解説

2. 諸科学に見られる不動点論の散策

2.4 経済学と不動点

——経済成長モデルとその周辺†——

西村 和雄††

1. はじめに

経済学で不動点定理が用いられたのは，フォン・ノイマンによる 1937 年の論文が最初であろう．英語に訳されて，1945 年に再発表されている[1]．フォン・ノイマンの論文は，いくつかの点でその後の経済学の方向づけを与えた．彼のモデルは，多部門経済成長モデルであった．もし，時間を捨象して静学モデルにしてみるなら，それは，現在において一般均衡モデルとよばれるものの原形となっている．動学モデルとしてみるなら，現在の経済成長理論の基礎を与えている．そして，またゲームの理論におけるミニ・マックス定理の証明をも与えている．さらに，数学的には，ブラウァの不動点定理を用いて，現在，角谷の不動点定理とよばれている．対応の不動点の存在に関する結果を，証明したのである．角谷の論文はフォン・ノイマンの結果に対して，簡潔な別証明を与えたものである[2]．よりフォン・ノイマンに近い方法での不動点定理の証明は，二階堂によって与えられている[3]．

本論文では，その後，経済学で，不動点定理もしくは，その一般化であるホップ＝ミルナの定理，分岐定理などがどのように対応されているかを議論しよう．

2. 一般均衡理論

時間を捨象した静学モデルで，経済学における均衡について考えてみよう．不動点定理は，一般化された均衡の存在証明に使われるものである．

いま財の量を y として，価格 p が与えられたときの，財への需要量を $D(p)$，供給量を $S(p)$ とする．需要と供給の差を $z(p)$ とし，超過需要関数と呼ぶ．需要が供給を超過する量を価格の関数とみなしたものである．需要と供給が一致するとき，その価格と量の組 $E=(p^*, y^*)$ を均衡とよぶ．図-1 は，1 種類の財と価格の関係を表すものである．

しかし，一般には，一つの財の需給量は，ほかの財の価格にも依存している．したがって，n 個の財が存在し，その価格を $p=(p_1, \cdots, p_n)$ と表される．そして，すべての市場で，財の需要と供給が一致する価格は，非線形連立方程式

$$z^j(p_1, p_2, \cdots, p_n)=0 \quad j=1, \cdots, n$$

すなわち，$z(p)=0$

の解 $(p_1^*, \cdots, p_n^*)$ として求まる．これを均衡価格とよぶ．このように，互いに関連する市場を同時的にとらえた分析を一般均衡理論とよぶ．

超過需要関数の性質：財の需要関数や供給関数の裏には，多数の消費者が予算制約の下で効用（満足の度合い）を最大化し，多数の企業が利潤を最大化する行動がある．一般均衡理論は多数の経済主体の最大化行動を明示的に組み入れたモデルの上に展開される．そのような最大化行動の定式化から，需要関数と供給関数が一定の性質をもつこととなる．したがって，超過需要関数も一定の性質をもつことになる．ここでは，簡単化のために，しばらく，消費者や企業の行動にはふれずに，超過需要関数のみを用いて，一般均衡理論ではどのような数学的問題が生ずるかを議論することとする．

いま，価格 p は，$\Omega=\{x \in R^n \mid x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, x \neq 0\}$ の要素とし，超過需要は，連続な関数 $z: \Omega \rightarrow R^n$ であるとする．超過需要関数は，背後に存在する消費者や企業の行動から課せられる以下のような性質をもつ．まず，債券の価格や労働の価格（賃金）を含めて，すべての財の価格が 2 倍

† Economics and Rixed Points by Kazuo NISHIMURA (Kyoto University, Institute of Economic Research).
†† 京都大学経済研究所

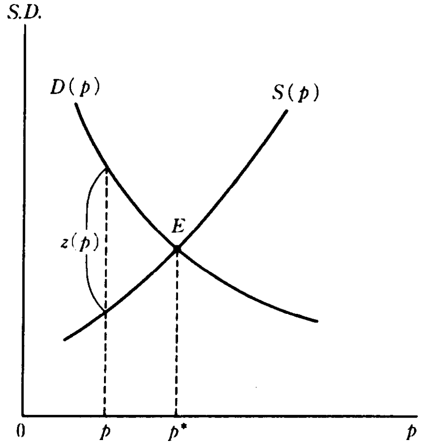

図-1　需要・供給の価額依存性

になったとすれば，需要・供給のいずれにも影響を与えない．この性質は

任意の正の実数 $\alpha>0$ に対して $z(\alpha p)=z(p)$　　(1)

