

解説



3. 情報工学に見られる不動点論の散策

3.5 見えない不動点を追う：分岐トポグラフィ†

松本 隆竹 徳永 隆治††

1. はじめに

ダイナミカルシステムのふるまいに定性的変化が起きる現象を分岐と呼んでいる。特に、システムのパラメータ空間内で安定不動点がどのように分布しているかは興味深い問題であり多くの実験的、及び理論的結果がある。これらは、安定不動点の種類でパラメータ空間を塗り分けた位相図として把握され、スケーリング則という規則に根ざした美しい幾何図形が観察できる。近年、研究者の観察対象であった「図」は、「絵」として広く一般に鑑賞されているのも事実である。

しかし、だれもが「なぜ、そのような美しい図形が現れるのか」を問わずにはいられないであろう。そして、その問題への解答の糸口は不安定（見えない）不動点に潜んでいるようである。

本解説記事において、分岐現象の豊かさが十二分にあり、しかも実験や理論的解析が可能な電子回路を例に取り、これら「見えない不動点」の様子を探っていく。この内容は、著者らのグループによって行われた一連の仕事の抜粋である<sup>1)~6)</sup>。

2. 電子回路の不動点

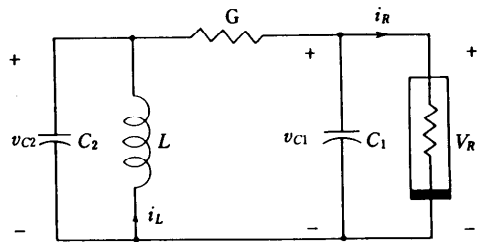
2.1 トラジェクトリの運命を眺める

図-1(a)の簡単な電子回路<sup>1)~6)</sup>を考える。この回路の状態変数は各コンデンサの端子間電圧  $v_{C1}$ ,  $v_{C2}$  とコイルの電流  $i_L$  である。右側の箱で囲まれた抵抗は図-1(b)の非線形能動特性\*をもつ。さ

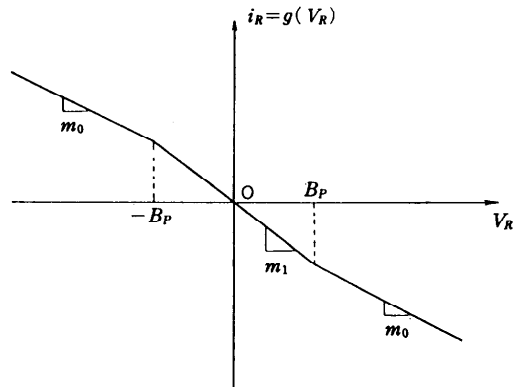
て、この回路の動作は以下の連続区分線形常微分方程式\*\*で記述され確定的である。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} &= G(v_{C2} - v_{C1}) - g(v_{C1}) \\ C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} &= G(v_{C1} - v_{C2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C1} \end{aligned} \quad (1)$$

三つの変数で張られた状態空間中で、現在の位置を1点と対応させるなら、系の過去も未来もこの点を通る唯一の連続曲線（トラジェクトリ）上の点として捕えられる。（図-2）コンデンサの端子間電圧  $v_{C1}$  と  $v_{C2}$  をオシロスコープの縦軸と横軸に接続することで、「運命の軌跡」であるトラジェクトリを観察できる。



(a) 回路図



(b) 非線形抵抗特性

図-1 非常に簡単な3階自律系電子回路

† Bifurcation Topography of the Double Scroll Circuit by Takaashi MATSUMOTO (Waseda University, Department of Electrical Engineering), Ryuji TOKUNAGA (Tsukuba University, Institute of Information Science and Electronics).

†† 早稲田大学電気工学科  
††† 筑波大学電子情報工学系

\* 系にジュール熱分のエネルギーを注入する抵抗。

\*\* 非線形性として連続区分線形性を用いることで、解の解析的表現が可能になり、この特性を生かすことで、(i)ポアンカレ写像の陰関数表現<sup>1)</sup>、(ii)その不動点方程式、分岐方程式の定式化<sup>6)</sup>が可能となる。

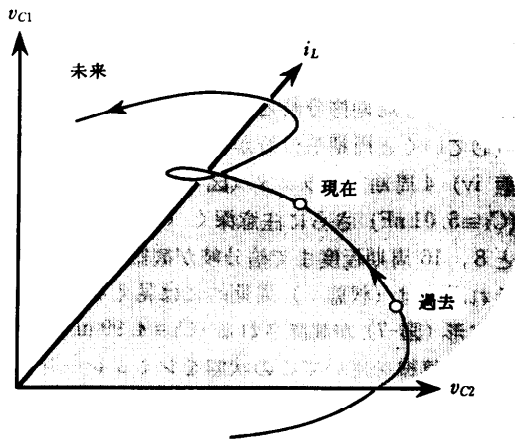


図-2 状態空間におけるトラジェクトリ

2.1.1 ホップ分岐と周期アトラクタ

実験において各素子は以下のように設定され、コンデンサ  $C_1$  を可変コンデンサで変化させる。

$$L = 8.56 \text{ mH}, C_2 = 49.5 \text{ nF}, R_1 = 1.40 \text{ k}\Omega,$$

$$m_1 = 0.625 \text{ mS}, m_0 = 0.323 \text{ mS}$$

以下に順を追って、図-3~12 に示された分岐現象を説明していく (表-1 参照)。

$C_1$  を十分大きくし回路の電源を投入する。このとき、オシロスコープ上では (状態  $i$ ) 単なる 1 点 (図-3) が観測される。これは、状態量が時間に依存せず一定値をとっていることを意味し平衡点と呼ばれる。平衡点は、(1)式の三つの右辺(ベクトル場)を 0 にする特殊な点で、そこに一度陥ったならば永久に動きえない。(1)式の平衡点は状態空間に三つ存在し、変換

$$(v_{C1}, v_{C2}, i_L) \rightarrow (-v_{C1}, -v_{C2}, -i_L) \quad (2)$$

に対してベクトル場が不変、すなわち原点对称であるため、一つの平衡点である原点  $O$  に対して上下二つの平衡点  $P^\pm$  が対称に位置する。 $O$  は

表-1 分岐径数値

分岐径数値	アトラクタ	分岐現象	図
$C_1 < C_H$	安定平衡点		3
$C_H \cong 5.13 \text{ nF}$		ホップ分岐	
$C_H < C_1 < C_D$	非対称 1 周期アトラクタ		4
$C_H \cong 5.07 \text{ nF}$		周期倍分岐	
$C_H < C_1 < C_{D1}$	非対称 2 周期アトラクタ		5
$C_{D1} \cong 5.01 \text{ nF}$		周期倍分岐	
$C_H < C_1 < C_{D2}$	非対称 4 周期アトラクタ		6
$C_{D2} \cong 4.99 \text{ nF}$		周期倍分岐列	
$C_C < C_1 < C_S$	非対称非周期アトラクタ		7
$C_S \cong 4.97 \text{ nF}$		サドルノード分岐	
	非対称 3 周期アトラクタ		8
	非対称非周期アトラクタ		
$C_1 \cong 4.80 \text{ nF}$		インテリア クライシス	
	対称非周期アトラクタ		9
$C_S \cong 4.76 \text{ nF}$		サドルノード分岐	
	対称 4 周期アトラクタ		10
	対称非周期アトラクタ		
$C_1 \cong 4.69 \text{ nF}$		サドルノード分岐	
	対称 3 周期アトラクタ		11
	対称非周期アトラクタ		
$C_1 \cong 4.64 \text{ nF}$		サドルノード分岐	
	対称 2 周期アトラクタ		12
	対称非周期アトラクタ		
$C_2 \cong 4.50 \text{ nF}$		バウンダリ クライシス	
	発散		

図-3 の座標の原点に対応し、(状態  $i$ ) の単なる一点は  $P^+$  に対応する。ではなぜ、 $P^+$  だけが見

安定平衡点 ——— ホップ分岐 ——— 安定次元 1 サドルフォーカス

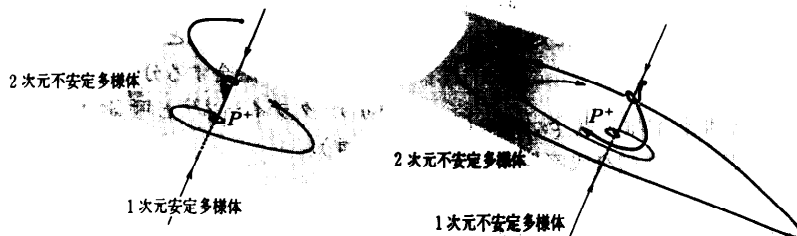


図-13 ホップ分岐と平衡点に関する多様体

えるのであろうか。系には常に外乱\*が存在しており、スイッチ投入時の初期状態はばらばらなはずである。「これが見える」理由は、平衡点 $P^*$ が周囲を通過するトラジェクトリの終点で、系の振る舞いがある時間後\*\*、平衡点へ収束するからである。その過程をトランジェント、その後に見れる状態をアトラクタと呼ぶ。

図-1(a)の回路に戻り $C_1$ を減じてみる。このとき、(状態ii)1回巻きの閉曲線(図-4)が観測される。これは「状態量が一定時間間隔で元に戻る」ことを意味し周期軌道と呼ばれる。それが安定性をともなって「見える」場合、周期アトラクタと呼ぶ。ここで注意すべきことは(i)~(ii)のある値 $C_1=C_H(\cong 5.13 \text{ nF})$ で、(a)安定平衡点から周期アトラクタが発生する現象が起こることである。このようなパラメータの変化にともなうアトラクタの質的变化を分岐、特にこれをホップ分岐と呼ぶ。

