

解説



3. 情報工学に見られる不動点論の散策

3.4 制御工学と不動点

—不動点の安定性をめぐる話題†—

平井 一正††

1. はじめに

制御工学の目的は、制御量を目標値にできるだけ迅速に、かつ精度よく一致させるということであり、このため種々の設計法が研究されてきた。

システムの設計はシステムの過渡特性と定常特性にわけられ、システムの不動点に関係してくるのは、主としてこの定常特性に関する特性である。(制御工学の分野では通常、システムの平衡状態を表すのに、連続系に対しては平衡点、離散時間系に対しては不動点という名称で区別して用いられているが、ここでは連続、離散時間系を問わず、不動点という名称で統一しておく。) すなわち、不動点の安定性、ロバスト性、さらに分岐、カオスの発生などは、制御系の定常特性の評価に大きく影響する。また制御系においては、連続時間の制御対象を、計算機で制御することが多い。この場合、システムの中に連続時間システムと離散時間システムが共存することになる。このような場合、計算機のサンプリング周期によって、不動点の性質や数に変化することがある。また、非線形システムを線形化してシステム的设计を行うことがあるが、線形化の方法によって、不動点の性質が変化することもある。また、コンピュータシミュレーションを行うとき、離散時間化の方法によっては同様な変化が起こる可能性がある。

本解説では、制御システムと不動点の関係を、以上のような観点に立って解説する。

2. 不動点の安定性

いま、対象システムを

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

† Fixed Points in Control Systems — Topics on Stability Problems of Fixed Points — by Kazumasa HIRAI (Kobe University, Faculty of Engineering).

†† 神戸大学工学部

とする。ただし、 $x \in R^n$, $f: R^n \rightarrow R^n$ とする。この場合の不動点は $f(x) = 0$ の解 $x = x_e$ で、一般性を失うことなく $x_e = 0$ とおける。初期状態 $x(0)$ から出発した(1)式の解の時間的ふるまいによって不動点 $x_e = 0$ の安定性を論ずる概念を、内部安定性という。そしてこの安定性を論ずる代表的な方法がよく知られたリアプノフの方法である¹⁾。

一方、制御系のように入出力をもつシステムにおいては、入力に対する出力の応答の性質を考慮することによって、システムの安定性を論ずる方法がある。すなわち、ある有界な入力において有界な出力が得られるとき、システムは入出力安定であるという。この内部安定性と入出力安定性の二つの安定性を結びつけるのは、システムの内部と外部がどう関係しているかである。すなわち、システムの入力から内部状態への影響の仕方を表す可制御性の概念と、内部状態がどのように出力にかかわってくるかを表す可観測性の概念が重要な役割を果たす。

一般に可制御性、可観測性が成立しているときは、内部安定性と入出力安定性は等価である。そこで、不動点の安定性を内部安定性から論じる代わりに、入出力安定性から論じる方法が用いられる。入出力安定性のほうが、システムの入出力という物理的概念が明白であり、また安定判別法もはるかに簡単である。以下このことについて説明する²⁾。

いま、ルーリエ系と呼ばれる図-1の制御系を考える。システムの方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, & y &= cx \\ u &= -\phi(y) \end{aligned} \quad (2)$$

と表される。(A, b)は可制御対、(c, A)は可観測対、Aは安定行列とする。

また ϕ は $\phi(0) = 0$, $0 \leq \phi(y)/y \leq k$ を満たすとす

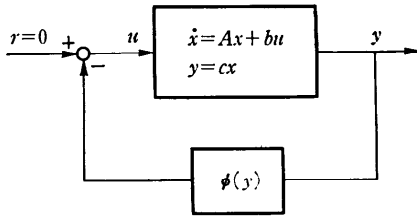


図-1 ルーリエ系

る。以下これを $\phi \in [0, k]$ と書く。あきらかに (2) 式の不動点は $x=0$ である。いま、図-1 において、不動点 $x=0$ が任意の $\phi \in [0, k]$ に対して大域漸近安定であるとき、この安定性を絶対安定という。図-1 の系が絶対安定であるための条件は、システム的设计上非常に重要である。いま、これを示すために次のリアプノフ関数を考える。

$$V(x) = x^T P x + q \int_0^x \phi(y) dy \quad (3)$$

ここで P は正定行列、 q は任意の実数とする。(2) 式の解に沿って (3) 式の時間微分をとると

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (A^T P + P A + l l^T) x \\ &\quad - (l^T x + \sqrt{\tau} \phi(cx))^2 \\ &\quad - (cx - \phi(cx)/k) \phi(cx) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \tau &= qcb + \frac{1}{k} \\ \sqrt{\tau} l &= P b - (1/2) q A^T c^T - (1/2) c^T \end{aligned} \quad (5)$$