と，表現され，超過需要関数の0次同次性とよばれる．一般に，関数 $f(x)$ が k 次同次性をもつとは，

$$f(\alpha x)=\alpha^k f(x), \alpha>0 \tag{2}$$

の意味である．$k=0$ の場合に，0次同次性とよばれる．

第2に，人々の支出計画が所得の制約の下で行われると仮定することによって，ワルラス法則とよばれる

$$pz(p)=0 \text{ すなわち } \sum_{i=1}^{n} p_i z^i(p)=0 \tag{3}$$

が得られる．これは経済全体としては，収入と支出が一致するという意味である．ワルラス (Leon Walras, 1834-1910) は，一般均衡理論を数学的に展開し，またその分析を行った経済学者である．

第3に，各財の価格が十分小さくなると，その財への需要が供給を上回るという性質である．これは，

$$p_i=0 \Rightarrow z^i(p)>0,\ i=1,\cdots,n \tag{4}$$

と表される．

価格の正規化：均衡の存在とは，上の性質(1)，(3)，(4)を満たす連続関数の特異点の存在問題のことであり，これは難しいものではない．しかし，順序を踏まえて議論を進めることにしよう．

超過需要関数の0次同次性(1)から，すべての価格 Ω を考える代わりに，

$$\Delta=\left\{p\in\Omega \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i=1\right\} \tag{5}$$

あるいは

$$S=\left\{p\in\Omega \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i^2=1\right\} \tag{6}$$

に制限して，価格比の異なるすべての組を考えるだけでよい．価格を正規化するのである．また，一つの財の価格を固定して，残りの財の価格を変化させることにしてもよい．いま第 n 財の価格を $p_n=1$ として

$$T=\{(x,1)\,|\,(x,1)\in\Omega\} \tag{7}$$

を考えてもよいことになる．いま，最後の方法をとるとすると，ワルラス法則(3)から

$$pz(p)=\sum_{i=1}^{n-1} p_i z^i(p)+z^n(p)=0 \tag{8}$$

なので，$z^i(p)=0,\ i=1,\cdots,n-1$ ならば，$z^n(p)=0$ が成り立つ．したがって，$n-1$ 個の財の市場において均衡が成立すれば，残りの1個の市場も均衡することになる．

均衡の存在：以上の議論から，財の数が2個であるとすると，T 上では1個の財の市場のみを考えればよいことになる．そこで，第1財の超過需要関数 $z^1(p_1,1)$ を考える．図-2 のように，性質(4)から，$p_1=0$ では，$z^1>0$ であり，十分大きな p_1 に対しては $z<0$ となる．後者は $p_2=0$ で $z^2>0$ となることと(3)から導かれる．よって中間値の定理から，$z^1=0$ の解 p_1^* が存在することになる．

一般の n 財の場合は，ブラウァの不動点定理を用いて証明する．いろいろな証明方法はあるが，その一つは，価格を Δ に正規化して，新た

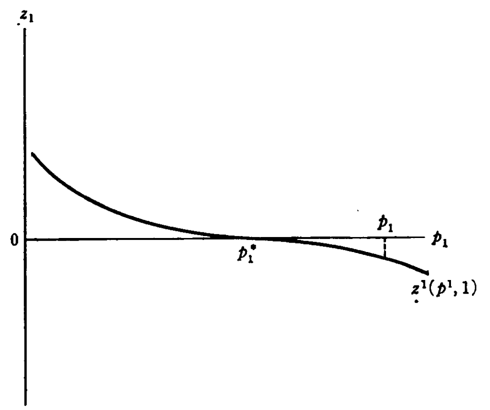

図-2　超過需要関数と均衡点

な関数

$$h^i(p)=\frac{p_i+\max z^i(p)}{1+\sum_{j=1}^{n}\max(z^j(p),0)} \quad i=1,\cdots,n \tag{9}$$

