解 説

3. 情報工学に見られる不動点論の散策

3.2 アルゴリズムと不動点

——不動点アルゴリズム†——

山 本 芳 嗣††

0. はじめに

この 10 年来，可変次元アルゴリズムと呼ばれる不動点を計算する新しいアルゴリズムが現れてきた．それらは本来基準単体上での不動点を計算するために開発されたものであるが，その後非線形方程式を解くために拡張されてきている．さらに均衡点問題―それは関数の境界における振舞に制限がない不動点問題とみなすことができるのだが―に対してこれらのアルゴリズムを適用する研究がなされてきている．この稿では，まず数理経済学やゲーム理論や数理計画に現れる多くの問題を説明するのに均衡点問題が有用な問題であることを示そう．その後可変次元アルゴリズムの基本的な考えを述べる．

1. 可変次元アルゴリズム

不動点問題に対する可変次元アルゴリズムは Kuhn[11] や Shapley[22] にさかのぼることができる算法であり，オランダの van der Laan と Talman[15],[16] によって根本的に改良されたものである．そのアルゴリズムは以下の3点において従来のアルゴリズムから際立っている．第1に人工的な次元を必要としない点，第2に任意の初期点から出発できる点，第3に次元の異なる単体の列を生成する点である．このアルゴリズムはそもそも基準単体上のブラウアの不動点を求めるために開発され，その後非線形方程式系の解を求めるために拡張されてきたものである．この拡張の過程においてさまざまなアルゴリズムが追加され，現在では1個のアルゴリズムというよりは，同じ考えに基づくアルゴリズムのクラスであると言うことができる．

均衡点問題はしばしば変分不等式問題とも呼ばれるが，数理経済，非線形相補性問題，非線形計画法，交通流配分問題などを包含する問題である．この問題の初期の研究は主に制御理論において無限次元空間に関してなされてきた．それに関しては Kinderlehrer-Stampacchia[10] や Glowinski 他[5]を参照していただきたい．この問題は凸集合上への射影（定理 2.1 の証明の r）を用いることによって不動点問題に定式化できるが，そのように変換された問題ではなく，元の問題を直接解くほうが合理的であると考えられる．数学的に等価であることは必ずしも計算の観点から等価であることを意味するわけではない．van der Laan と Talman[17] は彼らの可変次元アルゴリズムを上下限制約のある線形相補性問題に応用し，均衡点問題に対するこの種のアルゴリズムの口火を切った．以下の章では，均衡点問題に帰着されるいくつかの問題を概観した後，**3.** で主双対擬多様体について説明し，このアルゴリズムの基礎となっている考えをある可変次元アルゴリズムを例に取って説明したいと思う．ここでは可変次元アルゴリズムに話を限ることにするので，他のアルゴリズム，たとえばホモトピ法などに関しては Allgower-Georg[1]，Todd[24]，あるいは Garcia-Zangwill[4] による成書を参照していただきたい．

2. 均衡点の存在とその応用

まず K を R^n の閉凸部分集合とし，f を K から R^n への連続関数とする，K の点 s が均衡点問題 (f, K) の均衡点あるいは解と呼ばれるのは点 s がいわゆる変分不等式 (2.1) 式を満足するときである．

$$\forall x \in K \ \langle x-s, f(s)\rangle \geqq 0 \qquad (2.1)$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表す．この不等式は s が

† Algorithms and Fixed Points —Fixed point algorithms— by Yoshitsugu YAMAMOTO (Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba).

†† 筑波大学社会工学系

✿ 用語解説にあることを示す記号

K の境界上にあるときは関数 $f(s)$ が K の内部に向かっていることを意味し，s が K の内点であるときは関数 $f(s)$ がゼロであることを意味している．ここで，K の点 x でのノーマル錐 $N_K(x)$ を

$$N_K(x)=\phi \qquad x\notin K \text{ の場合}$$
$$=\{y \mid \forall z\in K \ \langle y, z-x\rangle \leqq 0\} \qquad x\in K \text{ の場合}$$

のように定義したとすると，(2.1) は，s が

$$0\in f(s)+N_K(s)$$

を満たすことと同値であることが分かる．以下の定理 2.1 は均衡点の存在とブラウアの不動点定理とが同値であることを示している．

定理 2.1：K を R^n の空でないコンパクト凸部分集合とする．このとき以下の二つの命題は同値である．

• K から K への連続関数 g は不動点をもつ． (2.2)

• K から R^n の連続関数 f に対して均衡点問題 (f, K) は均衡点をもつ． (2.3)

