解　説

2. 諸科学に見られる不動点論の散策

2.1 基　礎　論　と　不　動　点†

廣　瀬　　健††

1. はじめに—基礎論における不動点

写像 φ に対し，$\varphi(a)=a$ を満たす φ の不動点 a は，φ の性質，φ の定義域の性質の，いくらか不可思議な情況をつたえてくれる魅力ある思考対象である．

数学基礎論の誕生を集合論の逆理についての思考とするなら，集合論の神話時代—1874 年に Cantor が濃度の概念を導入し，超越数が代数的数より多いこと（代数的数の全体は可算個で，実数の全体は非可算であること）を証明したとき，実数の非可算性を示すために考案した対角線論法は，不動点の感覚が生みだしたものであり，基礎論と不動点の出合いは，そのときすでに設定されていたといえよう．

対角線論法は，そこにリストされた範疇からはみだした対象をつくりあげる．

集合論におけるいろいろな逆理もまた，ある種の不動点—命題 A の内容が，A の否定を表現することなど—についての考察から生まれたのであった．

基礎論における諸結果のなかで，1931 年に Gödel が証明した“不完全性定理”は，最もよく知られた定理の一つであろう．この定理は逆理の内容を見きわめ，対角線論法を用いて得られるものである．そこで，基礎論における不動点のありようを，まずこの定理にみよう．

不完全性定理の一つの表現は，次のような主張である：

定理 I　自然数論で，決定不可能命題が構成できる．

決定不可能命題 $\mathfrak{A}$ とは，

（i）　$\mathfrak{A}$ も証明不可能で，かつ

（ii）　$\neg\mathfrak{A}$ も証明不可能である

ような命題のことをいう．

この命題の構成は大雑把には次のようになされる：

（I）　Prov(⌜X⌝) なる自然数上の述語を定義する．

この述語は，「X は証明可能である」ことを意味する．⌜X⌝ は X のゲーデル数である（形式的自然数論での対象は可算個であるから，自然数と 1 対 1 に対応させることができる．対象 X に対応している自然数が X のゲーデル数 ⌜X⌝ で，X から ⌜X⌝ が計算でき，⌜X⌝ からは X が構成できる．したがって，この意味では，X のゲーデル数は X とは同一視してよい）．

（II）　述語 Prov(⌜X⌝) について，

（ア）　A が証明可能命題ならば，Prov(⌜A⌝) も証明可能命題である

（イ）　Prov(⌜A⌝) が証明可能命題ならば，A も証明可能命題である

ことを証明する．

（III）　$\mathfrak{A}\equiv\neg\mathrm{Prov}(⌜\mathfrak{A}⌝)$ なる $\mathfrak{A}$ を定義する．

この $\mathfrak{A}$ の構成には対角線論法が用いられる．その内容は，およそ次のようである．

1 変数の論理式を，（たとえば，そのゲーデル数の大きさの順に）全て列挙する：

（＊）　$R_0(x), R_1(x), R_2(x), \cdots, R_n(x), \cdots$

ここで，次のような表

R_i \ x	$R_0(x)$	$R_1(x)$	$R_2(x)$ ……	$R_n(x)$ ……
0	$\boldsymbol{R_0(0)}$	$R_1(0)$	$R_2(0)$ ……	$R_n(0)$ ……
1	$R_0(1)$	$\boldsymbol{R_1(1)}$	$R_2(1)$ ……	$R_n(1)$ ……
2	$R_0(2)$	$R_1(2)$	$\boldsymbol{R_2(2)}$ ……	$R_n(2)$ ……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$R_0(n)$	$R_1(n)$	$R_2(n)$ ……	$\boldsymbol{R_n(n)}$ ……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

† The Concept of Fixed Point in Foundations of Mathematics by Ken HIROSE (Waseda University, School of Science and Engineering).

†† 早稲田大学

の対角線に着目すれば，

$R_x(x)$

なる論理式を考えることができる．

これを用いて，さらに

$\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner R_x(x)\urcorner)$

なる論理式を考える．この論理式も1変数であるからリスト(＊)のどこかにあげられていなければならない．したがって，ある自然数 k が存在して，

$R_k(x)\equiv\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner R_x(x)\urcorner)$

である．よって，x を k とおけば

$R_k(k)\equiv\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner R_k(k)\urcorner)$

となる．

ここで，$\mathfrak{A}$ を $R_k(k)$ とおけば

$\mathfrak{A}\equiv\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner)$

である（よって，$\neg\mathfrak{A}\equiv\mathrm{Prov}(\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner)$ でもある）．

この $\mathfrak{A}$ は上の式から明らかなように，$\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner X\urcorner)$ の不動点なのである．