を定義する．すると h は，コンパクトな凸集合 Δ から Δ への連続関数となり，

$$p^*=h(p^*) \tag{10}$$

をみたす不動点 $p^*\in\Delta$ をもつ．そして，この点が均衡価格になっていることを確かめるのである．

関数の定義域：これまでの議論は，単純化された一般均衡理論のモデルであった．より現実的なモデルにするためには，いくつかの点で修正される必要がある．まず，超過需要が Ω の上で定義された連続関数であると仮定してきたが，価格が0であれば，消費者は，無限に財を需要し，超過需要は無限大となる可能性がある．すなわち価格が0のときには，その財の超過需要は定義できないケースもありうる．この問題は，上の性質(4)の中の "$p_i=0$" を "十分小さい正の p_i に対して" 置きかえることによって，解決される．もちろん，存在証明は，若干の修正を要するが．

連続性：超過需要が関数となるという仮定の妥当性を消費者行動の立場から検討してみよう．消費者は，財の消費から満足を得る．その満足度を効用とよび，効用関数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ によって数値化されると仮定する．x_i は第 i 財の消費量である．予算制約式が，$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=I(p)$ で与えられるとする．p_i は財の価格，$I(p)$ は所得である．所得は，労働の価格，企業からの利潤の配当などからなる．消費者は予算制約の下で満足を最大化するように需要量を決定する．すると，問題

$$\max u(x) \text{ s.t. } px\leq I(p)$$

の解が需要となり，需要は価格に依存する．これを $x(p)$ と表すことにする．

この二つのケースについて，予算制約の直線と，効用 $u(x)$ の等高線を表したものが**図-3** である．簡単化のために所得は価格に依存しない定数としている．第2財の価格 p_2 のみを低下させてゆくと，予算制約線は l_1, l_2, l_3 と外側にシフトしてゆく．財の量が多いほど，効用の値は大きいと仮定すると，効用は等高線 u^1, u^2, u^3 に対応して

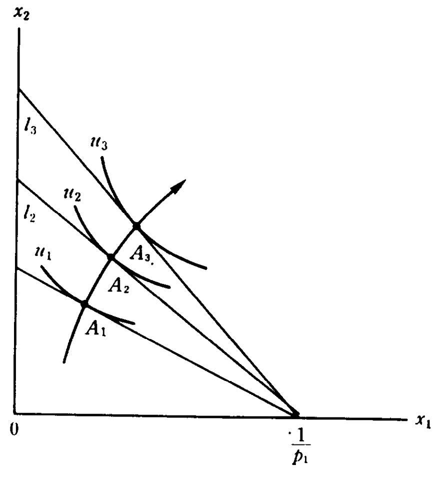

図-3 予算制約と無差別曲線

高まってゆく．等高線の形が原点に対して強く凸となっていることに注意してほしい．このようなケースの効用最大化点は，予算制約線と等高線の接点として求まり，予算制約線が l_1 から l_2, l_2 から l_3 に変わるにつれ，A_1 から A_2, A_2 から A_3 へと変化している．効用最大化点が需要 $x(p)$ と対応するので，需要は連続な関数となっている．

図-3 において，等高線が原点に対して強く凸となる性質は，効用が強い意味の準凹関数であるという仮定から導かれる．$f(x)$ が強い意味の準凹関数とは任意の $x\neq x'$ に対して $f(\theta x+(1-\theta)x')>\min\{f(x),f(x')\}, 0<\theta<1$ を満たす関数のことである．

強い意味の準凹関数の定義式の不等号を広義の不等号≧に変えるなら，準凹関数の定義式が得られる．効用関数が準凹関数であると仮定するだけなら，**図-4** のように等高線が線分からなる可能性がでてくる．図では，集合 $x(p)$ の上の点のすべてが効用最大化点となる価格 p に対して，集合を対応させる関係を対応とよぶ．図-4 における $x: p\rightarrow x(p)$ は需要対応とよばれる．しかも $x(p)$ は凸集合となる．

角谷の不動点定理：需要が対応となることによって，超過需要も対応となるので，連続関数に関するブラウァの不動点定理を使うことはできない．そこで，まず，均衡価格の定義を $0\in z(p^*)$ となる価格 p^* と改め，均衡の存在には，次の角谷の不動点定理を用いて証明する．