である。

$\dot{V}(x)$ の第 2, 3 項は非正であるので、 $A^T P + P A + l l^T$ が負定行列であれば $\dot{V}(x)$ は負定である。また、もし $V(x)$ が正定であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) であるので (2) 式の不動点 $x=0$ は大域漸近安定である。それでは $A^T P + P A + l l^T$ が負定であるための条件はどのようなことであろうか。

このために有名な補題がある。

補題 1 (ヤクボビッチーカルマン)

安定行列 A 、正定行列 Q 、ベクトル b, h 、非負数 τ 、正数 ε が与えられ、 (A, b) は可制御対とする。

このとき

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= l l^T - \varepsilon Q \\ P b - h &= \sqrt{\tau} l \end{aligned} \quad (6)$$

を満たす正定行列 P とベクトル l が存在するための必要十分条件は、 ε が十分小ですべての実数 ω に対して

$$\tau + 2 \operatorname{Re} h^T (j\omega I - A)^{-1} b > 0 \quad (7)$$

が成立することである。(Re は実部の意)。

そこで (5) 式と (6) 式を比較して

$$h = \frac{1}{2} q A^T c^T + \frac{1}{2} c^T \quad (8)$$

とおくと、(7) 式の条件は

$$qcb + \frac{1}{k} + \operatorname{Re}(qcA + c)(j\omega I - A)^{-1} b > 0, (\forall \omega) \quad (9)$$

となる。

一方、図-1 において線形部の伝達関数 $G(s)$ は、(2) 式から、入力 u 、出力 y をラプラス変換して

$$G(s) = c(sI - A)^{-1} b \quad (10)$$

となる。

(9) 式を整理し、(10) 式を使うと、 $\dot{V}(x)$ が負定であるための条件は

$$\operatorname{Re}(1 + j\omega q)G(j\omega) + \frac{1}{k} > 0, (\forall \omega) \quad (11)$$

となる。

ヤクボビッチーカルマンの補題は、(11) 式がすべての実数 ω について成立するような実数 q が存在すれば、(4) 式の \dot{V} が負定となるような正定行列 P が存在することを示している。したがってこれらの P, q に対して $V(x)$ が正定をいえば、システム (2) は大域漸近安定である。そこで $V(x)$ の正定性を検討すると、若干の考察により、任意の q に対して $V(x)$ は正定であることが分かる。以上により次の定理をうる。

定理 1

不等式 (11) がすべての ω について成立するような実数 q が存在するならば、図-1 すなわち (2) 式のシステムはセクタ $[0, k]$ に対して絶対安定である。

この定理はポポフの定理といい、リアプノフの方法における行列の計算のわずらわしさもなく、また (3) 式のようなリアプノフ関数で P を変えて得られる最良の結果と等価であることが分かっている。さらに、簡単な図式解法が可能である、など多くのすぐれた利点をもっており、リアプノフの方法で不動点の安定性を解析するよりはるかに便利である。

実はこのポポフの定理は、入出力安定性の基本定理であるスモールゲイン定理または受動定理からも導くことができる。また、この定理以外にも非線形特性が $y^2 k_1 \leq y \phi(y, t) \leq y^2 k_2$ のように、セ

クタ $[k_1, k_2]$ 内で時変まで許した場合に対しても、不動点の安定性と等価な周波数領域での安定定理が得られている。また文献 3) では、これらの定理を縮小写像の原理を使って論じている。

3. 不動点のロバスト性^{4), 5)}

システムのモデル誤差やパラメータ変動があっても、システムの制御性能が望ましい特性であるための条件を検討し、そのように制御系を設計することが必要である。このような制御をロバスト制御という。

しかし、一般に非線形制御系においては、入力と同じでもパラメータが変化すると、それにともなって不動点の数や性質も変化し、またパラメータに変化がなくても一定入力値が変化するとそれにともなって同様の変化が起こる。

非線形システムにおける平衡状態の解析は、分岐現象の解析の立場からは、不動点の数や性質が変化するための条件が興味の対象になっているが、ロバスト安定解析の立場からは、パラメータ変化によって不動点の数や性質が変わらないための条件を考える必要がある。