さて，この $\mathfrak{A}$ が求める決定不可能命題である．そのことを証明しよう．

(i)の証明：$\mathfrak{A}$ が証明可能とする．このときは(II)－(ア)によって，$\mathrm{Prov}(\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner)$ も証明可能である．したがって，(III)により，$\neg\mathfrak{A}$ も証明可能となる．これは，$\mathfrak{A}$ を証明可能としたことと矛盾する．よって，$\mathfrak{A}$ は証明可能ではありえない．すなわち，$\mathfrak{A}$ は証明不可能である．

(ii)の証明：$\neg\mathfrak{A}$ が証明可能とする．このときは(III)によって，$\mathrm{Prov}(\ulcorner\mathfrak{A}\urcorner)$ も証明可能である．したがって，(II)－(イ)により，$\mathfrak{A}$ も証明可能であるが，これは $\neg\mathfrak{A}$ を証明可能としたことと矛盾する．よって，$\neg\mathfrak{A}$ は証明可能ではありえない．すなわち，$\neg\mathfrak{A}$ は証明不可能である．

以上により，決定不可能命題が構成されたことになる．

命題とは，原理的には，真あるいは偽の値をとるもののことである．よい理論体系とは，真なる命題は証明できて，偽なる命題はその否定が証明できる体系であろう．ところで，決定不可能命題 $\mathfrak{A}$ については，$\mathfrak{A}$ もその否定である $\neg\mathfrak{A}$ も証明できないのである．しかも，そのような決定不可能命題は，ほとんどの数学的理論の一部であると考えられる自然数論のなかに存在している，というのが不完全性定理（定理I）である．この詳細については，たとえば参考文献1)，2)などを参照されたい．

さて，基礎論の分野では，このほか，さまざまなところに不動点が見い出されていったが，以下では，帰納的関数の理論に的を絞りたいと思う．その理由は，情報科学と最も密接に関わるものだからである．

帰納的関数論における不動点定理は，不完全性定理に相当する定理のほかには，“帰納定理(recursion theorem)”と呼ばれるいくつかの形式をもった定理に代表される．

Rogers, Jr. は，彼の著書[3)]で，“We now present a simple, general method for producing a variety of pathological structures in recursive function theory. …We give the method in the form of a theorem. The theorem called the recursion theorem or the fixed-point theorem of recursive function theory.” と述べている．ここで，“pathological” とは，“不可思議な”，“意外な” といった語感と思ってよいと思う．

2. 帰納的関数の理論と不動点定理

帰納的関数の理論に次のような不動点定理がある：

定理II 任意の帰納的関数 f に対し

$\{f(n)\}=\{n\}$

となる自然数 n が存在する．ここで，$\{z\}$ はゲーデル数 z の帰納的部分関数である．

この定理は Kleene が 1938 年に示した**帰納定理**（あるいは第2帰納定理）と呼ばれる結果からただちに得られるが，以下，用語も含めて簡単な解説をこころみよう．

帰納的関数とは，自然数上で定義され自然数値をとる関数の一種で，直観的には関数値を計算するアルゴリズムをもつ関数のことである．したがって，(Turing 機械，あるいは，必要に応じてメモリをいくらでも追加できるコンピュータで）計算可能な関数（関数値を計算するプログラムの存在する関数）と考えてよい．

帰納的関数が自然数の全体 $\boldsymbol{N}(=\{0,1,2,\cdots\})$ の部分集合 D で定義されているとき（n 変数の場合なら $\boldsymbol{N}^n$ の部分集合 D で定義されているとき），そのような関数を（$\boldsymbol{N}$ 上の）**帰納的部分関数**と呼ぶ．集合 E は E の部分集合の一つであるから帰納的関数は帰納的部分関数である．

帰納的部分関数 f，g について，

$$f(x_1, \cdots, x_n) \simeq g(x_1, \cdots, x_n)$$

で，両辺ともに定義されていてその値が等しいか，あるいは両辺ともに関数値が定義されていないことを表すものとする．したがって上式は，具体的に与えられた $(x_1, \cdots, x_n)$ に対し真偽がつねに定まる．

さて，高々可算個の記号が与えられ，その記号の有限列として新しい対象が定義され，また，それらの有限列として，さらに新しい対象が導入される，という方法を繰り返すことによって得られる体系では，その体系における対象の全体は可算個である．つまり，このような体系 S における対象の全体 M と自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ とは1対1に対応づけることができる．この対応づけの写像を G としよう．この $G: M \to \boldsymbol{N}$ について