「R^p のコンパクトな部分集合 A に対して，F

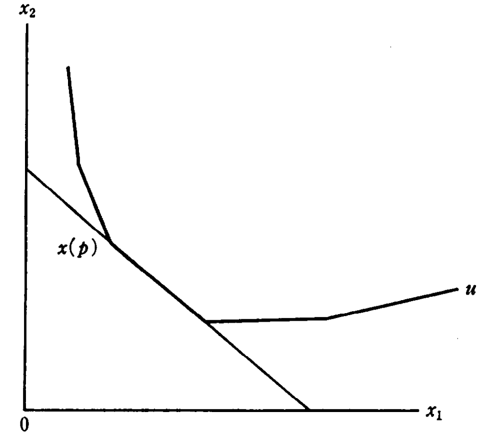

図-4 準凹効用関数と需要対応

を A の点 x に, A の非空・閉・凸な部分集合を対応させる上半連続な写像とするなら, 不動点 $x^* \in F(x^*)$ が存在する.」

ここでの F が上半連続な写像とは,

「$x^n \in A, y^n \in F(x^n)$ となる点列 $\{x^n\}, \{y^n\}$ が極限値 $x^* \in A$, $y^* \in A$ をもつなら, 必ず $y^* \in F(x^*)$ をみたす.」

写像 F である. $A=[0,1]$ とした図-5 からこれを確かめてほしい. 図-5 では $F(x)$ のグラフが描かれている. 45°線とグラフが交わる点で $x^* \in F(x^*)$ となっている.

均衡の一意性：たとえ超過需要が関数となり, (10)式で求められた均衡価格が存在したとしても, それが一意的である保証はない. 均衡の一意

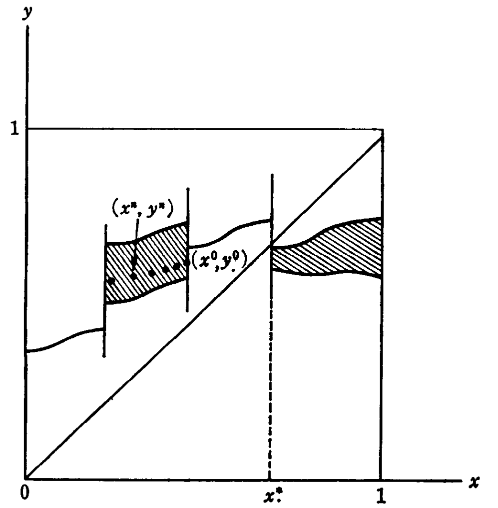

図-5 上半連続写像

性は微分位相幾何学でのホップ＝ミルナの定理を適用して証明させる. その議論自身も興味深いものであるが紙数の関係上, むしろ, 経済動学の議論の残りのスペースを費やすほうが賢明であろう.

3. 非線形経済動学

経済学において, 社会的厚生を最大化する動学的経路がどのような性質をもつかを研究する分野は最適成長理論とよばれている. 他方, 景気循環を実証的研究することも行われてきたが, 景気循環が必ずしも経済成長の特殊ケースとして扱われてはいなかった. 太陽黒点説などはその例である. 最近の最適成長理論のテーマは, 景気循環を生む経済の内生的メカニズムを説明することである. そのために, ホップ分岐やカオスの理論が有効な方法として応用されている. 不動点定理そのものは, 解の存在証明に用いられてはいるが, 一般均衡理論と同様な議論を繰り返すことは避けたい. そこで, 最も簡単な経済モデルを用いて, 不動点の一般化としてみなすことのできる周期解の分岐, 存在を中心に議論することにしよう.

生産関数：いま, 生産関数が1次同次関数

$$Y=F(K, L) \tag{11}$$

で表されるとする. K は投資財, L は労働量である. 生産物 Y は消費 C と投資 I に費やされる. 減価償却率を δ とすると, t 期における資本ストックの減耗分は δKt である. よって, t 期における純投資額は