いま、次のシステムを考える。

$$\dot{x} = f(x, p) \quad (12)$$

ただし、 $x \in R^n$, $p \in R^m$: パラメータ集合、関数 f は x, p に関して微分可能とする。

いま、このシステムにおいて

$$f(x^*, p^*) = 0 \quad (13)$$

とする。 x^* は不動点であり、ただ一つ存在するとする。もし、 $p \neq p^*$ と変化したとすると、不動点は x^* であるとは限らない。そのときの不動点を $x^e(p)$ とする。すなわち

$$f(x^e(p), p) = 0 \quad (14)$$

である。そこで次に定義を与える。

定義 1

いま、 P を p^* を含むパラメータ p がとる値の集合とする。すべての $p \in P$ について、平衡状態 $x^e(p)$ がただ一つ存在し、大域漸近安定であるとき、(12)式のシステムは P に関してパラメトリック大域漸近安定という。

次に(12)式のシステムがパラメトリック大域漸近安定であるための条件を求める。そのため以下では、 $x^e(p)$ が存在する領域を推定し、そのすべてについてリアプノフ関数の存在をいうというア

プローチによって定理を導く。

いま、 f の x, p に関するヤコビアンを

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x &= \{a_{ij}(x, p)\} \\ \partial f / \partial p &= \{b_{ij}(x, p)\} \end{aligned} \quad (15)$$

とし、正則とする。かつ、行列 $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})$ を定義する。ただし、

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} \max_{x, p} a_{ij}(x, p) & i=j \\ \max_{x, p} |a_{ij}(x, p)| & i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

$$\hat{b}_{ij} = \max_{x, p} |b_{ij}(x, p)| \quad (17)$$

ただし、 $p \in P$ とする。

補題 2

$-A$ が M 行列であれば⁶⁾, $x^e(p)$ は一意で、その存在範囲は

$$d(x^e(p), x^*) \leq -\hat{A}^{-1} \hat{B} d(p, p^*) \quad (18)$$

である。ただし、この不等式は、左右両辺のベクトルの対応する要素ごとの成立を意味し、また、

$$d(x, x^*) = \begin{bmatrix} |x_1 - x_1^*| \\ \dots \\ |x_n - x_n^*| \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。 $d(p, p^*)$ も同じ。この補題はベクトル値関数に対する平均値の定理を使って証明できる。

次にこの不動点の安定条件を求める。

$$y = x - x^e(p) \quad (20)$$

とおき、(12)式を

$$\dot{y} = f(y + x^e(p), p) \quad (21)$$

と書く。

(21)式において、リアプノフ関数

$$V(y) = y^T D y \quad (22)$$

を考える。ただし、 D は正定対角行列である。

ここでベクトル値関数に対する平均値の定理を適用することにより

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= 2 y^T D f(y + x^e(p), p) \\ &\leq -(\lambda_{\min} C) y^T y \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、

$$C = -(\hat{A}^T D + D \hat{A})$$

である。 $-\hat{A}$ が M 行列なら C が正定となる D は必ず存在する。したがって(21)式において不動点 $y=0$ は大域漸近安定である。これより、次の定理を得る。

定理 2

(16)式で定義された $-\hat{A}$ が M 行列であれば(12)式のシステムはパラメータ領域 P に関してパラメトリック大域漸近安定である。

4. 不動点の分岐とカオス

前章ではシステムのパラメータが変動しても、不動点の数や性質が変わらないための条件を求めた。この節ではこれとは逆にパラメータ変動によって不動点の数が増えたり、またその性質が変化する場合を考える。一般にパラメータの微小変化により、システムのベクトル場が位相的に変化する現象を分岐現象という。

いま、 n 次元離散時間システム

$$x(k+1) = f(x, p) \tag{24}$$

または連続時間システム

$$\dot{x}(t) = f(x, p) \tag{25}$$

を考える。ただし、 $x \in R^n$, $f: R^n \rightarrow R^n$, p はパラメータである。以下、特に混乱が生じないときは $f(x, p)$ のかわりに $f(x)$ と書く。いま、 $f(x, p)$ の x に関するヤコビアン行列を $Df(x, p)$ と書き、点 (x_0, p_0) での $Df(x, p)$ を $Df(x_0, p_0)$ と書く。

(24) (または(25)式) の不動点が生じる必要条件是、分岐の型によって異なるが、次のようである⁷⁾。いま、 (x_0, p_0) を分岐値とする。

$Df(x_0, p_0)$ の固有値の一つが 1 (ゼロ) (括弧内は(25)式に対応、以下同じ) の場合、saddle-node, transcritical, pitchfork の三つの型の分岐が発生する。離散時間システムのみで発生するものであるが、 $Df(x_0, p_0)$ の固有値の一つが -1 の場合、 (x_0, p_0) に発生する分岐を flip 分岐という。flip 分岐で生じた 2 周期点が、さらに 4, 8... 周期点に分岐していく現象があり、これを周期倍分岐 (period-doubling bifurcation) という。

