
	出現	検出	出現	検出	出現	検出	
1 (300)	184	184	300	281	0	0	96.1
2 (501)	1123	1123	294	294	0	0	98.9
3 (100)	154	154	64	64	129	129	100
4 (100)	174	174	0	0	0	0	99.4

表2 誤検出と未検出の距離別内訳

Scene	誤検出距離と個数			未検出距離と個数		
	0-15m	15-30m	30-45m	0-15m	15-30m	30-45m
1	0	0	0	0	0	19
2	1	4	12	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0

分かる。この結果から、姿勢パラメータを動的に推定することの有効性が確かめられた。

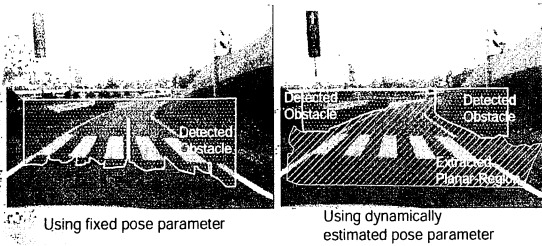


図 7 姿勢パラメータに関する比較実験 (画像中の斜線領域が抽出された平面領域, 点領域は検出された障害物領域)

## 5. まとめ

本論文では, 平面抽出処理をベースにしたロバストな障害物検出手法を提案した。提案した手法は, ステレオ画像の入力から障害物検出までの一貫したシステムとして, 画像から平面領域を検出する処理を用いることで, 障害物が存在する非平面領域だけに限定して対応点探索を行なうことや動的に推定された姿勢パラメータを利用することで車両の振動に耐えられること, さらに投票面を用いることで自動車, バイク, 歩行者などの道路環境に存在する物体を陽にモデル化することなく, 安定に検出できることなど, それぞれの性質を巧く利用することで実環境で実際に機能するシステムを構築した。

今後の課題として, 対応点探索のミスや道路面が曲面である場合などに誤検出や未検出が起こる場合があるため, より安定にしたり, 対応点探索に多くの計算時間を費やすため, その計算時間を減少させる必要がある。

## 文 献

- [1] <http://www.ok.ctrl.titech.ac.jp/>.
- [2] M. Bertozzi and A. Broggi. Real-time lane and obstacle detection on the gold system. In *Proc. IEEE Intelligent Vehicles*, pp. 213-218, 1996.
- [3] A. Broggi, M. Bertozzi, A. Fascioli, C. LoBianco, and A. Piazzi. Visual perception of obstacles and vehicles for platooning, 2000.
- [4] P. Fua. A parallel stereo algorithm that produces dense depth maps and preserves image features. *Machine Vision and Applications*, pp. 35-49, 1993.
- [5] A. Fusiello, E. Trucco, and A. Verri. A compact algorithm for rectification of stereo pairs. *Machine Vision and Applications*, Vol. 12, No. 1, pp. 16-22, 2000.
- [6] D. Keller, Q.T. Luong, and J. Malik. Using binocular stereopsis for vision-based vehicle control. In *Proc. IEEE Intelligent Vehicle*, pp. 237-242, 1994.
- [7] R. Labayrade, D. Aubert, and J.P. Rarel. Real time obstacle detection in stereovision on non flat road geometry through "v-disparity" representation. In *Proc. IEEE Intelligent Vehicles*, 2002.
- [8] G. Lefaix, E. Marchand, and P. Bouthemy. Motion-base obstacle detection and tracking for car driving assistance. In *Proc. ICPR*, Vol. 4, pp. 74-77, 2002.
- [9] M.Okutomi, K.Nakano, J.Maruyama, and T.Hara. Robust estimation of planar regions for visual navigation using sequential stereo images. In *Proc. IEEE ICRA*, pp. 3321-3327, 2002.
- [10] 森屋崇, 岩佐まもる, 石川直人, 中島直人. ステレオ画像を用いた市街地における車両衝突防止システム. 第 8 回画像センシングシンポジウム, pp. 77-82, 2002.

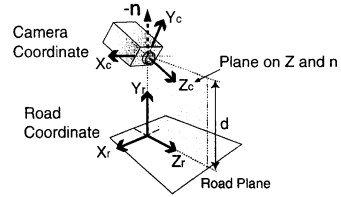


図 A.1 カメラ座標系と道路座標系

- [11] R. Okada, Y. Taniguchi, K. Furukawa, and K. Onoguchi. Obscure detection using projective invariant and vanishing lines. In *Proc. ICCV*, pp. 330-337, 2003.
- [12] 奥富正敏, 中野勝之, 丸山純一, 原智章. ステレオ動画像を用いた視覚誘導のための平坦部の連続推定. *情報処理学会論文誌*, Vol. 43, No. 4, pp. 1061-1069, 2002.
- [13] 実吉敬二, 塙圭二, 十川能之, 荒井一真. ステレオ画像を用いた運転者支援のための前方状況認識システム. *電子情報通信学会技術研究報告*, 1997.
- [14] 関見仁, 奥富正敏. ステレオ動画像を利用した平面抽出による障害物検出. *情報処理学会論文誌*, Vol. 45, No. SIG 13(CVIM10), pp. 1-10, 2004.
- [15] T. Williamson and C. Thorpe. A specialized multibaseline stereo technique for obstacle detection. In *Proc. IEEE CVPR*, 1998.
- [16] 吉沢博一, 松田一朗, 伊東晋. 道路領域の予測に基づいた車載カメラ映像からの車両検出. *電子情報通信学会技術研究報告*, Vol. 101, pp. 21-26, 2001.
- [17] Q. Yu, H. Araujo, and H. Wang. Stereo-vision based real time obstacle detection for urban environments. In *Proc. International Conference on Advanced Robotics*, pp. 1671-1676, 2003.

## 付 録

### 1. 座標変換

道路座標系からカメラ座標系に変換するには, 以下の式を利用する。また, この関係を図 A.1 に示す。

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{R}_{rc}(\mathbf{X}_r - \mathbf{t}) \quad \text{where } \mathbf{t} = [0, 0, d]^T \quad (\text{A-1})$$

次に  $\mathbf{R}_{rc}$  の求め方について説明する。まず,  $\mathbf{X}_c = \mathbf{R}_{rc}\mathbf{X}_r$  とする。そして, 一般的回転行列を考えて,

$$\mathbf{R}_{rc} = \begin{pmatrix} c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta\gamma & -c\beta s\alpha & c\gamma s\alpha\beta + c\alpha s\gamma \\ c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta & -c\alpha c\gamma s\beta + s\alpha s\gamma \\ -c\beta s\gamma & s\beta & c\beta c\gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

とする。ただし,  $c\alpha = \cos \alpha$ ,  $s\alpha = \sin \alpha$  である。 $\mathbf{n}$  と  $Y_r$  軸が一致していることと,  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  と  $Z_c$  軸で張る平面上に  $Z_r$  が存在することから  $\alpha, \beta, \gamma$  を求める。まず, 一つの条件より,

$$\mathbf{R}_{rc}\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \quad (\text{A-3})$$

から,  $\beta = \arcsin(n_z)$ ,  $\alpha = \arccos(n_y / \cos \beta)$  を得る。次に,  $Z_r$  は  $\mathbf{n}$  と  $Z_c$  軸で張る平面上に存在するので,

$$\mathbf{R}_{rc}\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_3 + b\mathbf{n}. \quad (\text{A-4})$$

$a, b$  は任意の定数であるとして, これから  $\gamma$  を求めると,  $\gamma = 0$  となる。