$$I_t=K_{t+1}-(1-\delta)K_t$$

である. K_{t+1} は $t+1$ 期のはじめにおける資本ストックの量である. かくて, 生産物の需給均等式は

$$Y_t=C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t \tag{12}$$

で表される. (11)式と(12)式から

$$C_t=F(K_t, L_t)+(1-\delta)K_t-K_{t+1} \tag{13}$$

となる. 生産関数の1次同次性から(13)式を L_t で割って, 一人あたりの変数に直すと,

$$c_t=F(k_t, 1)+(1-\delta)k_t-n_t k_{t+1} \tag{14}$$

となる. ここで,

$$c_t=\frac{C_t}{L_t},\ k_t=\frac{K_t}{L_t},\ n_t=\frac{L_{t+1}}{L_t}$$

とおいている. n_t-1 は労働者人口の成長率である. さらに

$$f(k_t)=F(k_t,1)+(1-\delta)k_t$$

とおくと(14)式は

$$c_t=f(k_t)-n_t k_{t+1} \tag{15}$$

となる．よって，以下では，$f(k_t)$ を生産関数のようにみなして議論を進めてもかまわないであろう．当面の間，$f(k_t)$ は単調増加な凹関数であると仮定する．しかも $f(\bar{k})=\bar{k}$ となる $\bar{k}>0$ が存在し，

$$f(k)>k \text{ for } 0<k<\bar{k},\ f(k)<k \text{ for } \bar{k}<k \tag{16}$$

が成り立つとする．

効用関数：個人は，各期に消費財を消費することから効用 $u(c_t)$ を得る．ここでは c_t は一人あたりの消費量である．すべての個人が同じ効用関数をもつと仮定すると，t 期におけるすべての個人の効用の和は $L_t u(c_t)$ である．しかも，人口成長率 n_t-1 が常に一定値 $n-1$ をとると仮定すると，

$$L_t=nL_{t-1}=n^t L_0$$

である．これを用いると，t 期の効用の総和すなわち社会的効用は

$$n^t L_0 u(c_t)$$

となる．今期を 0 期とよび，無限の将来期間にわたる社会的効用の和を

$$\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t n^t L_0 u(c_t)=L_0\sum_{t=1}^{\infty}(\rho n)^t u(c_t) \tag{17}$$

と定義する．ρ^t は将来効用に対するウェイトで，$0<\rho<n^{-1}$ である．このウェイト ρ の意味をみるために，$n=1$ のケースについて 2 期にわたる効用の和

$$V(c_0,c_1)=u(c_0)+\rho u(c_1) \tag{18}$$

を考える．効用の和 V の値を一定とする (c_0,c_1) の組合せは c_0-c_1 平面上での無差別曲線を描く．この限界代替率をとると

$$-\frac{dc_1}{dc_0}=\frac{u(c_0)}{\rho u(c_1)} \tag{19}$$

である．ここで限界代替率(19)を $c_0=c_1$ で評価すると

$$\left.\frac{dc_1}{dc_0}\right|_{c_1=c_0}=\rho^{-1}$$

と一定の値をとる．よって，無差別曲線の傾きは 45° 線上で一定となる．限界代替率は今期の消費財 1 単位に対する主観的評価を将来財の c_1 の量で測った値である．その値 ρ^{-1} は 1 より大きい．すなわち将来財は割引されて評価されている．ρ^{-1} は割引因子，$\rho^{-1}-1$ は割引率あるいは時間選好率とよばれている．ここで $\beta=\rho^{-1}-1$ とおくと

$$V(c_0,c_1)=u(c_0)+\frac{1}{1+\beta}u(c_1) \tag{20}$$

の関係がある．したがって，(18)式は消費 c_0, c_1 からの効用の割引現在価値であるといえる．また(18)式を

$$V(c_0,c_1)=u(c_0)+\rho n u(c_1)$$

と修正するなら，$u(c_0)$ は今期の消費 c_0 がもたらす一人あたりの効用，$u(c_1)$ は来期の消費 c_1 がもたらす一人あたりの効用である．来期には人口が n 倍されるので，$u(c_1)$ を n 倍している．以上の準備の下で(17)式に戻ると，(17)式は，人口が毎期々に n 倍に増加してゆくときの，無限の将来にわたる効用の割引現在価値を表すことが分かるであろう．

最適成長問題：経済計画当局が無限期間にわたる社会的効用の経済価値を最大化する問題を考えてみる．目的関数は(17)式で，生産側の制約条件は(15)式で与えられる．人口成長率 n_t-1 は本質的でないので，ここで $n=1$ と仮定する．すると，

$$\max\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\quad \text{s.t. } c_t=f(k_{t+1})-k_t \text{ for } t\geq 0,\ k>0 \text{ 所与} \tag{I}$$