また $Df(x_0, p_0)$ の一組の複素固有値 $\lambda, \bar{\lambda}$ が $|\lambda|=1$ を満足しているとき (原点を除く虚軸上にあるとき)、点 (x_0, p_0) に Hopf 分岐が発生する。

分岐の種類については、紙数の関係でこれ以上の説明はしない。ここでは分岐を起こすシステムパラメータの集合 (これを分岐集合という) の求め方について解説する。制御システムに限らず、分岐集合を求めておくことは、システムの設計上、大変重要である。

分岐集合を求めるには $f(x, p) = 0$ と、分岐点での分岐条件とから状態 x を消去すればよい。たとえば、連続系の場合、 $f(x, p) = p_1 + p_2 x + x^3$ と

すると、サドルノード分岐集合は $p_1 + p_2 x + x^3 = 0$ と $\partial f / \partial x = p_2 + 2x^2 = 0$ から x を消去して、 $4p_2^3 + 27p_1^2 = 0$ となる。

一般に n 次元システムにおいては、変数の数が n 個あるため、上記の方法はそのまま適用できない。そのため、制御系でよく用いられる可制御標準形の概念を導入する。このため、いま、次のような離散時間フィードバックシステムについて考える。ただし、ここではサドルノード分岐の場合について述べる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) \\ y(k) &= cx(k) \\ u(k) &= -\phi(y(k)) + r \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

ただし、 $x \in R^n$, $u \in R^1$, $y \in R^1$, $r \in R^1$: 一定, (A, b) : 可制御対とする。このとき一般性を失うことなく、 A, b, c は次のような可制御標準形に書ける。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_n \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$b = (0, 0, \dots, 1)^T$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

このとき、不動点 $x_e = [x_{1e}, \dots, x_{ne}]^T$ が満足する平衡曲面は一次元になり、簡単な計算から

$$\left(i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) x_{ne} + \phi \left(\sum_{i=1}^n c_i x_{ne} \right) = r \tag{28}$$

となる。この式と、分岐の条件式、

$$(1 + \sum \alpha_i) + \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} \Big|_{y = \sum c_i x_{ne}} \times (\sum c_i) = 0 \tag{29}$$

から x_{ne} を消去すれば、この場合の分岐集合を得る。

以上は離散時間システムのみについて説明したが、連続時間システムの場合も同様にして求められる。

次に具体例を示す⁸⁾。

図-2 は連続時間システムをデジタル制御するサンプル値制御系を示す。いま、線形制御部の方程式を

$$\dot{x} = Ax + bu, y = cx \tag{30}$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\ b = (b_1, b_2)^T, c = (\beta_1, \beta_2)$$

とする。線形制御部が可制御という条件から、 $b_1 b_2(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ 、また、 $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ とする。 r を一定入力、 T をサンプリング周期とすると、図-2 の系の方程式はサンプリング時の入出力関係に注目すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \int_0^T e^{A(T-t)} b dt u(k) \\ y(k) &= cx(k) \\ u(k) &= r - \phi(y(k)) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ただし、 $x(k) \triangleq x(kT)$ 、 $y(k) \triangleq y(kT)$ 、 $u(k) \triangleq u(kT)$ 。また、 $(e^{AT}, \int_0^T e^{A(T-t)} b dt)$ は可制御対となるので、(31)式を変換行列によって可制御標準形に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= (\beta_1^*, \beta_2^*) x(k) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。ただし、

$$\alpha_1 = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}, \quad \alpha_2 = -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T})$$

(β_1^*, β_2^* の形を示すことは省略)

$\phi(x) = x^3$ のとき、サドルノード分岐集合は(28)、(29)式を使って計算すると、

$$-27 r^2 \left(\frac{b_1 \beta_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 \beta_2}{\lambda_2} \right)^3 + 4 = 0 \quad (33)$$

となる。 $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = -1$ 、 $b_1 \beta_1 = 2$ 、 $b_2 \beta_2 = 1$ とすると、この式は、 $-27 r^2 + 4 = 0$ となる。これより $r-T$ 平面上で分岐集合を示すと図-3 の実線と一点鎖線のようになる。またフリップ分岐集合も同様にして求められる。これを同図破線で示した。

図-3 の各領域における安定不動点と不安定不動点の数を図の下に示した。太線が安定不動点のサドルノード分岐集合で、この線を横切ったときは、安定不動点と不安定不動点各1個発生または消失する。一点鎖線は不安定不動点のサドルノード分岐集合であり、この線を横切ったときは、2個の不安定不動点が発生または消失する。