証明：まず，(2.3) から (2.2) を示す．K から K への連続関数 g に対して $f(x)=g(x)-x$ とし，s を (f, K) の均衡点とする．g は K から K への関数であるので $f(s)=0$ が容易に確かめられる．つまり s は g の不動点である．逆を示すために，R^n の各点 z に対して $\min\{\|z-x\| \mid x\in K\}$ を達成する K の点を $r(z)$ で表すことにする．K がコンパクト凸集合であるからこの $r(z)$ は常に存在し，関数 r は連続となる．

$$g(x)=r(x-f(x))$$

とすると g は K から K への連続関数となるので，(2.2) より，不動点 s をもつ．つまり，$r(s-f(s))=s$．r の定義よりこれは $-f(s)\in N_K(s)$ を意味し，s が (f, K) の均衡点であることが分かる．

さて，次に数理経済，ゲーム理論，数理計画で現れる各種の問題がどのように均衡点問題に帰着されるかをみてみよう．

交換経済

Sonnenschein[23] が示したように n 次元の基準単体 $S^n=\{x \mid x\in R_+^{n+1}, \langle e, x\rangle=1\}$ から R^{n+1} への関数 f がなんらかの経済の *超過需要関数となるかどうかの決定的な点は，その関数がワルラス法則

$$\forall x\in S^n \ \langle x, f(x)\rangle=0 \qquad (2.4)$$

を満たすかどうかである．ここで e は全ての要素が 1 である $n+1$ 次元ベクトル，R_+^{n+1} は R^{n+1} の非負象限である．したがってここでは連続性以外には (2.4) だけを仮定することにしよう．この条件の下では $f(s)\leqq 0$ となるような価格ベクトル s が存在し，均衡価格と呼ばれる．この均衡価格 s の存在は通常は S^n から S^n への関数

$$g(x)=(x+f^+(x))/(1+\langle e, f^+(x)\rangle)$$

に対してブラウアの不動点定理を使って証明されることが多い．ここで f^+ は $f^+_i(x)=\max\{0, f_i(x)\}$ と定義される関数である．しかしながら s を均衡点問題 $(-f, S^n)$ の均衡点とすると s は線形計画問題

$$\max. \ \langle f(s), x\rangle$$
$$\text{s.t.} \ x\geqq 0, \langle e, x\rangle=1$$

の最適解となる．これより Karush-Kuhn-Tucker の条件より $i=1, \cdots, n+1$ に対して

$$f_i(s)=\mu-\lambda_i, \lambda_i\geqq 0, \lambda_i s_i=0$$

なる μ，λ_i が存在する．(2.4) より

$$\mu=\mu\sum s_i=\langle s, f(s)\rangle=0$$

であるから，結局 $f(s)\leqq 0$ が得られ，s は均衡価格であることが分かる．また逆に s が均衡価格であると仮定すると，再び (2.4) より

$$s_i>0 \text{ ならば } f_i(s)=0$$
$$s_i=0 \text{ ならば } f_i(s)\leqq 0$$

であるので $f(s)\in N_{S^n}(s)$ となり s は $(-f, S^n)$ の均衡点となる．したがって次の定理が得られる．

定理 2.2：f を n 次元の基準単体 S^n から R^{n+1} への連続関数とし，ワルラス法則 (2.4) を満たすものと仮定する．このとき，$(-f, S^n)$ の均衡点は均衡価格であり，またその逆も正しい．

経済が生産を含んである場合，その経済の均衡は以下のように定義される．$A(p)$ を価格 p での *テクノロジ行列とし，y をそのアクティビティレベル，$d(p)$ を価格 p での需要関数，b を初期保有とする．このとき，価格 p とアクティビティレベル y の対 (p, y) は以下の条件を満たすときにこの経済の均衡とよばれる．

$$d(p)-b-A(p)y\leqq 0$$
$$A(p)^t p\leqq 0$$
$$\langle y, A(p)^t p\rangle=0$$
$$\langle p, A(p)y-d(p)+b\rangle=0$$

それぞれ，超過需要がない，どのような生産活動も利益をもたらさない，実施されている生産活動の利益はゼロである，正の価格をもつ財について

需要と供給はバランスすることを意味する．定理 2.2 と同様に以下の定理が導かれる．

定理 2.3：$x=(p,y), f(x)=(d(p)-b-A(p)y, A(p)^t p), K=S^n\times R_+{}^m$ とする．$d(p)-b$ がワルラス法則 (2.4) を満たすならば，この経済の均衡は $(-f,K)$ の均衡点であり，またその逆も正しい．