という問題を解くことになる．

われわれは(I)の解（これを最適解と呼ぶ）としての $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$ がどのような数列であるかに関心がある．下で述べるように最も単純なケース(I)の解は，時間 t とともに単調な数列となる．この結果は，解が存在するかぎりは，効用関数や生産関数の形状から独立に得られるものである．

われわれの目的は振動解，周期解あるいはカオスが生ずる可能性をできるだけ簡単なしかも経済的に意味のあるモデルで議論することにある．(I)の最適解は常に単調な数列となる．そこで次の可能性として，生産関数が

$$c_t=T(k_{t+1},k_t) \tag{21}$$

となるケースを考える．このような生産関数は経済が少なくとも二つの産業からなるときに，それらを集計して得られるものである．たとえば，第 1 産業で消費財を第 2 産業で資本財を生産し，そ

の生産過程が

$$C_t=f^1(K_1,L_1)$$
$$K_{t+1}=f^2(K_2,L_2) \tag{22}$$

で表されるとする．現在の資本ストック量を K_t，総労働量を L_t として

$$\max f^1(K_1,L_1)$$
$$\text{s.t. } f^2(K_2,L_2)=K_{t+1}$$
$$K_1+K_2=K_t$$
$$L_1+L_2=L_t \tag{II}$$

を解く．この問題の最大値 C_t は K_{t+1},K_t,L_t の関数

$$C_t=G(K_t,K_{t+1},L_t) \tag{23}$$

として表される．L_t は常に一定値 L であり，生産関数 f^1,f^2 が1次同次であると仮定する．このとき(23)式の両辺を L で割って(21)式が得られる．(21)式を効用関数に代入すると

$$V(T(k_{t+1},k_t))$$

となる．この関数を改めて $v(k_{t+1},k_t)$ とおく．結局，われわれはより一般には

$$\max\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t v(k_t,k_{t+1})$$
$$(k_{t+1},k_t)\in D$$
$$k_0>0 \text{ 所与} \tag{III}$$

という問題を解くことになる．ここで D は $R^2_+=\{x\in R^2|x_1\geq 0, x_2\geq 0\}$ のコンパクトかつ凸な部分集合である．(III)の最適解の性質を調べるが，その際に用いられる条件は，T と u，あるいは f_1,f_2 と u に関する条件に還元することができる．

単調解と振動解：v に関しては以下の仮定をする．ただし，u_i,u_{ij} は偏微分，交差偏微分を表す．

(A 1)　v は凹関数であり，D において連続，D の内部において C^2-級であり，$v_1>0$. $v_2<0, v_{11}>0$. $v_{22}<0$ が成り立つ．

このとき，Benhabib と西村による次の定理が成り立つ[4]．ただし D の内部を $\mathring{D}$ と表す．

定理1：(A 1) が成り立つとして，$\{k_t\}$ を(III)の最適解とする．もし，$(k_t,k_{t+1})\in\mathring{D}$ ならば，次の結果が成り立つ．

(i)　$\mathring{D}$ 上の全ての点 (x,y) において $v_{12}(x,y)>0$ であれば $k_t<k_{t+1}$ のときは必ず $k_{t+1}\leq k_{t+2}$ となる．さらに $(k_{t+1},k_{t+2})\in\mathring{D}$ であれば，$k_{t+1}<k_{t+2}$ が保証される．

(ii)　$\mathring{D}$ 上の全ての点 (x,y) において $v_{12}(x,y)<0$ であれば $k_t<k_{t+1}$ のときは必ず $k_{t+1}\geq k_{t+2}$ となる．さらに $(k_{t+1},k_{t+2})\in\mathring{D}$ であれば，$k_{t+1}>k_{t+2}$ が保証される．

周期解の存在：次に，周期解の存在を議論する．D の内部上の解について，オイラ方程式

$$v_2(k_{t-1},k_t)+\rho v_1(k_t,k_{t+1})=0 \tag{24}$$

が成り立つ．(24)式の解として

$$v_2(k(\rho),k(\rho))+\rho v_1(k(\rho),k(\rho))=0 \tag{25}$$

をみたす $k(\rho)$ を定常解とよぶ．

(A 2)　任意の $\rho\in[\hat{\rho},1]$ に対して，定常解 $k(\rho)$ が存在し，$(k(\rho),k(\rho))\in\mathring{D}$ である（ただし，$\hat{\rho}<1$）．