### 2.1.2 周期倍分岐と非周期アトラクタ

再び、 $C_1$ を減じると(状態iii)2回巻きの周期アトラクタ(図-5)が観測される。これは、(状態ii)と比べるとほぼ2倍の周期になっている。つまり、(状態ii)~(状態iii)間のある値 $C_1=C_{D1}(\cong 5.07 \text{ nF})$ で(b)1周期アトラクタから2周期アトラクタが発生する分岐が起こったことになる。

ここで以下のように「不動点」を定義する。3次元状態空間中で1周期軌道と横断的に交わる2次元平面 $\Sigma = \{(v_{c1}, v_{c2}, i_L) | v_{c1} = B_P\}$ を考える(図-13)。そして、 $\Sigma$ と1周期軌道の片側の交点を $p_1$ 、 $\Sigma$ 上の $p_1$ の近傍を $U$ とする。初期値 $x \in U$ をもつトラジェクトリは一回転後、ある点 $y \in U$ に戻ってくる。ゆえに、 $P: U \rightarrow U$ なる2次元写像(ポアンカレ写像)を自然な形で定義できる。 $p_1$ は $p_1 = P(p_1)$ を満たし、 $P$ により動かない点という意味を込めて不動点と呼ばれる。また、 $p_1$ が安定な場合、任意の $x_0 \in U$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x_0) = p_1 \quad (3)$$

が成立する。他方、2周期軌道は2点 $p_2, p_2' \in U$ と対応することから、 $P(x)$ の2回合成写像 $P^2(x)$ の不動点

$$p_2 = P^2(p_2), \quad p_2' = P^2(p_2') \quad (4)$$

として扱える。これを2周期点と呼ぶ。分岐(b)は一般的に $n$ 周期アトラクタ(安定 $n$ 周期点)から $2n$ 周期アトラクタ(安定 $2n$ 周期点)への分岐であり周期倍分岐と呼ばれる。再び、 $C_1$ を減じていくと周期倍分岐が継続的に発生し、(状態iv)4周期アトラクタ(図-6)が観測される。 $(C_1 \cong 5.01 \text{ nF})$ さらに注意深く $C_1$ を減じていくと8、16周期程度まで倍分岐が観察されるが、それ以降は(状態v)周期的には見えない貝のような形(図-7)が観測される( $C_1 \cong 4.99 \text{ nF}$ )。デジタル計算機を用いてこの状態をシミュレーションすると、より複雑な倍周期アトラクタを観測できる。理論上ではこの周期倍分岐は無限回発生し、(状態v)に見られるような周期性をもたない平衡状態に至る\*。この「貝の形」は、初期状態に依存せず現れることからアトラクタと考えられ、非周期アトラクタ、カオスと呼ばれる。

### 2.1.3 サドルノード分岐と周期ウィンドウ

非周期アトラクタが観察された値から再び $C_1$ を減じていく。すると $C_1=C_S(\cong 4.97 \text{ nF})$ で突然に(状態vi)3周期アトラクタ(図-8)が観察される。これを逆に考えると、3周期アトラクタが突然消えてカオスが現れることになる。つまり(c)突発的に周期アトラクタが消滅、発生する分岐であり、サドルノード分岐と呼ばれる。さらに $C_1$ を減じると、周期倍分岐によって非周期アトラクタが現れる。このように $C_1$ の張るパラメータ空間で周期アトラクタ存在領域はカオス領域に挟まれており、周期ウィンドウと呼ばれる。

### 2.1.4 インテリアクライシス

引き続き $C_1$ を減ずると $C_1=C_I(\cong 4.80 \text{ nF})$ で突然、(状態vii)非周期アトラクタの大きさが2倍となる(図-9)。2.1の文頭で説明したように、(1)式は原点对称である。これは、図-3~8で観測されたアトラクタと同一のものが原点对称の位置に共存することを意味し、 $C_1$ の減少にともなって共存の限界に至ると(d)複数の非周期アトラクタが接触、融合する分岐が起こる。これをインテリアクライシス<sup>1)</sup>と呼ぶ(以下I.クライシスと記す)。

\* 回路実験においては、ノイズレベルよりも小さな構造を観察することは不可能であり、ある程度まで複雑化すると非周期的状態に推移してしまう。

\* たとえば、素子の熱雑音や電源からのラインノイズなど。  
\*\* 電子回路ではmSオーダーでただちに収束する。

2.1.5 バウンダリ クライシス

この後、(vi)と同様に多種、多様の周期ウィンドウが観察された後 (図-10 ( $C_I \cong 4.76$  nF), 図-11 ( $C_I \cong 4.69$  nF), 図-12 ( $C_I \cong 4.64$  nF),  $C_I = C_B (\cong 4.50$  nF) において (e) 非周期アトラクタが突然に消滅、発散する分岐が起こる。これを、バウンダリ クライシス (以下 B.クライシスと記す) と呼ぶ。

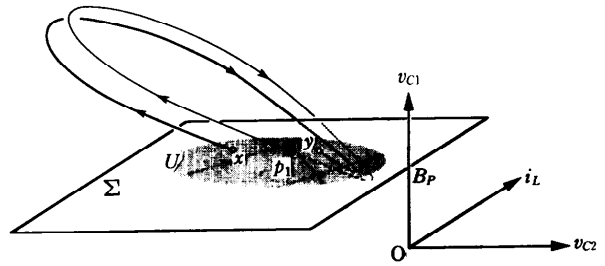


図-14 ポアンカレ写像の不動点

2.2 分岐に隠れて「見えない不動点」

以上の現象を観察し「ホップ分岐後、安定平衡点はどこへ行ったのか? 周期倍分岐後、1周期アトラクタはどこへ行ったのか?」という疑問が生じる。これに対する解答は「見えなくなった、しかし存在し続けている」である。実は、その他の分岐に関しても「見えない不動点」が謎解きの鍵なのである。

2.2.1 ホップ分岐とサドルフォーカス平衡点

平衡点近傍のトラジェクトリの流れは、平衡点固有の3つのベクトルが支配しており、個々に対応して「水流を導く水路の壁や軸」のような不変多様体が平衡点から出発し外部へと延びている。不変多様体の作りだす流れは、平衡点へ漸近する(安定)か、遠ざかるか(不安定)の二つしかない。トラジェクトリは、この壁や軸に交われず、沿って流れる。ホップ分岐以前の安定平衡点  $P^\pm$  は、図-14に見られるように軸(1次元安定多様体)と壁(2次元安定多様体)をもつ。加えて2次元安定多様体上の流れは渦を成しており、トラジェクトリは渦巻きながら  $P^\pm$  に収束することになる。ホップ分岐とは、パラメータの変化にともない2次元多様体上の巻込が弱まり、巻出しへと転じて「平衡点がトラジェクトリの起点へ変化」する分岐である。特に、1次元で引き込み、2次元で巻き出す平衡点を安定次元1サドルフォーカスと呼ぶ。ゆえに、周期アトラクタが観測されている場合でも、平衡点  $P^\pm$  は見えない平衡点として存在し続けている。

2.2.2 周期倍分岐とサドル型不動点

(3)式で定義された二つの2周期点  $p_2, p_2'$  が安定な場合を考えてみる。1周期点の場合と同様、任意の  $x_0 \in U$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n}(x_0) = p_2 \text{ または } \lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n}(x_0) = p_2' \quad (5)$$

が成立するであろう。つまり、 $U$  は一方へ収束する点だけを含む2領域(ベージン)  $B(p_2)$  と  $B(p_2')$  に分けられることになる。ところが、「両者の境界上の点がどこに行くのか」を説明できない。実は、境界上の点は見えない不動点となった  $p_1$  へ収束する(図-15)。仮に  $p_1$  が存在し続けているならば

$$P^2(p_1) = P(P(p_1)) = P(p_1) = p_1 \quad (6)$$

より、 $P^2$  に対しても  $p_1$  は不動点となり、 $B(p_2)$  と  $B(p_2')$  の境界に含まれることになる。ゆえに、境界の中央に  $p_1$  が位置し、その1次元安定多様体が境界を形成している。また、他方の不変多様体は不安定で2周期点  $p_2, p_2'$  の両者にそれぞれ収束する。 $p_1$  は一方は安定で他方は不安定性質のために見えないわけで、これをサドル型不動点と呼ぶ。周期倍分岐とは安定  $n$  周期点の安定多様体が不安定化し、その両側に安定  $2n$  周期点が発生する分岐と捕えられる(図-16)。安定  $n$  周期点に対応する周期アトラクタが幾何学的に対称性をもつ場合、安定  $n$  周期点が一対で発生する。これをピッチフォーク分岐と呼ぶ。