いま、 $r = 0.4$ とし、サンプリング周期 T を変

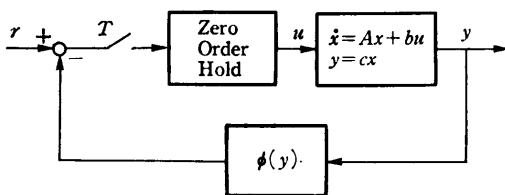
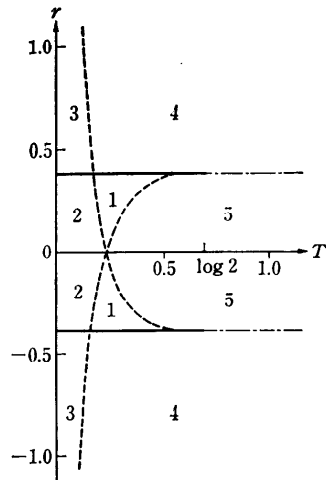


図-2 非線形サンプル値制御系

化させたときの分岐図を図-4(a)、(b)に示す。数字は周期を示す。 r や T が増加するにつれて安定不動点が2周期点、4周期点...と分岐し、この集結点でカオスが発生していることが分かる。

また、 T を一定にして r を変化させると同じような分岐図が得られるが、 T の値によっては、異なるパターンが得られる。たとえば、図-5(a)は $T = 0.1$ で r を 0.3849 から 0.01 だけ変化させたときで、これは不動点がサドルノード分岐によって他の不動点に分岐したことを示す。一方、 $T = 0.3$ のときは、図-5(b)に示すように不動点分岐を起こして、周期倍分岐を経ることなくカオスになっていることを示す。



領域	安定不動点	不安定不動点
1	1個	2個
2	2個	1個
3	1個	0
4	0	1個
5	0	3個

図-3 図-2 の系の分岐集合 ($\phi(x) = x^3$)

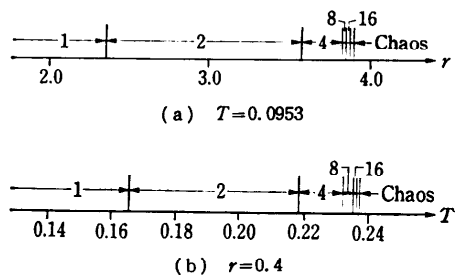
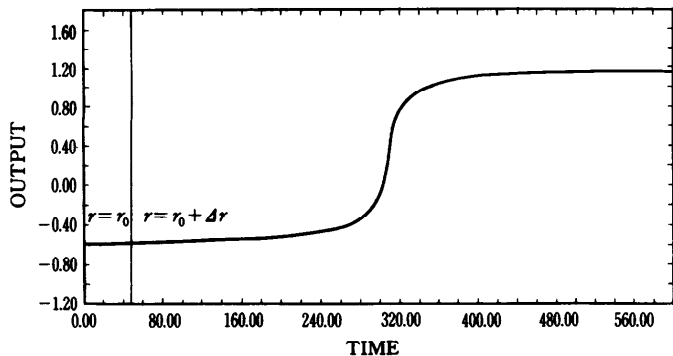
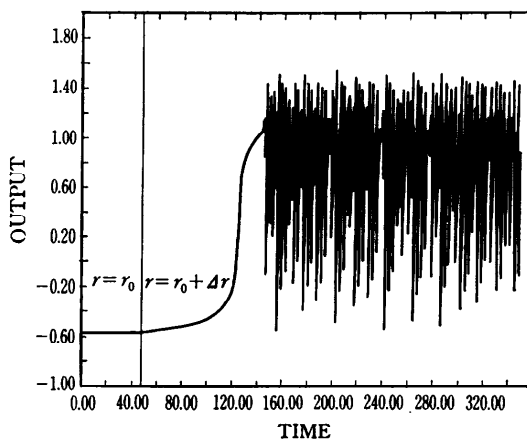


図-4 安定不動点からカオスへの分岐



(a) $T=0.1$ $r=0.3849$ $\Delta r=0.01$



(b) $T=0.3$ $r=0.3849$ $\Delta r=0.01$

図-5 不動点の変化

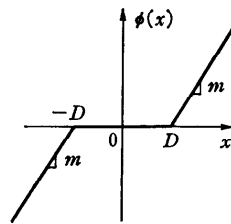
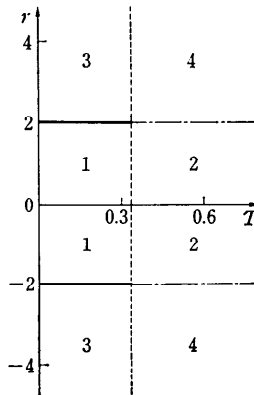