この問題に対して Mathiesen[18] は問題の線形近似を作ることによって得られる線形相補性問題を繰り返し解く算法を提案している．また，Dirven-Talman[3] はテクノロジ行列が p に依存せず定数行列である問題に対して可変次元アルゴリズムを提案している．

非協力 n 人ゲーム

プレーヤ j は m_j+1 個の純粋戦略をもっているものとしよう．プレーヤ j の混合戦略 $x^j=(x^{j1}, x^{j2},\cdots,x^{j,m_j+1})$ とは彼が m_j+1 個の純粋戦略をランダムに選ぶ確率を表すベクトルである．したがって彼の第 h 番目の純粋戦略は単位ベクトル e^h で表されることになる．各プレーヤ i が彼の戦略空間から，混合戦略 x^i を選んだときのプレーヤ j の期待損失は $L_j(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ で与えられる．ここで，プレーヤ i の戦略空間は m_i 次元の基準単体である．プレーヤ j だけが彼の h 番目の純粋戦略を取り，ほかのプレーヤが，戦略を変えないときのプレーヤ j の限界損失を $L_j(x^{-j},e^h)$ で表すことにしよう．ここで，(x^{-j},e^h) は $(x^1,\cdots,x^{j-1},e^h,x^{j+1},\cdots,x^n)$ の省略形である．このゲームの均衡戦略は，

$$\forall h \forall i \ L_i(s)\leqq L_i(s^{-i},e^h) \tag{2.5}$$

を満たす点 s である．これはどのプレーヤも自分1人の戦略の変更では損失を減らすことができないことを意味している．ここで，

$$f_{ih}(x)=L_i(x)-L_i(x^{-i},e^h)$$
$$f_i(x)=(f_{i1}(x),\cdots,f_{i,m_i+1}(x))$$
$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$$

と定義すると (2.5) は $f(s)\leqq 0$ と簡単に書き直すことができる．L_i の定義と x^i が確率分布であることにより，$\langle x^i,f_i(x)\rangle=0$ が分かるので，以下の定理が得られる．

定理 2.4：$(-f,\Pi_i S^{m_i})$ の均衡点は，上のゲームの均衡戦略であり，またその逆も正しい．

この例では，K はいくつかの基準単体の直積であった．このように K が単体であったり，あるいはいくつかの単体の直積である場合には，すでにいくつかの可変次元アルゴリズムが開発されている．この場合には，K のノーマル錐 $N_K(x)$ はあらかじめ分かっていることに注意していただきたい．

非線形計画問題

次の非線形計画問題を考えよう．

最小化 $g_0(x)$

条件 $\forall i=1,\cdots,m \ g_i(x)\leqq 0$ (2.6)

適当な制約想定の下では，この問題の局所最小点は，

$$\nabla g_0(x)+D_g(x)=0$$
$$\forall i=1,\cdots,m \quad g_i(x)\leqq 0$$
$$u,\geqq 0 \ \langle u,g(x)\rangle=0 \tag{2.7}$$

を満たす．ここで，u は Karush-Kuhn-Tucker の乗数ベクトルで，$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_n(x))$ で，$Dg(x)$ は g の x でのヤコビ行列である．Robinson[21] は以下の定理を示している．

定理 2.5：$f(x,u)=(\nabla g_0(x)+Dg(x)u, g(x))$ とし，K を $R^n\times R_+{}^m$ とする．このとき，(x,u) が $(-f,K)$ の均衡点であるとき，また，そのときに限り (2.7) が成り立つ．

一般化された相補性問題

相補性問題とは与えられた関数 f に対して

$$s\geqq 0,\ f(s)\geqq 0, \langle s,f(s)\rangle=0$$

を満たす点を求める問題であり，数理計画の分野では基本的な問題の一つである．容易に分かるようにこの問題は $K=R_+{}^n$ 上での均衡点問題に帰着できる．この相補性問題の非負制約を一対の錐によって作られる半順序に置き換えることによって以下の一般化された相補性問題が得られる．

$$s\in K, f(s)\in K^+, \langle s,f(s)\rangle=0$$

ここで K は R^n の錐で，$K^+=\{y|\ \forall x\in K\langle y,x\rangle\geqq 0\}$ である．

定理 2.6：一般化された相補性問題の解は，(f,K) の均衡点であり，またその逆も正しい．

均衡点問題の典型的な解法は関数をその線形近似で置き換えた問題の均衡点を繰り返し求めるものである．つまり，点 x^k で関数 f を線形関数 $f^k(x)\equiv f(x^k)+A(x^k)\ (x-x^k)$ で近似し，問題

$$0\in f^k(x)+N_K(x)$$

を解いてその（近似）解として x^{k+1} が得られる．ここで行列 $A(x^k)$ の選び方によって各種の方法がある．$Df(x^k)$ あるいはその近似を選べば，ニュートン，準ニュートン，線形化ヤコビ法などが