2.2.3 サドルノード分岐とサドル型不動点

サドルノード分岐では、安定不動点が突然現れたように見えるが、同時にサドル型不動点が対を

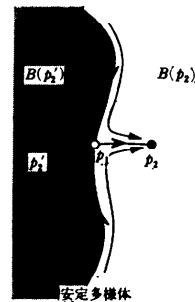


図-15 サドル型不動点によるベージン境界の形成

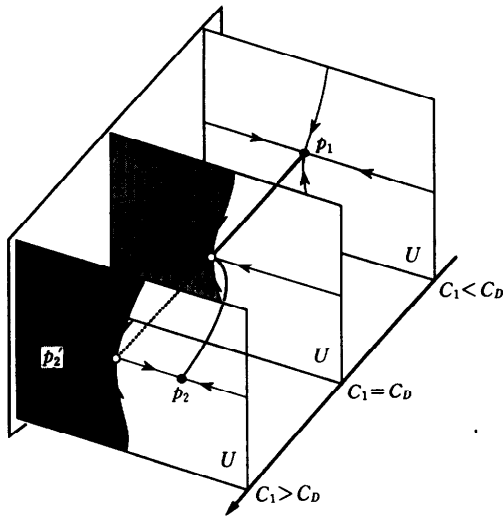


図-16 パラメータの変動にともなう不動点の変化：  
周期倍分岐

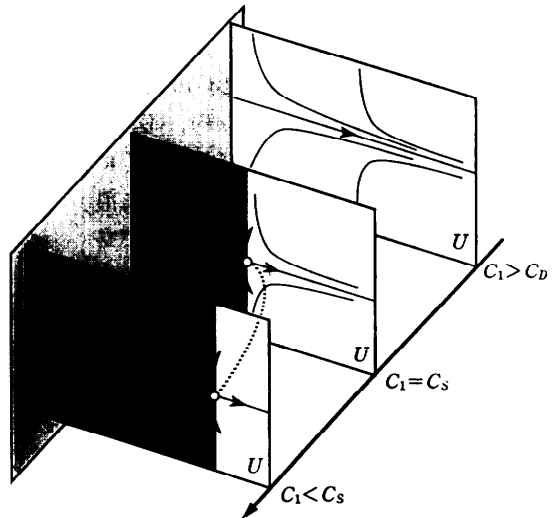


図-17 パラメータの変動にともなう不動点の変化：  
サドルノード分岐

なして発生している (図-17). 安定不動点の消滅の場合, サドル型不動点が一方向の安定多様体方向から接近し, 衝突することで両者が失われてしまう.

**2.2.4 I. クライシスとサドルフォーカス平衡点**

前節で, この回路には平衡点が三つあると言った.  $P^*$  がホップ分岐以後, 安定次元1サドルフォーカスとして存在しているように, 原点  $O$  も安定次元2サドルフォーカスとなって存在している (図-18). I. クライシスが発生する以前は, 状態空間の上下それぞれにアトラクタが共存していた. これは, 原点  $O$  の2次元安定多様体によって3次元状態空間が二つのベシンに区切られていた理由による. 一般に I. クライシスは, 「異なったベシンに格納されていた非周期アトラクタが両者の境界を作っているサドルフォーカス平衡点(あるいはサドル型不動点)の安定多様体に接触することで, 一つに融合してしまう」分岐である.

**2.2.5 B. クライシスとサドル型不動点**

B. クライシスは, I. クライシスの特別な場合である. つまり, 後者は二つの異なるアトラクタが相互にベシンを主張する場合であるが, 前者は唯一つのアトラクタが発散に対してベシンを主張する場合である. ゆえに, 状態空間の中では, 全体のアトラクタ

を取り巻くサドル型周期軌道が存在していると推測される. 図-19 は, 数値計算によってこれを探し, アトラクタとともに描いた結果である. 両者の距離は分岐の進行とともに狭まっていき, 安定多様体とカオスが接触し, ベシンが破壊されることになる.

以上, 簡単に分岐現象のメカニズムを解説したが「見えない不動点」が非常に重要な役割を果たしているかが理解されたと思う. 紙面の都合上, カオス発生機構については論述しないがこれも無数の「見えない不動点とその不変多様体」が源泉なのである.

**2.3 カオスの海に浮かぶ島を巡る**

より深い解析を行うため2パラメータ空間で現象を探る. すなわち「2パラメータ空間中, どのような安定不動点がどのような位置で存在する

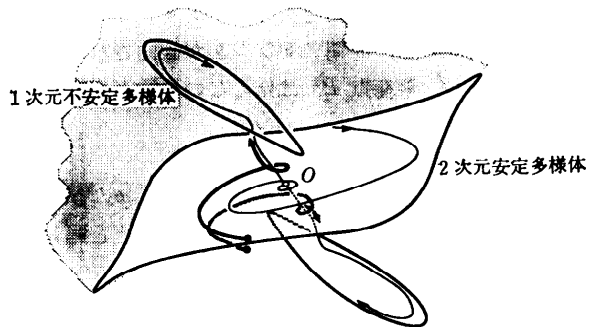


図-18 アトラクタの共存とベシン境界

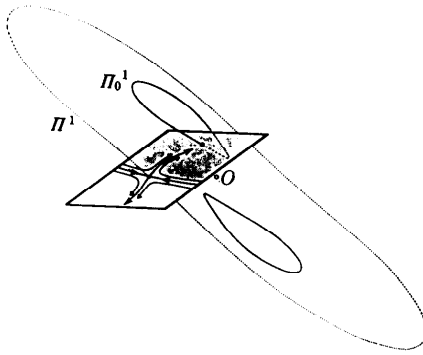


図-19 サドル型周期軌道によるベージン境界

か」を周期ウィンドウの塗り分け図（位相図）を用いて観察してみる。まず、(1)式をリスケールし無次元化されたダイナミクスを得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha \left\{ y - (b+1)x - \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|) \right\} \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (7)$$

以上において

$$\begin{aligned} x &= \frac{vc_1}{B_p}, \quad y = \frac{vc_2}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{B_p G}, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \\ \beta &= \frac{C_2}{LG}, \quad \tau = \frac{iG}{C_2}, \quad a = \frac{m_1}{G}, \quad b = \frac{m_0}{G} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで  $(a, b) = \left(-\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$  と固定し、(7)式を  $(\alpha, \beta)$  に関する2パラメータ族として扱う。図-20は、あるアルゴリズム\*で得られた  $(\alpha, \beta)$  位相図であり、図-21, 22 は図-20 の部分拡大図である(座標に関しては 図-33 を、色と不動点の種類の対応関係は 表-2 を参照)。図-20 において、左端の青色領域は安定平衡点存在領域に当たり横軸方向にずれて行くと黒い筋の位置でホップ分岐が発生する。ここより右側の青、赤、緑、紫色領域は、それぞれ1, 2, 4, 8周期ウィンドウにあたり周

\* 簡単にアルゴリズムを説明する。 $(\alpha, \beta)$ 空間を程々のブロックに分割し、ブロック内の代表点を選択する。適当な初期値から一定の時間トラジェクトリを追跡する。定常状態に収束したと仮定し、それが何周期安定不動点に対応するか周期に上限を定めて調べる。この後、前もって設定されたカラーコード(表-2)に周期を照らして対応するブロックを着色する。微分方程式系を数値積分によって解き、軌道を追跡するとトランジェントを含め莫大な計算時間が必要となるため、差分方程式系に対して有効なアルゴリズムである。ここでは、差分方程式系(7)にごく自然な仮定を導入することで解析的に得られる1次元写像を用いて計算を行った。

表-2 カラーコード

黒色	非周期アトラクタ, 21周期以上のアトラクタ, 発散
青色	1, 7, 13, 19周期アトラクタ
赤色	2, 8, 14, 20周期アトラクタ
緑色	3, 9, 15周期アトラクタ
紫色	4, 10, 16周期アトラクタ
空色	5, 11, 17周期アトラクタ
黄色	6, 12, 18周期アトラクタ

期倍分岐が継続して起こっている。次の黒色領域は非周期アトラクタ存在領域である。ここまででは、地図(位相図)における大陸の海岸(周期倍分岐列)を海(カオス状態)に向かって縦断したと考えられる。ここから右にカオスの海を航海すると何度も帯状の島(ウィンドウ)にぶつかり、帯の左側で崖(サドルノード分岐)が、右側で海岸(周期倍分岐列)が観測される。やがて、全ての色が消え去る暗黒領域に到達する。これはアトラクタの消滅を意味している。ここで数多く観察できる「三つに枝分れた釣針状ウィンドウ<sup>9), 15)</sup>」に注目する。これをよく見るために拡大したのが図-21である。これを見ると、赤(2周期点)、紫(3周期点)、緑(4周期点)、空色(5周期点)そして黄(6周期点)と周期を増しながら周期ウィンドウが螺旋をなしていることが分かる。その最外部を拡大したのが図-22である。ここで、だれもが次の疑問を抱くであろう。「カオスの海に浮かぶ島々の形はなぜそうなのか?」われわれの目標は、この疑問に解答を与えることであり、これは、地学者が列島形状の説明を試みることに類似している。彼らが単に「海面上の陸地」からの情報だけでなく「沈んで見えない部分」の情報を総合し解明するように、われわれも「カオスの海に沈んで見えない不動点」に鍵を見出した。

### 3. 分岐トポグラフィ：見えない不動点を追う

#### 3.1 見えない不動点はどこへ行くのか?

「ホップ分岐で発生した1周期アトラクタ ( $\Pi^1$  と記述\*) 及びクライシスに関与した対称サドル型周期軌道 ( $\Pi^1$  と記述\*\*) は、どうなってしまう

\* シンボル  $\Pi$  は周期軌道を意味し、これが原点对称性をもたない場合、上付き字は  $P^+$  か  $P^-$  の周りの巻数の多いほうを記述する。逆に下付き字は  $P^+$  か  $P^-$  の周りの巻数の少ないほうを記述する。  
\*\* シンボル  $\Pi$  は周期軌道を意味し、これが原点对称性をもつ場合、上付き字は  $P^+$  か  $P^-$  の周りの巻数を記述する。下付き字は省かれる。