(A 3)　任意の $(x,y)\in\mathring{D}$ に対して，$v_{12}(x,y)<0$ である．

(A 4)　適当な値 $\underline{\rho},\bar{\rho}$ が存在し，$[\underline{\rho},\bar{\rho}]\subset[\hat{\rho},1]$ であり，かつ次の(i)・(ii)が成り立つ．

(i)　$v_{22}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))+\bar{\rho}v_{11}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))<(1+\bar{\rho})v_{12}(k(\bar{\rho}),k(\bar{\rho}))$

(ii)　$v_{22}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))+\underline{\rho}v_{11}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))>(1+\underline{\rho})v_{12}(k(\underline{\rho}),k(\underline{\rho}))$

以上の仮定の下にある $\rho^*\in[\rho,\bar{\rho}]$ に対して(III)の最適解が周期2の解をもつことが証明されている[4]．

定理2：(A 1)―(A 4)が成り立つとする．このとき，ある $\rho^*\in[\rho,\bar{\rho}]$ が存在して，(III)は周期2の解をもつ．

これまでの仮定のうち説明を要するのは (A 4)であろう．(A 4)(i)は u が凹関数でかつ $v_{11}\fallingdotseq v_{12}$ であれば十分に1に近い ρ に対してみたされる．また v が狭義の凹関数であれば，やはり，十分に1に近い ρ に対してみたされる．またそのとき，定常解は鞍点になる．すなわち，初期値 k_0 が定常解に十分近いとき，最適解は定常解に収束する．これを定常解の局所安定性とよぶ．また (A 4)(ii)は ρ を $\underline{\rho}$ まで減少させると定常解が局所不安定となることを保証する．

具体例：以下の例は Sutherland によるものである[15]．

$$u=9k_t^2-11k_{t+1}k_t-4k_{t+1}^2+43k_{t+1} \tag{26}$$

この例に対しては(A 1)―(A 4) がみたされ $\rho^*=1/3$ のとき周期解となる．Samuelson による例を若干修正した．

$$u=k_t^{\alpha}(1-k_{t+1})^{\beta} \tag{27}$$

も $\alpha+\beta<1, 1/2<\alpha<k, \alpha<\beta<1/2$ に対して同様の性質をもつ[4),6)]．

カオス：問題(III)の最適解を $\{k_t\}$ とすると，連

続関数 h が存在し，

$$k_1=h(k_0),\ k_2=h^2(k_0),\ \cdots,\ k_t=h^t(k_0)$$

が成立する．この関数 h を用いるなら，定理1は，$v_{12}<0$ なる領域では h が減少関数，$v_{12}>0$ なる領域では h が増加関数となることを意味する．これを利用するなら，**図-6** のように $v_{12}(k, h(k))$ の符号が，ある点 $\hat{k}$ の左右で切り替わるなら，h は $(\hat{k}, h(\hat{k}))$ を頂点とするテント・マップとなる．このケースについて Deneckere and Pelikan は最適解が Li and Yorke の意味でカオスを成す例をあげている．すなわち $D=[0, 1.7]\times[0, 1.7]$ の上で定義された関数

$$u=xy-x^2y-\frac{1}{3}y+0.075y^2+\frac{100}{3x}-7x^2+4x^3-2x^2 \qquad (28)$$

に対しては $\rho=0.01$ のときに周期3の周期解が存在することを証明した．特定の解が周期3の周期となることは，オイラ方程式を用いて簡単に確かめることができる[7]．

また，Boldrin and Montrucchio は R_+ のコンパクトで凸な部分集合 K に対して，$D=K\times K$ とし，任意の C^2 関数 $\theta:K\to K$ に対し，

$$v(k, \theta(k))=\max\{v(k, k_1)\,|\,k^1\in K\}$$

をみたす凹関数 v が存在するという定理を用いて，ρ が十分小さいときに問題(III)の最適解がカオスをなすケースがあることを証明した[8]．

一方，西村と矢野は，v_{12} の符号が変わらなくとも，境界条件を利用すれば容易にテント・マップが生じることを指摘し，カオスの新しい例をあげた[9),10)]．したがって，カオスは必ずしも特殊な状況ではないことになる．