得られ，固定された対称行列を選んだ場合には射影形が得られる．しかしながらこれらニュートン法に類する方法は通常の非線形方程式に対するニュートン法と同様にその収束は大域的ではなく，局所的であるという短所をもっている．たとえば収束条件に対しては Pang-Chan[19] を参照せよ．

射影法は定理 2.1 で使われた均衡点問題の定式化に依存しており，関数 f がある種の単調性を満たさない場合には収束が保証されない，関数 f のヤコビ行列が対称でない場合には関数 f はあるスカラ関数の勾配としては得られないが，非線形計画法の考え方を使ったアルゴリズムがいくつかある．たとえば，Hammond-Magnanti[6] や Ito-Fukushima-Ibaraki[8] を参照せよ．K 全体の上で線形化された問題を解く代わりに，K の部分集合 K^k 上で線形の均衡点問題，(f^k, K^k) を解く方法もある．K^k は通常 K の少数の端点の凸包が取られ，次の部分集合 K^{k+1} をつくるために端点が追加されたり，あるいは削除されたりする．この方法は単体的分解法 (simplicial decomposition) と呼ばれている．もちろん，どのように K^k を更新するかが収束に対して重要である．たとえば Lawphongpanich-Hearn[14] や Pang-Yu[20] を見よ．また Dafermos[2] や Harker-Pang[7] による最近の総合報告を参照していただきたい．

以下の章では不動点アルゴリズムに共通のパス追跡という概念によって f が連続で K が凸コンパクトという条件の下で収束するアルゴリズムが得られることを示そう．ただし，議論を簡単にするため，以下では，f は連続微分可能であると仮定しておく．

3. PDM と基本システム

この章では分割多様体と不動点アルゴリズムのための基本的な定理と主双対分割多様体について概観することにする．まず，m 次元の凸多面体を m-セル，あるいはセルと呼ぶ．セル B がセル C のフェイスであるとき $B<C$ と書くことにする．有限あるいは可算無限個の m-セルの族 M が以下の性質をもつときにそれを分割多様体と呼ぶ．

- M の二つのセルの交わりは空かそのセルのフェイスである　　(3.1)
- $\overline{M}$ の $(m-1)$-セルは M の高々二つの m-セルのフェイスとなる　　(3.2)
- $|M|$ の各点には M の有限個のセルとだけ交わりをもつ近傍が存在する　　(3.3)

ここで

$$\overline{M}=\{B|B \text{ は } M \text{ の } m\text{-セルのフェイス}\}$$
$$|M|=\cup\{C|C\in M\}$$

である．図-1 に (3.1) の例，図-2 に (3.1) を満たしているが (3.2) を満たさない例を示しておく．また，

$$M=\{[-1,0]\}\cup\{[1/(k+1),1/k]|k=1,2,\cdots\}$$

は(3.1) (3.2) を満たしているが (3.3) を満たしていない．実際点 0 には (3.3) の近傍が存在しない．$\overline{M}$ の $(m-1)$-セルで M のちょうど一つの m-セルのフェイスになっているものを集めた族を M の境界と呼び，それを ∂M と書くことにする．$|M|$ から R^n への連続関数 h を M の各セルに制限したとき，それが連続微分可能な拡張をもつならば，その h を区分的に連続微分可能である (PC^1 と略す) と呼ぶことにする．セル C の点 x での h のヤコビ行列を $Dh(x;C)$ と書く．R^n の点 c が

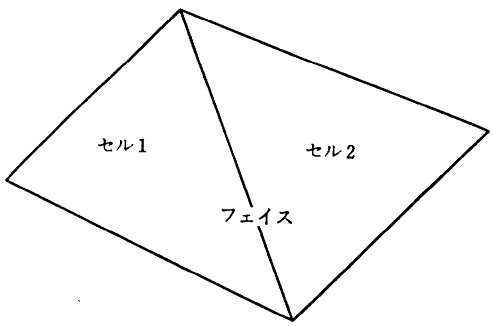

図-1 二つのセルの交わりは空かフェイス

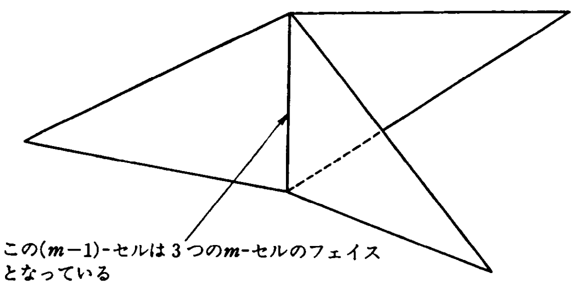

図-2 条件「$(m-1)$-セルは高々二つの m-セルのフェイス」を満たさない

$x \in B < C \in M$ かつ $h(x)=c$ ならば

$\dim \{Dh(x;C)y \mid y \in B\} = n$

を満たすときに，c を $h: |M| \to R^n$ の正則値と呼ぶ．サードの定理によると，R^n のほとんど全ての点が正則値であることが分かる．特に $m=n+1$ の場合，以下の定理が得られる．