うのか」これが最初の間である。ここで  $\beta=30.0$  と固定し  $\alpha$  に関して  $\Pi_0^1$  と  $\Pi^1$  を追跡する。周期軌道に対して平面  $\{(x, y, z) | x=1\}$  を考え、不動点を  $p^*=(1, y_p, z_p)$  とする。これを用い以下の新しい座標を作る。

$$\xi = \langle (0, 2, -1), p^* \rangle \quad (9)$$

図-23 はその追跡結果である<sup>9)</sup>。ホップ分岐に対応する  $\alpha$  値において  $\Pi_0^1$  に対応する軌跡(分岐曲線)は有界なある  $\xi$  値から突然発生するが、分岐曲線  $\Pi^1$  は無限へと発散する。この事実は、 $\Pi^1$  がホップ分岐によって無限遠点から発生した事を示唆する。また、両者は螺旋構造を成しある1点へと収束する。螺旋の「折れ目」はサドルノード分岐に対応し、片側の太線部分は周期ウィンドウに対応する。ここで、論議を螺旋の中心に絞ら込む。仮に、 $\Pi_0^1$  と  $\Pi^1$  が滑らかに変形し同一の不動点に収束したのであれば、この点は「原点(平衡点)を通過する特殊な軌道」に対応する。なぜなら、 $\Pi^1$  は対称性をもつ一方、 $\Pi_0^1$  は対称性をもたない、そこで両者が同一の軌道に収束するには上下一対の  $\Pi_0^1$  が原点で結合し対称性を確保するしかないからである。図-24 は、この変形過程を計算した結果であり、両者が特殊な軌道に漸近して行くことが分かる。

原点は安定次元2サドルフォークスであるため、ここを通過する軌道は「無限の時間を費やして不安定多様体方向に押し出され、安定多様体上を無限の時間を費やして巻き込まれる」構造をもちホモクリニック軌道<sup>11), 12)</sup>と呼ばれる。加えて、以上は「ホモクリニック軌道が壊れるとそれに対応する周期軌道が発生する」という分岐現象に翻訳可能で、ホモクリニック分岐<sup>9), 10), 13), 15)</sup>と呼ばれる。特に、図-24 に対応するホモクリニック軌道を  $\Gamma_0^1$  とする<sup>\*</sup>。このように、あるパラメータに関して追跡される連続変形可能な周期軌道のあつまりを周期軌道族と呼ぶ。

### 3.2 不動点を産むもの

ホモクリニック軌道は、1次元安定多様体が2次元安定多様体と接する状況で起こり、1パラ

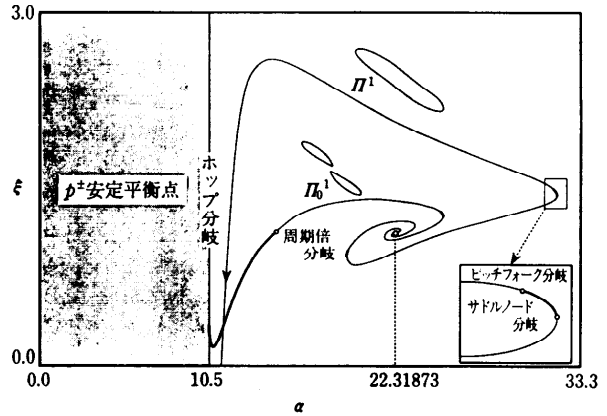


図-23  $\Pi^1$  対称周期軌道及び  $\Pi_0^1$  非対称周期軌道の分岐曲線：  
( $\alpha, \xi$ )-分岐図 ( $\beta=30.0$ )

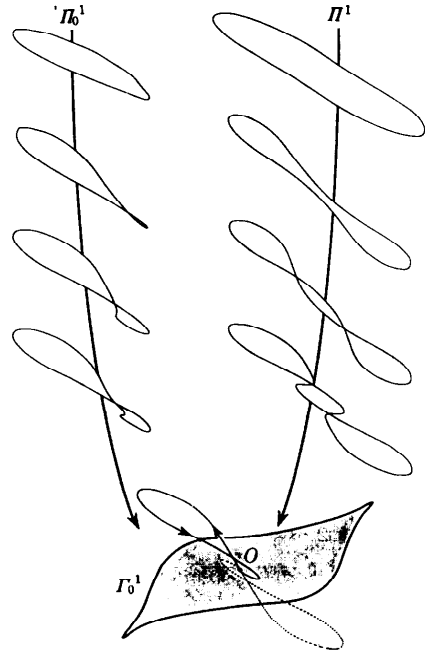


図-24 ホモクリニック軌道への連続変形過程

メータ空間の中で1点(ホモクリニック分岐集合)と対応する。その点を中心とし、系のパラメータを右か左に動かすと「1次元不安定多様体が2次元安定多様体の上を通過する、あるいは下を通過する」という二つの壊れ方が生じ、「壊れ方」に依存して対称、非対称一対の周期軌道族が発生する。 $(\alpha, \xi)$ -空間におけるホモクリニック分岐集合の周囲で分岐曲線がどのような形状となるかは、平衡点の「押し出し」と「巻き込み」の強さで決定される。簡単に言えば、「押し出し」が

\* シンボル  $\Gamma_0^1$  は、 $P^+$  か  $P^-$  のどちらか一方を回り、 $O$  を通過するホモクリニック軌道を意味し、上付き字は平衡点周りの巻数を記述する。

「巻き込み」より強い場合、図-23のように分岐曲線は振動的に収束し、数多くの「折れ目」を誘導する<sup>15)</sup>。この逆の場合、連続曲線は振動することなく収束する。非振動的傾向は  $\beta$  が小さな領域で現れる。図-25は、 $\beta=2.04$  に固定し、 $(\alpha, \xi^*)$ -空間中で1及び2周期軌道を追跡した結果である。ただし

$$\xi^* = \langle (0, 1, 2), p^* \rangle \quad (10)$$

とする。この一連の構造の中には、5種類の本モクリニック軌道  $\Gamma_0^1, \Gamma_0^2, \tilde{\Gamma}_0^2, \Lambda_0^2, \tilde{\Lambda}_0^2$ 、5種類の非対称周期軌道族  $\Pi_0^1, \Pi_0^2, \tilde{\Pi}_0^2, \Pi_1^1, \tilde{\Pi}_1^1$  及び4種類の対称周期軌道族  $\Pi^1, \Pi^2, \tilde{\Pi}^2, \Pi^2$  が介在する。それぞれの族の運命は以下で分類できる。

- (運命 i) 族  $\Pi^1$  の族  $\Pi_0^1$  は、ホップ分岐で生まれ  $\Gamma_0^1$  のホモクリニック分岐で終わる。
  - (運命 ii) 族  $\Pi_0^2(\tilde{\Pi}_0^2)$  は、周期倍分岐で生まれ  $\Gamma_0^2(\tilde{\Gamma}_0^2)$  のホモクリニック分岐で終わる。
  - (運命 iii) 族  $\Pi_1^1(\tilde{\Pi}_1^1)$  は、ピッチフォーク分岐で生まれ  $\Lambda_0^2(\tilde{\Lambda}_0^2)$  のホモクリニック分岐で終わる。
  - (運命 iv) 族  $\Pi^2(\tilde{\Pi}^2)$  は、 $\Gamma_0^2$  と  $\tilde{\Gamma}_0^2(\Lambda_0^2$  と  $\tilde{\Lambda}_0^2)$  のホモクリニック分岐で生まれ、終わる。
  - (運命 v) 族  $\Pi^2$  は、孤立閉曲線を成す。
- 以上のように分岐曲線の端点構造はホップ分岐、

周期倍分岐、ピッチフォーク分岐及びホモクリニック分岐に限定されるが、「周期倍分岐、ピッチフォーク分岐は対称周期軌道を生成しない」ことを加味すると対称周期軌道族の構造は「孤立閉曲線構造かホモクリニック軌道を両端とする構造しかとりえない」ことが分かる。われわれは、この特徴に着目し(運命 iv) の場合をそれぞれ ( $\Gamma_0^2, \tilde{\Gamma}_0^2$ ), ( $\Lambda_0^2, \tilde{\Lambda}_0^2$ ) ホモクリニック リンケージ<sup>16), 17)</sup> と呼ぶ(以下、H. リンケージと記述)。

### 3.3 いわばパラメータ空間における地形学

「対称周期軌道のほとんどは、H. リンケージという族を形成する」、「ホモクリニック分岐で生成される族の分岐構造は平衡点の性質に支配されている」この二つの事実を繋ぐことで「H. リンケージ上の周期ウィンドウ形状もホモクリニック分岐に強く支配されている」と推定される。われわれは、この観点で図-20~22の「奇妙なウィンドウ」を説明するために、2パラメータ空間における H. リンケージの局所構造を調査する。