図-6 不感帯



領域	安定不動点	不安定不動点
1	2個	1個
2	0	3個
3	1個	0
4	0	1個

図-7 図-2の系の分岐集合 ($\phi(x)$: 図-6)

もし $\phi(x)$ が区分的線形要素の場合は, (28), (29)式は使えない. この場合, 折れ点において分岐が発生することを使えば, 分岐集合の条件を求めることができる. いま, (31)式において, $\phi(x)$ が, 折れ点 $\pm D$, 傾斜 m の不感帯とする (図-6). $m=6$, $D=1$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, $b_1\beta_1=1/3$, $b_2\beta_2=-1/3$ とし, $r-T$ 平面上で分岐集合を求めると 図-7 のようになる. ここで太線は安定不動点の, 一点鎖線は不安定不動点のサドルノード分岐集合を, 破線は Hopf 分岐集合をそれぞれ示している. この場合はフリップ分岐は発生しない.

この場合も不動点はさまざまなパターンに分岐する. たとえば, $r=-1$ として T を変化すると, Hopf 分岐集合を横切るとき, 安定不動点が不安定となり, そのまわりに不変閉曲線ができる. 図-8(a) は $T=0.35$, $r=-1$ のときの不変閉曲線である. さらに T を増していくと, この不変閉曲線の形がくずれ, やがてカオスに至る

(図-8(b)).

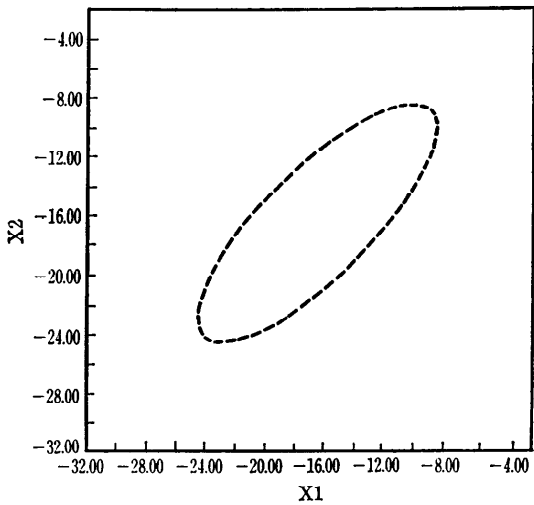
以上図-2 に示したサンプル値制御系において, 不動点の分岐のパターンを調べた. これから分かるように, 不動点はサンプリング周期 T の大きさによってその安定性が変化し, さまざまなパターンに分岐することが分かる.

図-2 の非線形特性が飽和特性で, 線形部の極が虚軸を含む左半面のみにあるときも, カオスが発生することが分かっている⁹⁾.

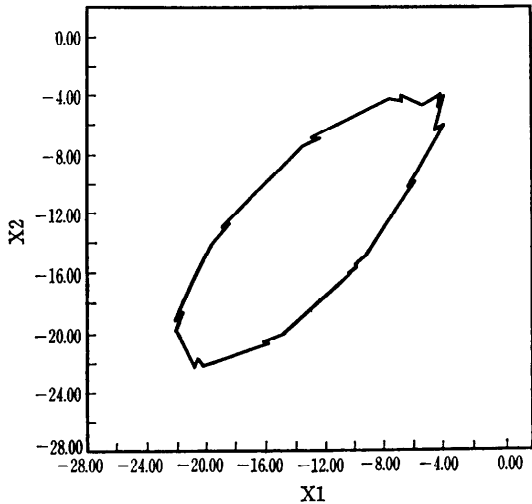
制御系においては, 環境条件や経年条件によって, パラメータの値が変化することが多く, このようなパラメータ変化による不動点の性質の変化を研究することは重要である.