定理 3.1：M を R^k の中の $n+1$ 次元分割多様体とし，h を M 上の PC^1 写像とする．また，c を h の正則値とする．このとき，$h^{-1}(c)$ は排反なパスとループの和集合となる．ここで，パスとは $(0,1)$，$(0,1]$ あるいは $[0,1]$ のいずれかの同相な1次元多様体を意味し，ループとは，1次元球面と同相な1次元多様体を意味する．さらに，

- M の各セル C について $h^{-1}(c) \cap C$ は空集合であるか，あるいは排反な滑らかな1次元多様体の和集合となる．(3.4)
- ループは $|\partial M|$ と交わらない．(3.5)
- $h^{-1}(c)$ の点 x がパスの端点となる必要かつ十分な条件は x が $|\partial M|$ に属することである．(3.6)
- $|M|$ が R^n の閉集合であれば開区間 $(0,1)$ あるいは半開区間 $(0,1]$ と同相なパスは非有界である．(3.7)

次に，一対の分割多様体 P と D を考えることにしよう．もしも P と D が $\bar{P} \cup \bar{D}$ から $\bar{P} \cup \bar{D} \cup \{\phi\}$ への写像 d と正の整数 δ に対して以下の性質を満たすならばわれわれはこれを次数 δ の主双対分割多様体（PDM と略す）と呼ぶことにする．

- 各 $X \in \bar{P}$ に対して $X^d \in \bar{D} \cup \{\phi\}$ であり，各 $Y \in \bar{D}$ に対して $Y^d \in \bar{P} \cup \{\phi\}$ である．(3.8)
- もしも Z^d が空でなければ $(Z^d)^d = Z$ で，$\dim Z + \dim Z^d = \delta$ である．(3.9)
- Z_1，$Z_2 \in \bar{P}$ で，$Z_1 < Z_2$ で，$Z_1{}^d \neq \phi$，$Z_2{}^d \neq \phi$ であれば $Z_2{}^d < Z_1{}^d$ である．(3.10)

ここで，Z^d を Z の双対セル，δ を PDM の次数と呼ぶことにする．主セルと双対セルの次元の和は常に次数 δ となるので (3.9) は主セルの次元が増加した場合，双対セルの次元が減少することを意味している．次数 δ の PDM に対して

$$\langle P, D; d\rangle = \{X \times X^d \mid X \in \bar{P}, X^d \neq \phi\}$$

と定義しよう．これは

$$\langle P, D; d\rangle = \{Y^d \times Y \mid Y \in \bar{D}, Y^d \neq \phi\}$$

と書くこともできる．

定理 3.2：P と D の対を次数 δ の主双対分割多様体とする．このとき，$M = \langle P, D; d\rangle$ は δ 次元分割多様体となり，

$$\begin{aligned}\partial M = \{X \times Y \mid\ & X \in \bar{P}, Y \in \bar{D},\\ & X \times Y \text{ は } \bar{M} \text{ の } (\delta-1)\text{-セル}\\ & X^d = \phi \text{あるいは } Y^d = \phi\}\end{aligned}$$

なる境界をもつ．

Kojima-Yamamoto[12),13)] で示された不動点アルゴリズムに対する基本システムは

$$h(x,y) \equiv f(x) + y = 0$$
$$(x,y) \in |M| \qquad (3.11)$$

である．f を $|P|$ から R^n への連続微分可能な関数とする．もしも (P,D) が次数 $n+1$ の PDM で $0 \in R^n$ が PC^1 写像 $h(x,y)$ の正則値であるとすると，定理 3.1 をシステム (3.11) に適用することによってその解集合がパスとループからなることが分かる．したがって，容易に出発点を見つけることができ，その出発点からパスをたどると均衡点に到達するような境界をもつように，いかに分割多様体を構成できるかがアルゴリズム構成上の要点となる．