#### 3.3.1 ホモクリニック軌道が作るシート

まず、族  $\Pi^2, \tilde{\Pi}^2, \Pi^2$  の関係を、 $\beta$  を変化させて調査する。このために、図-23に対応する分岐図を  $\beta$  方向に重ねた地形図(トポグラフィ)を利用する。ここで  $\Pi^2$  と  $\tilde{\Pi}^2$  の  $\alpha$  に関する位置関係が  $\Gamma_0^1$  ホモクリニック分岐集合を軸としてほぼ対称である事に注目し、

$$\alpha^* = \alpha - F(\Gamma_0^1, \beta) \quad (10)$$

を定義する。ただし  $F(\Gamma_0^1, \beta)$  は  $\beta$  に対して  $\Gamma_0^1$  ホモクリニック軌道が存在する  $\alpha$  の値を意味する。図-26(a)は数値計算によって得られた  $(\alpha^*, \beta, \xi^*)$ -トポグラフィであり、図-27は、対応するモデル図である。これより以下の現象が観察できる(以下、図-26(b)参照)。

(i) H. リンケージの消滅： $\beta$  を減少させていくと、二つのホモクリニック分岐集合  $\Gamma_0^2$  と  $\tilde{\Gamma}_0^2$  が漸近し、これを結ぶ族  $\Pi^2$  が縮小し消滅する。これと同様なことが  $\Lambda_0^2$  と  $\tilde{\Lambda}_0^2$  に関しても起こり、その結果  $\tilde{\Pi}^2$  が消滅する。他方、ホモクリニック軌道から孤立していたループ状の族  $\Pi^2$  は、その口径を縮小し消滅する。

(ii) H. リンケージの組み替え： $\beta$  を増加したともない孤立閉曲線構造の族  $\tilde{\Pi}^2$  の不安定部分(細線)が、 $\Pi^2$  の周期ウィンドウ部分(太線)に接近する。これにつれて、分岐曲線の滑らかさは

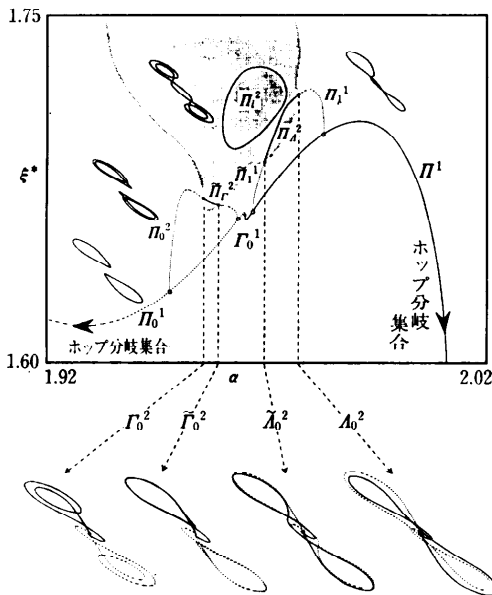
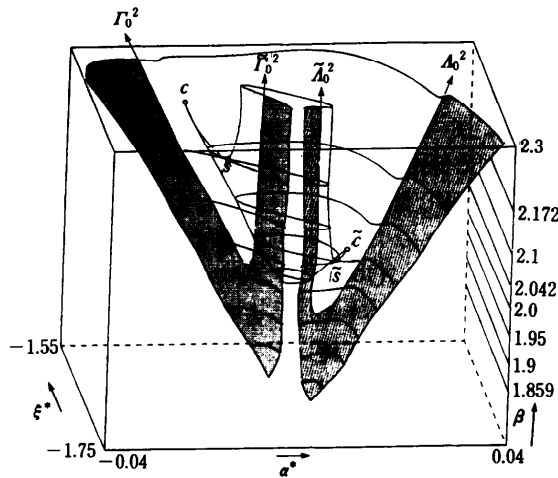


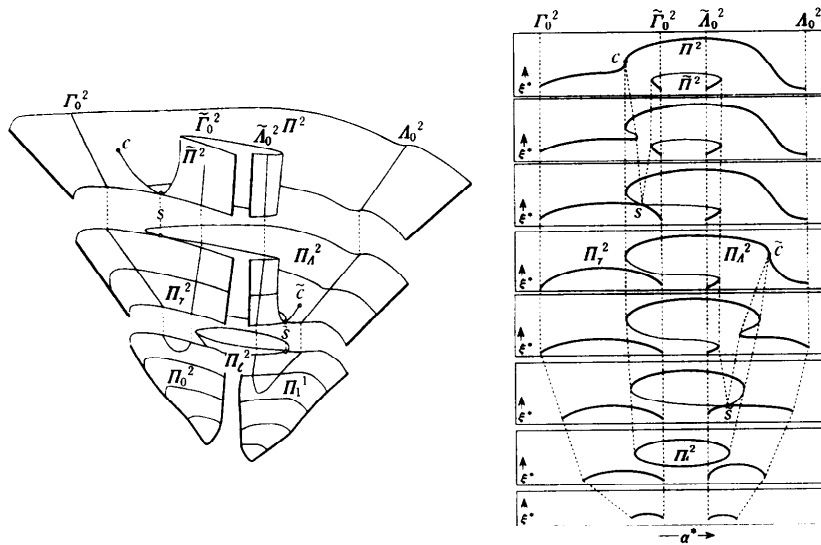
図-25 他の周期軌道(周期点)のさまざまな分岐曲線： $(\alpha, \xi^*)$ -分岐図 ( $\beta=2.04$ )

\* シンボル  $\Lambda_0$  は、 $P^+$  と  $P^-$  の両方を回り、 $O$  を通過するホモクリニック軌道を意味し、上付き字は平衡点周りの総巻数を記述する。





(a) 数値計算による  $(\alpha^*, \beta, \epsilon^*)$ -分岐トポグラフィ



(b) 分岐トポグラフィ断面図:  $(\alpha^*, \epsilon^*)$ -分岐図

図-26 局所分岐トポグラフィ1: 2パラメータ族  $\Pi^2$  c: カスプ点 s: サドル点

失われ、衝突した時点で交差する。交差点はサドル点  $s$  となり、 $\beta$  増加にともなって新たに二つの「折れ目」が生成する。この一連の過程で  $\Pi_c^2$  は  $\Pi_l^2$  に組み込まれる。次の段階において、 $\Pi_l^2$  に「新たに組み込まれた部分」が  $\Pi_r^2$  に接近して行き、まったく同様にサドル点  $s$  で組み替えを起こす。その結果、新たに  $(\Gamma_0^2, \Lambda_0^2)$  と  $(\tilde{\Gamma}_0^2, \tilde{\Lambda}_0^2)$  が発生する（前者と後者に対応する新たな族を以降  $\Pi^2$  及び  $\tilde{\Pi}^2$  と記述する）。

このように、1パラメータでは独立に存在する周期軌道族も2パラメータ空間の中では複雑に結合、分離し合い一枚の連続なシート（2パラメータ

族）を形成している。そしてそのシートの端は、ホモクリニック軌道に対応するのである。

### 3.3.2 ヘテロクリニック軌道が作るシート

対称周期軌道と関連するホモクリニック軌道は原点に関するものだけであろうか。たとえば、連続変形によって  $P^*$  に関する対称周期軌道の巻数が増えることが可能ならば、その極限において図-28 のような  $P^*$  を結ぶ特殊な軌道（ヘテロクリニック軌道）が形成される。仮にこの軌道が存在するならば、これに関するリンケージ構造の存在が予想され、その結果、さまざまな巻数をもった対称周期軌道が生成されるはずである。これらと

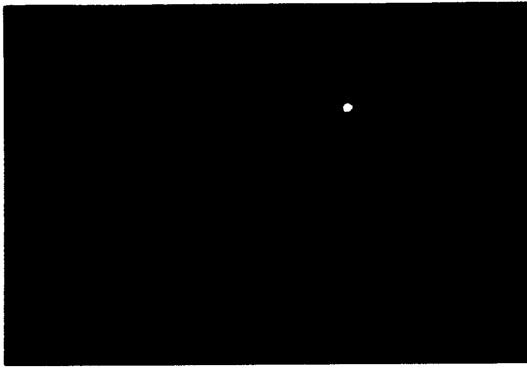


図-3 安定平衡点 ( $C_1 > 5.13 \text{ nF}$ )

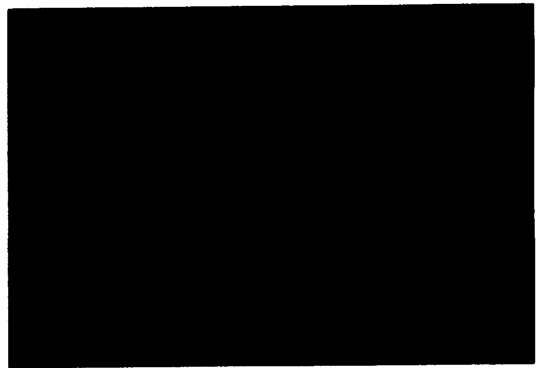


図-7 非対称非周期アトラクタ ( $4.97 \text{ nF} < C_1 < 4.99 \text{ nF}$ )

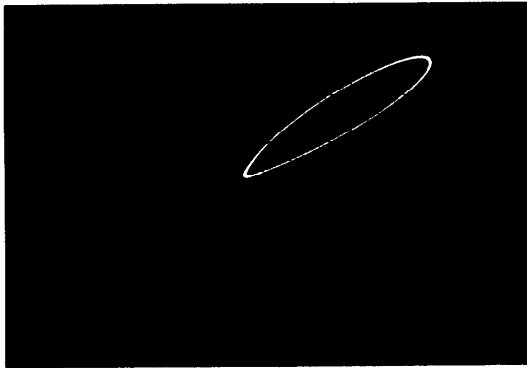


図-4 非対称1周期アトラクタ ( $5.07 \text{ nF} < C_1 < 5.13 \text{ nF}$ )