5. 近似システムの不動点の変化

前章では, パラメータの微小変化によって, 不動点の性質が変化し, システムのふるまいが変化



(a) $r = -1.0$ $T = 0.35$



(b) $r = -1.0$ $T = 0.39$

図-8 不動点の Hopf 分岐

することを、サンプル値制御系を例にして示した。ここでは同様な不動点の性質の変化が、システムの線形化や離散時間化という近似にもなって起こることを示す。

5.1 線形化にともなう変化²⁾

いま、非線形方程式

$$\dot{x} = f(x) \tag{34}$$

を考える。ここで不動点を $x=0$ 、すなわち、 $f(0) = 0$ とする。 $x=0$ のまわりで(34)式を線形化した線形化方程式

$$\dot{x} = Ax, \quad a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j |_{x=0} \tag{35}$$

を考えると、線形化システムが漸近安定および不

安定であるときは、もとの非線形システムの不動点もそれぞれ漸近安定および不安定である。それ以外の場合、たとえば、 A のすべての固有値が虚軸を含めた閉左平面にあり、かつ、少なくとも1個の固有値が虚軸上にあるときは、二つの不動点の性質は一致するとは限らない。

次に別の線形化を考える。制御系でよく知られている線形化の一つに次のようなものがある。いま、図-1 または、

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u = -\phi(\sigma), \quad \sigma = cx \tag{36}$$

なるシステムを考える。

ただし、 $0 \leq \phi(\sigma)/\sigma \leq k$ 、 $\phi(0) = 0$ とする。このとき、 $\phi(\sigma) = K\sigma$ とおいた(36)式の線形化方程式

$$\dot{x} = (A - bKc)x \tag{37}$$

を考える。もし、(37)式の不動点が、 $0 \leq K \leq k$ のとき大域漸近安定であれば、(36)式の不動点もまた、同じ性質をもつであろうか。これがアイザーマンの推測といわれるもので、実は $G(s) = c(sI - A)^{-1} b$ の形によっては成立しない場合もあることが分かっている。また、 $0 \leq d\phi/d\sigma \leq k$ のとき、 $\phi(\sigma) = K\sigma$ とおいた(37)式の場合はどうか、これがカルマンの推測といわれるもので、この場合は両式の不動点の性質が一致するクラスは、より広くなるが、それでも $G(s)$ の形によっては成立しない場合もある。たとえば、 $G(s)$ の形が

$$\begin{aligned} &(s + b_0)/(s^2 + a_{15}s + a_{00}) \\ &1/(s^3 + a_{25}s^2 + a_{15}s + a_{00}) \\ &(s + b_0)/(s^3 + a_{25}s^2 + a_{15}s + a_{00}) \end{aligned}$$

などの場合はどちらの場合も成立する。ただし、分母は安定多項式とする。

もし、 $\phi(\sigma)$ が $\phi(\sigma) = 1$ 、 $\sigma > 0$ 、 $\phi(\sigma) = -1$ 、 $\sigma < 0$ なるリレー特性の場合、リレーを、傾き k をもつ飽和特性でおきかえ、原点まわりで線形化した線形化方程式(37)式において、 $K \rightarrow \infty$ のときも不動点が漸近安定であればもとの非線形システムの不動点も漸近安定であるか、この問題はチプキンの推測といわれ、これは正しいということが証明されている。

以上三つの線形化の方法と、それにもなう不動点の性質の変化について説明した。最後に説明したリレーのある制御系の場合を除いて、もとの非線形システムとそれを線形化したシステムの不動点の性質が一致するような線形化の方法はなかなか見当たらない。しかし、もしこういう線形化

の方法が見つければ、非線形システムの不動点の安定解析はすべて線形システムのそれにおきかえられるので、その有用性は大きい。この種の研究は主として 1960 年代の後半になされたが、主に連続系に対するもののみで、離散時間系に対するものはあまり見当たらない。離散時間系では、たとえば、1次元システムでもアイザーマンの推測は成立しない。

5.2 離散時間化にともなう変化

連続時間系をコンピュータシミュレーションするとき、いろいろな差分化によって連続系を離散時間系に変換することが多い。このとき、どの差分化法が誤差を少なくして、もとの連続系のふるまいを再現するかという問題はよく研究されている。問題はシステムパラメータときざみ幅の関係で、たとえば、前進オイラ法による離散時間化は、精度の点で最もわるい結果を与え、きざみ幅の大きさによって、線形、非線形を問わず、連続系の安定不動点が不安定になることがある¹⁰⁾。また、中心差分法においては、いかにきざみ幅を小さくしてもカオスが発生することがあることが報告されている。

すでに前章で、サンプリング周期の大きさによって不動点の性質が変化することを説明したので、説明が重複するが、ここではごく簡単な1次元システムを、前進オイラ法で離散時間化したときの不動点の変化を示す¹¹⁾。