4. 均衡点問題に対する可変次元アルゴリズム

アルゴリズムの例としてここでは Talman-Yamamoto[25)] によって提案されたコンパクト凸多面体上での均衡点問題 (f,K) に対するアルゴリズムを紹介しよう．ここで K は線形等式不等式系によって

$$\begin{aligned}K = \{x \in R^n \mid\ & \forall i = 1, \cdots, k\ \langle a_i, x\rangle - b_i = 0\\ & \forall i = 1, \cdots, m\ \ \langle c_i, x\rangle - d_i \leqq 0\}\end{aligned}$$

と与えられている．PDM と基本システム (3.11) からどのようにアルゴリズムが導かれるのかをみていただきたい．この問題ではノーマル錐 $N_K(x)$ は

$$\begin{aligned}N_K(x) = \{y \mid\ & \exists \mu\, \exists \nu \geqq 0\\ & y = \textstyle\sum \mu_i a^i + \sum \nu_i c^i\\ & \forall i\ ((\langle c^i, x\rangle - d_i)\nu_i = 0\}\end{aligned}$$

と陽に記述できる．K のフェイス F を固定すると，そのどの相対的内点 x に対してもノーマル錐 $N_K(x)$ は同じであるから，ここではこれを $N_K(F)$ と書くことにしよう．このように定義すると K のフェイス F が均衡点をもつ必要かつ十分な条件は

$$0 \in f(F)+N_K(F) \qquad (4.1)$$

となる．さて，点 w を K の任意に選んだ初期点とする．そして，w を含まないフェイス F に対して wF でこの点 w と F の凸包を表すことにする．(4.1) の $f(F)$ を $f(wF)$ に置き換えることによって

$$0 \in f(wF)+N_K(F)$$

あるいは

$$0=f(x)+y, x \in wF, y \in N_K(F)$$

が得られる．wF の次元は $\dim F+1$ で，$N_K(F)$ の次元は $n-\dim F$ であるのでそれらの和は常に $n+1$ となる．したがって PDM を

$P=\{wF|F$ は w を含まない K のファセット$\}$

$D=\{N_K(v)|v$ は K の端点$\}$

w を含まない K のフェイス F について

$wF \leftarrow d \rightarrow N_K(F)$

と定義するのは自然であろう．ここで K のファセットとは K のフェイスで，その次元が K の次元より 1 少ないものをいう．このように定義すると $M=\langle P, D; d\rangle$ は $n+1$ 次元分割多様体となり，その境界は

- K の w を含まないフェイス F に対する
  $F \times N_K(F)$　(4.2)
- K の w を含むフェイス F と F の w を含まないフェイス G に対する
  $wG \times N_K(F)$　(4.3)
- K の端点 v に対する
  $\{w\} \times N_K(v)$　(4.4)

からなっていることが分かる．基本システム (3.11) に従って

$$h(x,y) \equiv f(x)+y=0$$
$$(x,y) \in |M| \qquad (4.5)$$

を考えることにしよう．

定理 4.1：$0 \in R^n$ が h の正則値であり，初期点 w は (f,K) の均衡点でないと仮定しよう．このとき $(w,-f(w))$ から $(s,-f(s))$ への (4.5) の解からなるパスが存在し，s は (f,K) の均衡点となる．

証明：$(w,-f(w))$ は明らかに (4.5) の解である．K がコンパクトであるから，$N_K(v)$ の全ての端点 v に対する和集合は R^n を覆い尽くす．w が均衡点でないとの仮定より，$-f(w)$ は $N_K(w)$ に属していない．したがって，

$$(w,-f(w)) \in \{w\} \times N_K(v) \subset |\partial M|$$

となる頂点 v が存在する．このとき定理 3.1 によって (4.5) の解からなるパスで，(0,1] あるいは [0,1] のいずれかと同相なものが存在する．$|M|$ は閉集合 $wF \times N_K(F)$ の有限和であるから，また閉である．さらに，K のコンパクト性と f の連続性より，(4.5) の解はコンパクト集合 $K \times f(K)$ に含まれる．したがって (3.7) によってパスは閉区間 [0,1] と同相となり，$|\partial M|$ の中に相異なる二つの端点をもつ．そこで，(s,y) を $(w,-f(w))$ とは異なる端点としよう．そうすると $y=-f(s)$ で $(s,y)=(s,-f(s))$ は (4.2) か (4.3) のセルに属する．実際，ある端点 v に対して $(s,-f(s))$ が $\{w\} \times N_K(v)$ に属したとすると，$s=w$ で $f(s)=f(w)$ となってしまう．これは $\{s,y\}$ が $(w,-f(w))$ と異なることに矛盾する．したがっていずれの場合でも $(s,-f(s))$ はなんらかのフェイス F に対して $F \times N_K(F)$ に属している．これは s が均衡点であることを意味し，証明を終わる．