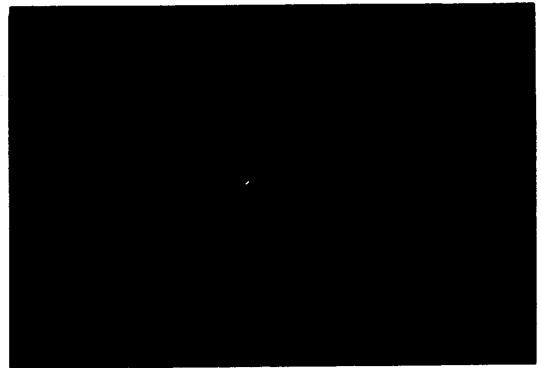


図-8 非対称3周期アトラクタ ( $C_1 < 4.97 \text{ nF}$ )

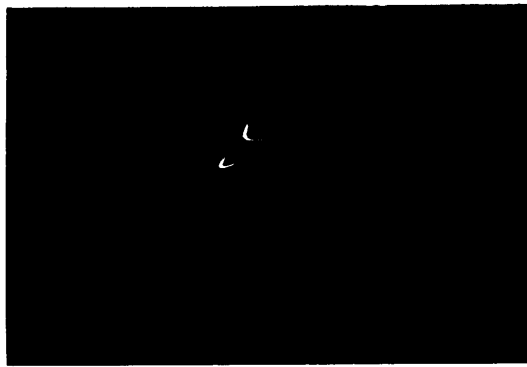


図-5 非対称2周期アトラクタ ( $5.01 \text{ nF} < C_1 < 5.07 \text{ nF}$ )

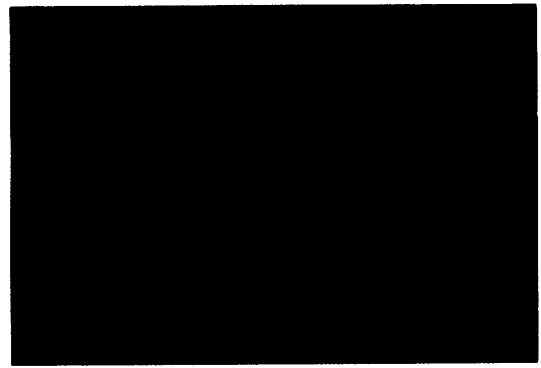


図-9 対称非周期アトラクタ ( $C_1 < 4.80 \text{ nF}$ )

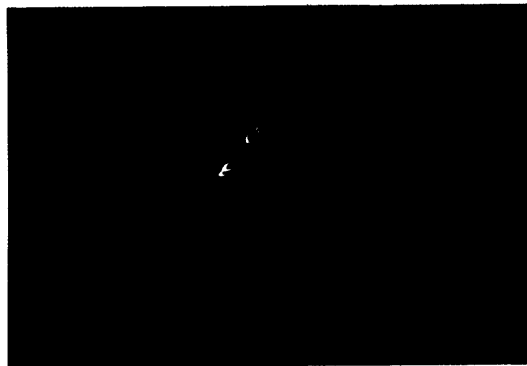


図-6 非対称4周期アトラクタ ( $4.99 \text{ nF} < C_1 < 5.01 \text{ nF}$ )



図-10 対称4周期アトラクタ ( $C_1 < 4.76 \text{ nF}$ )

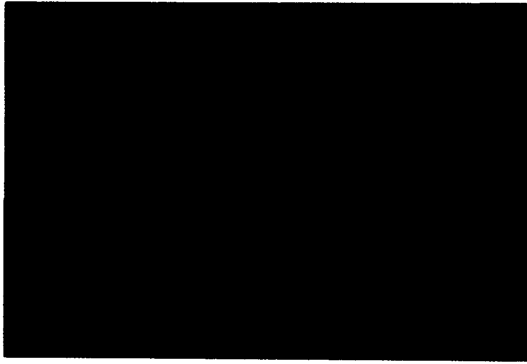


図-11 対称3周期アトラクタ ( $C_1 < 4.69$  nF)

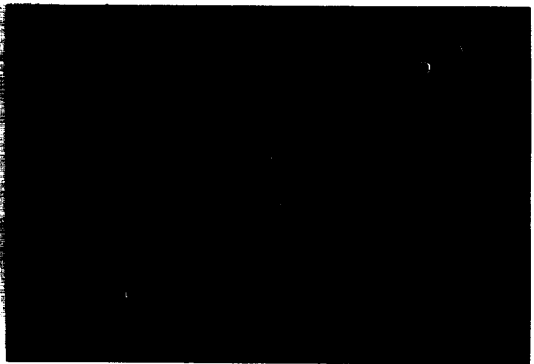


図-12 対称2周期アトラクタ ( $C_1 < 4.64$  nF)

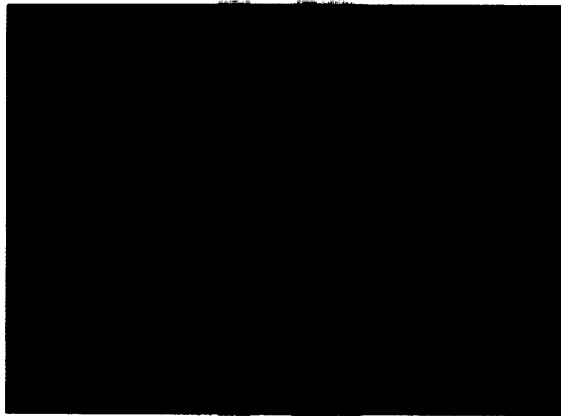


図-20  $(\alpha', \beta)$ -2 パラメータ  
位相図:  
横軸  $-1.0 < \alpha' < 0.0$   
縦軸  $1.5 < \beta < 80.0$

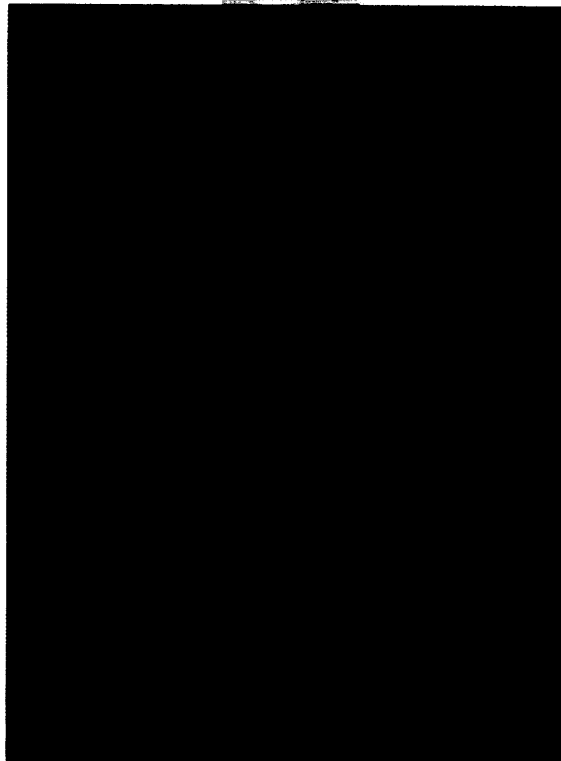


図-21 2パラメータ位相図  
横軸  $h(\beta) < \alpha' < 0$   
縦軸  $2.5 < \beta < 40.0$   
ただしグラフ  $\alpha' = h$   
( $\beta$ )は図-33(a)内の  
破線で示された曲線  
にあたる。