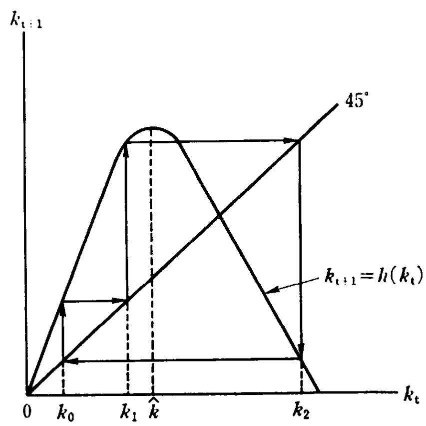

図-6 テント・マップ関数とカオスの発生

以上は離散時間形の最適経済成長モデルであった．連続時間形のモデルは，一般には，$\rho>0$ に対して

$$\max\int_0^\infty e^{-\rho t}u(\dot{k}(t), k(t))dt.$$

$$\text{s.t. } k(0)=k_0 \quad 所与$$

$$(k(t), \dot{k}(t))\in D \qquad (\mathrm{IV})$$

と問題を定式化できる．ただし，D は $R_+^n\times R^n$ のコンパクトで凸な部分集合，u は D 上で定義された関数である．$n=1$ のケースには(IV)の最適解は単調な変動しかしないので，周期性をもつためには $n\geq2$ とする必要がある．Benhabib and Nishimura は $n=2$ のケースについて，このモデルの背後にある生産関数と効用関数を明示して，定常解が一意的なモデルにおいて，リミットサイクルの存在を証明した．その方法は，一意的な定常解が安定から不安定に変わること，そして，そのヤコビアンが常に複素根をもつことから，ホップの分岐定理を用いて証明するというものである[11)]．

参 考 文 献

1) Von Newmann, J.: *A Model of General Equilibrium, Review of Economic Studies*, Vol. 13, pp. 1-9.
2) Kakutani, S.: *A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem, Duke Mathematical Journal*, Vol. 8, 451-450, pp. 451-459 (1941).
3) 二階堂副包：現代経済学の数学的方法，岩波書店 (1960).
4) Benhabib, J. and Nishimura, K.: *Competitive Equilibrium Cycles, Journal of Economic Theory*, Vol. 35, pp. 284-306 (1985).
5) Surtherland, W. A.: *Optimal Development in Multisectroal Economy: The Discounted Case, Review of Economic Studies*, Vol. 46, pp. 585-589 (1979).
6) Samuelson, P. A.: *Optimality of Profit, Including Prices under Idial Planning, Proceedings National Academy of Science*, Vol. 70, pp. 585-589 (1973).
7) Deneckere, R. and Pelikan, S.: *Competitive Chaos, Journal of Economic Theory*, Vol. 40, pp. 13-25 (1986).
8) Li, T. and Yorke, J.: *Period Three Implies Chaos, American Mathematical Monthly*, Vol. 82, pp. 98 (1975).
9) Nishimura, K. and Yano, M.: *Non-linear Dynamics and Chaos in Optimal Growth: An Example, KIER Discussion Paper* (Mar. 1991).

10) Nishimura, K. and Yano, M.: *Non-linear Dynamics and Chaos in Optimal Growth: Characterizations*, KIER Discussion Paper (Mar. 1991).

11) Benhabib, J. and Nishimura, K.: *The Hopf Bifurcation and Stability of Closed Orbits in Multisectro Models of Optimal Economic Growth*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 21 (1979).

(平成3年7月10日受付)

西村　和雄

昭和21年生．昭和45年東京大学農学部農業経済学科卒業．昭和47年同大学大学院修士課程修了．昭和51年ロチェスター大学経済学部大学院博士課程修了，同年ダルハウジー大学経済学部助教授．その後東京都立大学助教授，ニューヨーク州立大学，南カリフォルニア大学準教授を経て，昭和62年より京都大学経済研究所教授，数理経済学専攻．特に，力学系を応用した経済動学理論を研究．最近は，経済成長とカオスが中心である．昭和52年にロチェスター大学より Ph. D.．著書「ミクロ経済学」(東洋経済新報社)，「ミクロ経済学入門」(岩波書店)，その他，理論・計量経済学会，Econometric Society 各会員．