このように $(w,-f(w))$ から出発して (4.5) の解からなるパスを追跡することによって均衡点に到達することができる．このパスを変数 x の空間に射影するとそれは初期点 w と K のある端点を結ぶ線分に沿って w から伸びていることが分かる．図-3 にその様子を示しておく．

(4.5) の解からなるパスを追跡するのによく知られた予測修正子法が利用できる．また w と F の凸包であるセル wF は w と F の端点の凸包でもあるから (4.5) の代りに以下のシステムを考えても同じことである．ここで v は F の端点，I は F で有効な不等式制約の添字集合とする．

$$f(\lambda_w w+\textstyle\sum_v \lambda_v v)+\sum_I \mu_i a^i+\sum_I \nu_i c^i=0$$

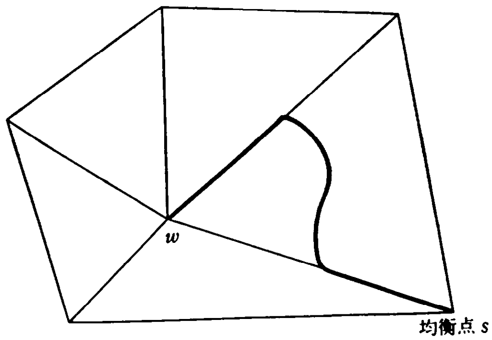

図-3　パスの x の空間への射影

$\lambda_w+\sum_v \lambda_v=1$

$\lambda_w \geqq 0,\ \forall v\ \lambda_v \geqq 0,\ \forall i \in I\ \ \nu_i \geqq 0$

一般には wF も $N_K(F)$ も単体的ではない．このことによって上式の係数 λ, μ, ν が一意でなくなるという問題点が生じる．f がアフィン関数である場合，Yamamoto[26] に単体的分解の考えが提案されている．Talman-Yamamoto[25] では (4.5) の f を K の単体分割 T 上での区分的線形近似 ϕ で置き換えて解の作るパスを追跡することが提案されている．つまり基本システムは

$$H(x, y) \equiv \phi(x)+y=0 \qquad (x, y) \in |M| \qquad (4.6)$$

である．w を含まない K の全てのフェイス F に対して

$$\{\sigma \times N_K(F) \mid \sigma \in \overline{T}, \sigma \subset wF, \dim \sigma=\dim wF\}$$

を集めることによって M の細分が得られる．この細分は必ずしも単体的ではないが，H はそのどのセル上でもアフィン関数となる．したがって，区分的線形関数に対する正則値の仮定の下では $(w, \phi(w))=(w, f(w))$ から (ϕ, K) の均衡点へのパスの存在を示すことができる．ϕ は f の近似であるからこの均衡点は (f, K) の近似均衡点となる．詳細に及ぶことを控えるが，H が区分的線形関数であることを利用すると，(4.6) のパスの追跡は線形計画法でなじみの深いピボット演算によって実行できる．

5. むすび

ここで紹介した可変次元アルゴリズムに対して，その効率の改善のための努力がなされている．たとえば Kamiya-Talman[9] では必要なピボット演算回数を減らす工夫が提案されている．また，Yamamoto[27] にはこの種のアルゴリズムが与えるゲームの均衡解がある意味で安定であることが議論されている．収束速度の点ではニュートン法系列のアルゴリズムに譲るとしても，収束のために局所的な条件を必要としない点でこの類のアルゴリズム，あるいはそのアイデアは有効であると考えている．