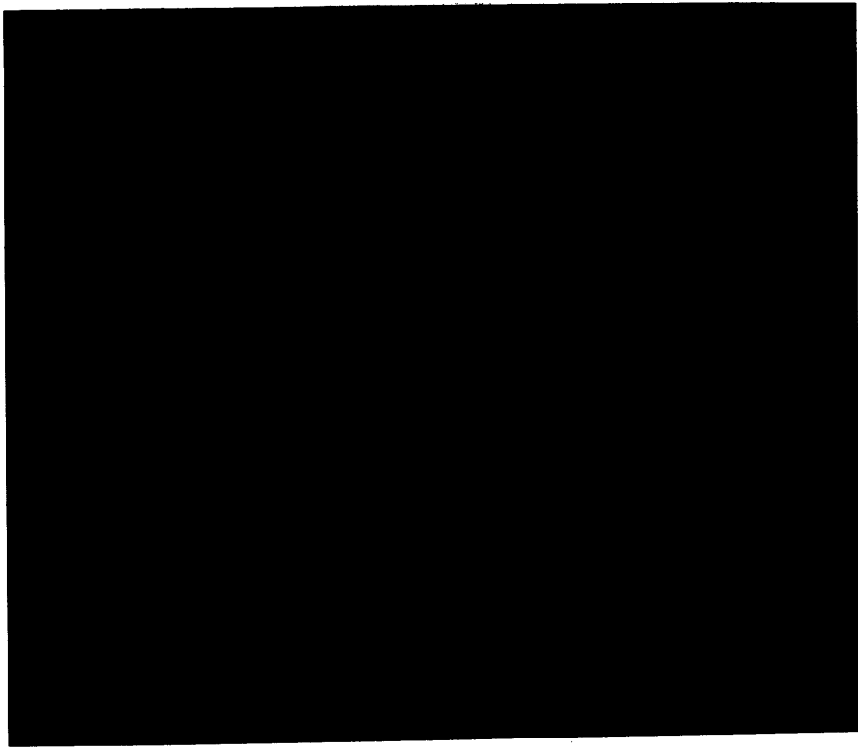


図-22 2パラメータ位相図  
横軸  $-0.15 < \alpha' < 0.12$  縦軸  $1.8 < \beta < 5.8$



図-27 分岐トポグラフィモデル1: 2パラメータ族  $\Pi^1$

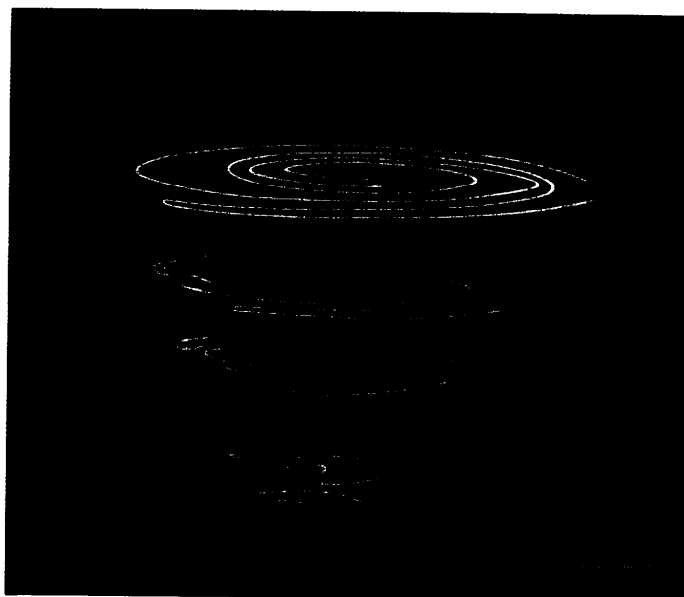


図-31 分岐トポグラフィモデル2: 2パラメータ族  $\kappa$  紫色領域は周期ウィンドウを示す.

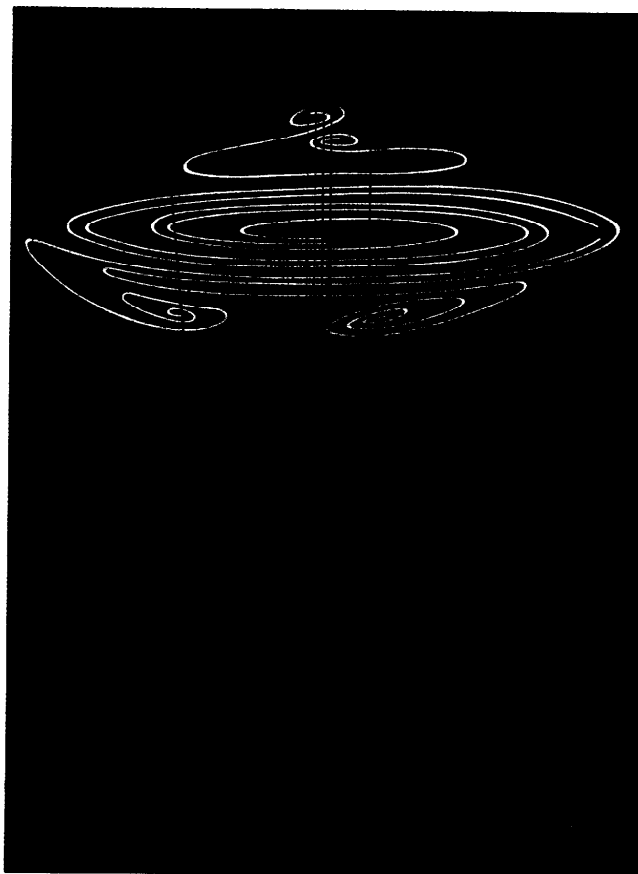


図-32 分岐トポグラフィモデル3: 2パラメータ族  $\Pi$  紫色領域は周期ウィンドウを示す.

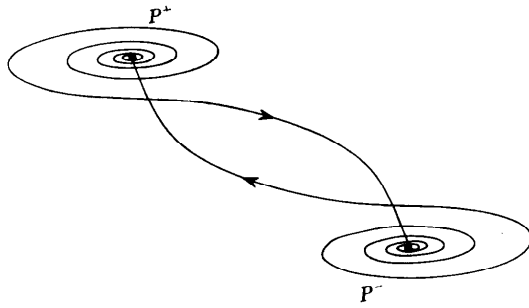


図-28 ヘテロクリニック軌道

「奇妙な周期ウィンドウの渦」とは関係があるのだろうか。

図-20 の上方に位置する「赤色の奇妙なウィンドウ」から枝分かれした「二つの帯状ウィンドウ」で観測される対称 2 周期アトラクタ（それぞれ  $\pi$  と  $\bar{\pi}$  で記述）を  $(\alpha, \xi')$ -空間\* で追跡した結果が図-29 である。ただし、 $\beta=73.7$  と固定した。こ

の一連の分岐構造の中には、2 種類の本モクリニック軌道  $A_0^3, \bar{A}_0^3$ , 2 種類のヘテロクリニック軌道  $A_p, \bar{A}_p$  及び 2 種類の対称周期軌道族  $\pi, \bar{\pi}$  が介在している。この結果、予想どおりに族  $\pi$  による  $(\bar{A}_p, \bar{A}_0^3)$  リンケージと族  $\bar{\pi}$  による  $(\bar{A}_p, \bar{A}_0^3)$  リンケージの 2 種類が形成されていることが分かる。

再び、 $\beta=73.7$  から減じて、二つの族の構造がいかに変化するかを示したものが図-30 の  $(\alpha', \beta, \xi')$ -トポグラフィであり、図-31 は対応するモデル図である。ただし、

$$\alpha' = \frac{80.0\alpha^*}{39.98\beta + 1.6} \quad (11)$$

で定義されるパラメータを軸にとった。この構造に関する詳細は紙面の都合上省略するが  $A_0^3, \bar{A}_0^3, A_p, \bar{A}_p$  を端とする一枚の連続なシートで巻き貝のような構造が作られる。

### 3.4 大域的分岐構造：族 II\*

実は、以上で観察した二つの H. リンケージは（図-27 及び 図-31）は、

\* ここでも新たな座標系  $\xi'$  を定義しているが、この説明はあまりにも技術的過ぎるため省く。内容的には  $\xi, \xi^*$  と同じと考えて欲しい。

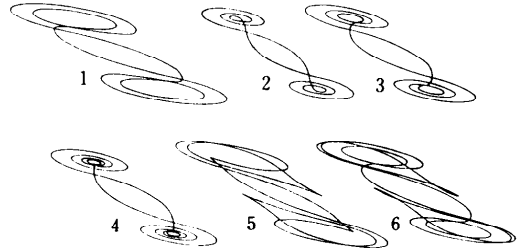
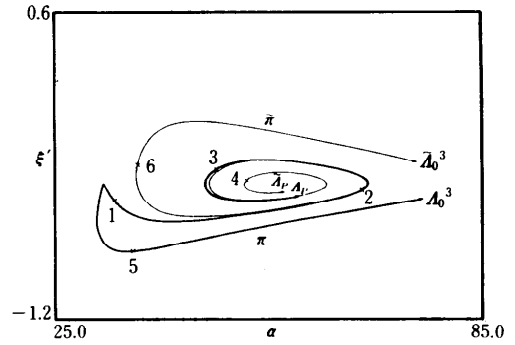


図-29  $\pi$  対称周期軌道の分岐曲線と連続変形過程： $(\alpha, \xi')$ -分岐図 ( $\beta=73.7$ )

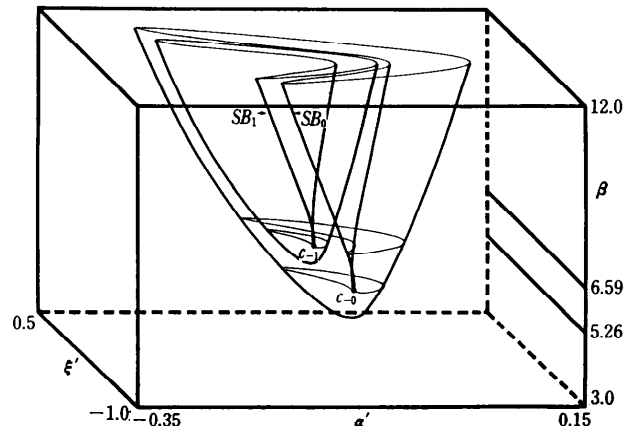
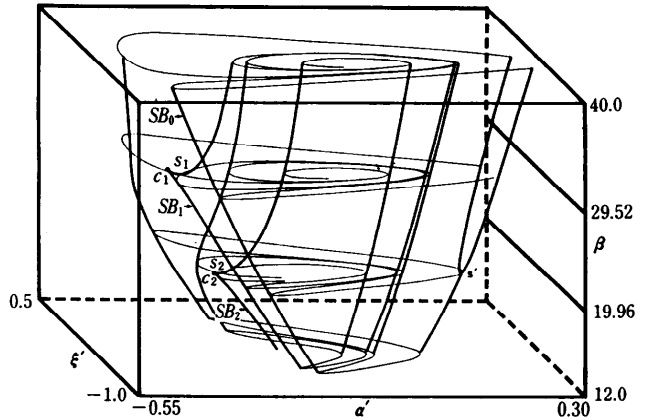
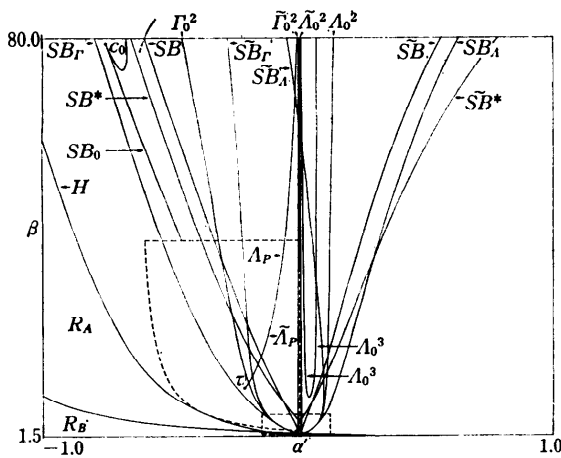
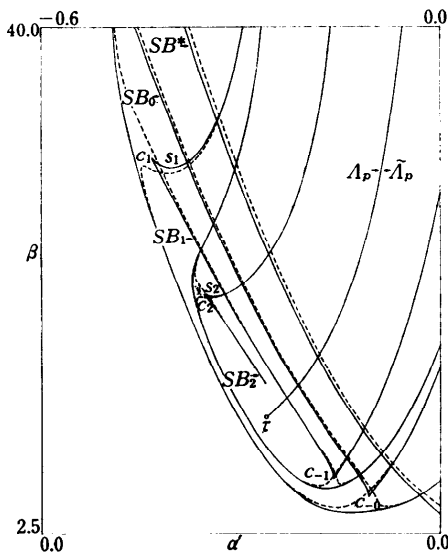