いま、1次元システム

$$x(k+1) = -ax(k) - q(x(k)) + r \quad (38)$$

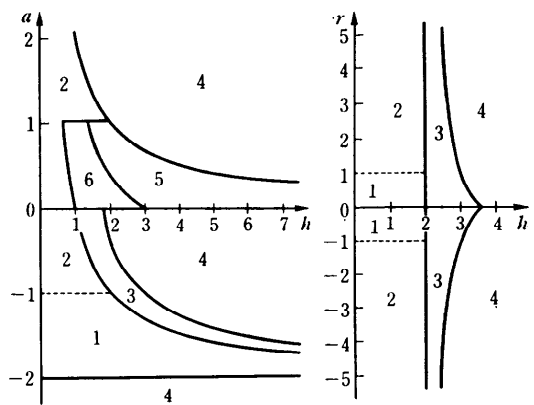
を考える。a, r は定数とし、q(•) は図-6 に示した不感帯とする。この式をきざみ幅 h の前進オイラ法で離散時間化すると、

$$x(k+1) = \phi(x(k)) \quad (39)$$

となる。ただし、

$$\phi(x(k)) = \begin{cases} (1-h(m+a))x + h(mD+r) & x \geq D \\ (1-ah)x + hr & x \leq D \\ (1-h(m-a))x + h(-mD+r) & x \leq -D \end{cases}$$

パラメータ平面上、不動点の性質や数の変化を示すと図-9(a), (b) のようになる。このような簡単な1次元システムでも、これを離散時間化することによって、パラメータ a と h または、r と h の大きさによって種々の分岐が発生することが分かる。



- (a)
- 1: 2個の安定, 1個の不安定不動点
- 2: 1個の安定不動点
- 3: カオス
- 4: 発散
- 5: 周期2以上の周期点
- 6: 安定2周期点
- 破線: サドルノード分岐集合 (D=1, m=1, r=1)

図-9 (39)式のパラメータ領域

6. おわりに

制御工学における不動点に関する種々の話題について解説した。制御システムの基本は、どのような初期値であっても、システムの不動点が漸近安定であることである。ただこれはシステムのパラメータが変化しないという前提にあり、システムのパラメータ変化によって、不動点は実にさまざまなふるまいをする。

本解説は 2. で不動点の安定解析法を説明したが、他の章はすべて不動点の性質の変化に関するものである。読者が制御工学に関して専門家でないということも考慮して説明したので、説明内容がいささか陳腐になったところもあるがお許し願いたい。また、現象面からの説明が多く、編集委員の意図に沿う解説になったか心配である。なお本稿をまとめるにあたり研究パートナーの潮俊光君(現神戸女学院大学)との仕事をかなり引用した。ここに同君に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Aggarwal, J. K., Vidyasagar, M. ed.: Nonlinear Systems, Stability Analysis, Dowden, Hutchinson Inc. (1977).
- 2) 平井, 池田: 非線形制御システムの解析, オーム社 (1986).
- 3) Holtzman, J. M.: Nonlinear System Theory, Prentice Hall (1970).

- 4) Ohta, Y., Ikeda, M. and Siljak, D. D.: **Parametric Stability of Model Ecosystems**, Ricciadi, L.M. ed., *Biomathematics and Related Computational Problems*, Kluwer Academic Pub., pp. 539-554 (1984).
- 5) 池田：非線形システムのロバスト安定性について，計測と制御，Vol. 30, No. 8 (1991).
- 6) 兎玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1978).
- 7) 平井：非線形システムの分岐現象とカオス，システムと制御，Vol. 28, No. 8, pp. 502-512 (1984).
- 8) 潮，平井：C¹クラスの非線形要素を持つサンプル値制御システムにおける分岐現象とカオス，電子通信学会論文誌，Vol. 556-A, No. 4, pp. 305-311 (1983).
- 9) 潮，平井，松本：微分要素をもつ非線形サンプル値制御系のカオス，電子情報通信学会論文誌，Vol. J71-A, No. 5, pp. 1208-1210 (1988).
- 10) Ushio, T. and Hirai, K.: **Chaos Induced by Generalized Euler Method**, *Int. J. Sys. Sci.*, Vol. 17, No. 4, pp. 669-678 (1986).
- 11) 平井：連続と離散，計測と制御，Vol. 27, No. 12, pp. 1098-1105 (1988).

(平成3年7月9日受付)



平井 一正

昭和6年生。昭和29年京都大学工学部電気工学科卒業。昭和31年同大学院修士課程修了。金沢大学、京都大学を経て、昭和39年神戸大学工学部計測工学科助教授。昭和47年同システム工学科教授となり、現在に至る。京都大学工学博士。非線形力学、非線形制御系の研究に従事。昭和42年-44年西ドイツシュツガルト大学客員研究員。平成3年より神戸大学大学院自然科学研究科長。システム制御情報学会、計測自動制御学会、電子情報通信学会、IEEEなど各会員。