参考文献

1) Allgower, E. and Georg, K.: Numerical Continuation Methods—An Introduction—(Springer-Verlag, Berlin, 1990).
2) Dafermos, S.: An Iterative Scheme for Variational Inequalities, Mathematical Programming 26, pp. 40-47 (1983).
3) Dirven, C. A. J. M. and Talman, A. J. J.: A Simplicial Algorithm for Finding Equilibria in Economies with Linear Production Technologies, FEW 217, Tilburg University (1988).
4) Garcia, C. B. and Zangwill, W. I.: Pathways to Solutions, Fixed Points and Equilibiria (Prentice-Hall, Inglewood Cliffs, 1981).
5) Glowinski, R., Lions, J. L. and Tremolieres, R.: Numerical Analysis of Variational Inequalities (North-Holland, Amsterdam, 1981).
6) Hammond, J. H. and Magnanti, T. L.: Generalized Descent Methods for Asymmetric Systems of Equations, Mathematics of Operations Research 12, pp. 678-699 (1987).
7) Harker, P. T. and Pang, J.-S.: Fininte-dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications, 87-12-06, University of Pennsylvania (1987).
8) Ito, T., Fukushima, M. and Ibaraki, T.: An Iterative Method for Variational Inequalities with Applications to Traffic Equilibrium Problems, Journal of the Operations Research Society of Japan, 31, pp. 82-104 (1988).
9) Kamiya, K. and Talman, A. J. J.: Linear Stationary Point Problems, No. 9022, Center for Economic Research, Tilburg University (Apr. 1990).
10) Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G.: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications (Academic Press, New York, 1980).
11) Kuhn, H. W.: Approximate Search for Fixed Points, in: Computing Methods in Optimization Problems 2 (Academic Press, New York, 1969).
12) Kojima, M. and Yamamoto, Y.: Variable Dimension Algorithms: Basic Theory, Interpretations, Mathematical Programming 24, pp. 177-215 (1982).
13) Kojima, M. and Yamamoto, Y.: A Unified Approach to the Implementation of Several Restart Fixed Point Algorithms and a New Variable Dimension Algorithm, Mathematical Programming 28, pp. 288-328 (1984).
14) Lawphongpanich, S. and Hearn, D. W.: Simplicial Decomposition of the Asymmetric Traffic Assingnment Problem, Transportation Research 18 B, pp. 123-133 (1984).
15) van der Laan, G. and Talman, A. J. J.: A Restart Algorithm for Computing Fixed Points

without an Extra Dimension, Mathematical Programming 17, pp. 74-84 (1979).
16) van der Laan, G. and Talman, A. J. J.: A Class of Simplicial Restart Fixed Point Algorithms without an Extra Dimension, Mathematical Programming 20, pp. 33-48 (1981).
17) van der Laan, G. and Talman, A. J. J.: An Algorithm for the Linear Complementarity Problem with Upper and Lower Bounds, FEW 200, Tilburg University (1985).
18) Mathiesen, L.: Computation of Economic Equilibria by a Sequence of Linear Complementarity Problems, Mathematical Programming Study 23, pp. 144-162 (1985).
19) Pang, J.-S. and Chan, D.: Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems, Mathematical Programming 24, pp. 284-313 (1982).
20) Pang, J.-S. and Yu, C.-S.: Linearlized Simplicial Decomposition Method for Computing Traffic Equilibria on Networks, Networks 14, pp. 427-438 (1984).
21) Robinson, S. M.: Genaralized Equations, in: Bachem, A., Grötschel, M. and Korte, B. eds., Mathematical Programming, The State of the Art, pp. 346-367 (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
22) Shapley, L. S.: On Balanced Games without Side Payments, in: Hu, T. C. and Robinson, S. M. eds., Mathematical Programing, pp. 261-290 (Academic Press, New York, 1973).
23) Sonnenschein, H.: Market Excess Demand Functions, Econometrica 40, pp. 549-563 (1972).
24) Todd, M. J.: The Computation of Fixed Points and Applications (Springer-Verlag, Berlin, 1976).
25) Talman, A. J. J. and Yamamoto, Y.: A Simplicial Algorithm for Stationary Point Problems on Polytopes, Mathematics of Operations Research 14, pp. 383-399 (1989).
26) Yamamoto, Y.: A Path-following Algorithm for Stationary Point Problems, Journal of the Operations Research Society of Japan 30, pp. 181-198 (1987).
27) Yamamoto, Y.: A Path-following Procedure to Find a Proper Equilibrium of Finite Games, No. 90636-OR, Institut für Ökonometrie und Operations Research, Universität Bonn (Mar. 1990).

(平成3年7月16日受付)

用語解説

超過需要関数

市場に参加している者が財の市場価格 p を与件とみなして，自分の効用あるいは利潤を最大にするように行動した際に決定される各財の需要量から供給量を差し引いた量を超過需要という．超過需要は市場価格 p の関数となるので，これを超過需要関数という．

テクノロジ行列

企業の生産工程への投入量 y からその産出量を得る関数が y の線形関数 Ay であるとき，行列 A をテクノロジ行列という．

山本 芳嗣

1951年生．1973年名古屋工業大学工学部経営工学科卒業．1975年慶應義塾大学工学研究科修士課程（管理工学）修了．1978年同博士課程修了．工学博士．慶應義塾大学工学部助手，東京工業大学理学部助手（情報科学科），筑波大学講師（社会工学系），助教授を経て，現在同大学教授．数理計画に興味を持っている．Mathematical Programming Society，日本オペレーションズ・リサーチ学会各会員．