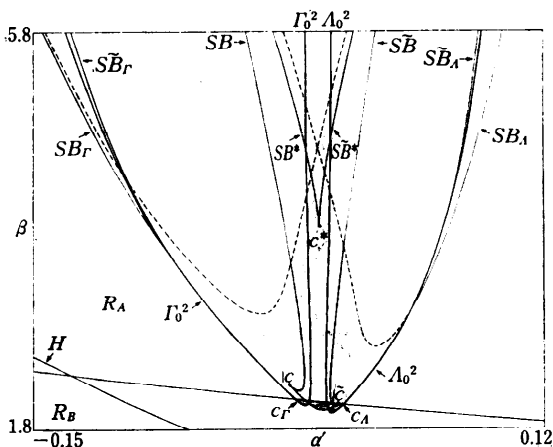
図-30 局所分岐トポグラフィ 2: 2パラメータ族  $\pi$  数値計算による  $(\alpha', \beta, \xi')$ -分岐トポグラフィ c: カスプ点 s: サドル点



(a) 横軸  $-1.0 < \alpha' < 1.0$  縦軸  $1.5 < \beta < 80.0$



(b) 横軸  $h(\beta) < \alpha' < 0$  縦軸  $2.5 < \beta < 40.0$   
 グラフ  $\alpha' = h(\beta)$  は図-33(a)内の破線で示された曲線にあたる。



(c) 横軸  $-0.15 < \alpha' < 0.12$  縦軸  $1.8 < \beta < 5.8$

図-33 トポグラフィ上の分岐曲線:  $(\alpha', \beta)$ -パラメータ位相図

$\beta \geq 73.7$  において 図-32 のように結合し、より大域的な H. リンケージとして統合される。つまり、紹介してきたホモクリニック軌道、ヘテロクリニック軌道の全てはたった一つの族 ( $\Pi^*$  と記述) で連結されているのである。

この複雑なシートには、安定不動点とサドル型不動点が住み分けていることに注意しよう。特に、安定不動点の存在領域である周期ウィンドウはシート  $\Pi^*$  の「折れ目」を縁どるように存在する。さて、各トポグラフィモデル (図-31 及び 図-32) の紫色部分は、この周期ウィンドウを着色したものである。カラー位相図-20~22 と同一スケールでこの紫色部分を取り出すと図-33 (a)~(c) が得られる。この両者を比較すれば、カラー位相図に見られた奇妙な周期ウィンドウの基本構造が、一枚のシート  $\Pi^*$  の構造で決定されていることがはっきりと分かるであろう。

ゆえに「周期ウィンドウ構造」言い換えれば「見える不動点の存在領域」は「見えない不動点」でそのほとんどを形成される大域ホモクリニックリンケージ構造で決定されていると考えられる。

#### 4. おわりに

簡単な電子回路を例に取り、非線形ダイナミカルシステムの不動点のさまざまな姿を観察した。これら多種多様な不動点は、分岐現象によって結び付けられており、パラメータ空間を安定不動点の種類で塗り分けた位相図は奇妙にして複雑な構造をもっている。これら分岐構造の解明は、単に安定不動点の観察だけで可能となるわけではなく、カオス領域に潜んだサドル型不動点の観察が重要となる。特に、本文に記述した分岐トポグラフィは、サドル型不動点の作る構造を把握し、分岐構造と H. リンケージの関係を明らかにする上で非常に有効な手法であると考えられる。

**謝辞** ここで紹介した一連の仕事を進める過程で、多くの議論と助力をいただいた以下の方々に深く感謝する。

小室元政 (西東京科学大学) 国府寛司 (京都大学) 岡宏枝 (龍谷大学) 平井有三 (筑波大

学) 牧瀬哲郎 黒田篤次 宮和行 堀田篤宏 藤本竜一 高橋聡一 樋口信一 阿部悌 庵勝仁 田中仁朗 野呂武 (以上早稲田大学)

また、本文に関して貴重な意見をいただいた査読者の方々に深く感謝する。

### 参 考 文 献

- 1) Matsumoto, T., Chua, L. O. and Komuro, M.: The Double Scroll, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-32, pp. 797-818 (1985).
- 2) Matsumoto, T., Chua, L. O. and Komuro, M.: The Double Scroll Bifurcations, Int. J. Circuit Theory and Applications, Vol. 14, pp. 117-146 (1986).
- 3) Matsumoto, T., Chua, L. O. and Komuro, M.: Birth and Death of the Double Scroll, Physica, Vol. 24 D, pp. 97-124 (1987).
- 4) Matsumoto, T., Chua, L. O. and Tokumasu, K.: Double Scroll via a Two-transistor Circuit, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-33, pp. 828-835 (1986).
- 5) Chua, L. O., Komuro, M. and Matsumoto, T.: The Double Scroll Family, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-33, pp. 1072-1118 (1986).
- 6) Matsumoto, T., Chua, L. O. and Ayaki, K.: Reality of Chaos in the Double Scroll Circuit, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-35, No. 7, pp. 909-925 (1988).
- 7) Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J.: Chaotic Attractor in Crisis, Physical Review Letters, Vol. 48, pp. 1507-1510 (1982).
- 8) Komuro, M.: Bifurcation Equations of 3-dimensional Piecewise-Linear Vector Fields, World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems Vol. 8, pp. 113-123 (1990).
- 9) Gaspard, P., Kapral, R. and Nicolis, G.: Bifurcation Phenomena Near Homoclinic Systems: A Two-Parameter Analysis, J. Stat. Phys., Vol. 35, pp. 697 (1984).
- 10) George, D. P., PhD thesis, Cambridge University (1986).
- 11) Shilnikov, L. P.: A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions, Sov. Math. Dokl., pp. 163-166 (1965).
- 12) Tresser, C.: About Some Theorems by L. P. Shilnikov, Ann. Inst. Henri Poincaré, 40, 4, pp. 441-461 (1984).
- 13) Glendinning, P. and Sparrow, C.: Local and Global Behavior Near Homoclinic Orbits, J. Stat. Phys., Vol. 35, p. 645 (1984).
- 14) Sparrow, C.: The Lorenz Equation: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer Verlag, New York (1982).
- 15) Fujimoto, R., Hotta, A., Tokunaga, R. and Matsumoto, T.: Bifurcation Analysis of Shilnikov's Chaos, World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, Vol. 8, pp. 125-141 (1990).
- 16) Tokunaga, R., Miya, K., Hotta, A., Komuro, M., Matsumoto, T. and Chua, L. O.: Homoclinic Linkages: A New Bifurcation Mechanism, Proceedings of IEEE ISCAS, Vol. 2, pp. 672-675 (1989).
- 17) Tokunaga, R., Matsumoto, T., Ida, T. and Miya, K.: Homoclinic Linkages in the Double Scroll Circuit and Cusp-Constrained Circuit World Scientific Advanced Series in Dynamical Systems, Vol. 7, pp. 192-209 (1989).

(平成3年6月24日受付)



松本 隆

昭和19年生。昭和41年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。昭和44年ハーバード大学大学院応用数学修士。昭和48年工学博士(早稲田大学)。昭和52年より3年間カリフォルニア大学バークレー計算機工学科研究員。現在早稲田大学理工学部電気工学科教授。非線形回路、ニューラルネットワークの研究を行っている。IEEE CAS Society Board of Governors, Proceedings of IEEE 編集委員, IEEE CAS Society Nonlinear Circuits and Systems Technical Committee 委員, IEEE CAS Society Neural Networks Technical Committee 委員, IEEE Fellow。



徳永 隆治

昭和36年生。昭和60年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。昭和62年早稲田大学大学院理工学研究科前期課程修了。平成2年早稲田大学大学院理工学研究科後期課程修了。平成2年工学博士(早稲田大学)。平成元年早稲田大学理工学部助手。昭和62年及び平成3年米国カリフォルニア大学バークレー客員研究員。現在筑波大学電子・情報工学系講師。力学系のカオスと分岐、非線形力学系の応用等の研究を行っている。