（ⅰ） G が単射 $(x \neq y \Rightarrow G(x) \neq G(y))$ であること，つまり1対1であること以外に，

（ⅱ） 任意の x に対し，$G(x)$ を計算するアルゴリズムが存在し，

（ⅲ） 任意の y に対し，$y=G(x)$ となる x が存在するか否か決定できて，存在するときは，それを求めるアルゴリズムが存在する

とき，このような G を**ゲーデル数への対応づけ**と呼ぶ．x に対する $G(x)$ が前述した ***x* のゲーデル数**である．

体系 S の全ての対象 M を G によってゲーデル数に写像することを，***S* の算術化**という．

体系 S を算術化するということは，S における議論を $\boldsymbol{N}$ での議論に置き換える，ということである．

S における対象 x は，x のゲーデル数 $G(x)$ に写され，S での状況は $\boldsymbol{N}$ での状況に書き換えることができるのである．逆に，$G(x)$ の $\boldsymbol{N}$ における挙動によって，x の S における挙動も知ることができるから，x と $G(x)$，M と $\{G(x) \mid x \in M\}$ は，ある意味で同一視できるのである．ビット列を2進数で表された自然数と考えれば，コンピュータでの実行は，算術化された世界での挙動そのものである．

帰納的関数の理論や Turing 機械の理論は算術化でき，算術化することによって多くの成果が得られる．

帰納的関数の理論では，次の諸定理が基本的である．

定理Ⅲ 任意の帰納的部分関数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ に対して，ある自然数 e が存在して，次の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）が成り立つ：

（ⅰ） φ の定義域は

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \mid \exists y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)\}$$

（ⅱ） 任意の $x_1, \cdots, x_n, y$ について，

$$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \Rightarrow U(y) \simeq \varphi(x_1, \cdots, x_n)$$

（ⅲ） $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$

この定理に現れる述語 $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ は，ある特定の原始帰納的述語（原始帰納的述語とは，原始帰納的関数の計算によって真偽の決定が可能な述語であり，原始帰納的関数とは帰納的関数の一種である．詳しくは参考文献1)，4)などを参照．）で，Kleene の **T-述語**と呼ばれる．直感的には，コンピュータにゲーデル数 z のプログラムとデータ $x_1, \cdots, x_n$ を与えると，ゲーデル数 y の計算過程をへて停止することを意味する述語である．また，U は計算過程のゲーデル数に対し，計算結果の値を対応させる，特定の原始帰納的関数である．

この定理における自然数 e は，**帰納的部分関数 φ のゲーデル数**と呼ばれ，関数 φ を $\{e\}$ と書き表す．たとえば，（ⅱ）によれば，

$$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y) \Rightarrow U(y) \simeq \{e\}(x_1, \cdots, x_n)$$

であり，（ⅲ）によれば，

$$\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$$

である．

さて，定理の（ⅰ）は，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が定義されるのは，計算過程のゲーデル数が存在するときであることを主張するものであり，（ⅱ），（ⅲ）によれば，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ の値は，$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ を満たす y によって，$U(y)$ と表される．$\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ は，$T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$ を満たす最小の y を意味する．

すなわち，任意の帰納的関数 φ は，特定の原始帰納的述語 T_n と特定の原始帰納的関数 U によって，（ⅲ）のかたちに表せる，というのがこの定理の内容である．かくて，この定理は**標準形定理**と呼ばれる．

定理Ⅳ n 変数の帰納的部分関数の全体を R_n とする．このとき，$z, x_1, \cdots, x_n$ を変数とする $(n+1)$ 変数の帰納的部分関数

$$U(\mu y T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y))$$

を用いれば，

$$R_n=\{U(\mu y T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)) \mid z=0, 1, 2, \cdots\}$$

である.

この定理の主張するところは，全ての n 変数の帰納的部分関数は，特定の $(n+1)$ 変数の帰納的部分関数で数えあげることができる，ということである．このことから，この定理は**枚挙定理**と呼ばれる．この定理は，定理III—(iii)から容易に得られる.

定理V 任意の $(n+m)$ 変数の帰納的部分関数 $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ に対し，そのゲーデル数を e とするとき，$x_1, \cdots, x_n$ を変数として

$$\{e\}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \simeq \{S_n{}^m(e, y_1, \cdots, y_m)\}(x_1, \cdots, x_n)$$

を成立させるような $(m+1)$ 変数の原始帰納的関数 $S_n{}^m(z, y_1, \cdots, y_m)$ が存在する.

この定理の意味するところは次のようである：$(n+m)$ 変数の関数 $f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ が帰納的部分関数ならば，定理III（標準形定理）により，この関数のゲーデル数 e が存在する．この関数で，$y_1, \cdots, y_m$ を固定して $x_1, \cdots, x_n$ のみを変数とした場合の関数を考える．この場合，$y_1, \cdots, y_m$ によって定まる別の帰納的部分関数になるから，この関数もあるゲーデル数 e' をもつ．このとき，もとの関数のゲーデル数 e と $y_1, \cdots, y_m$ が与えられれば，e' を求めることができよう．事実，そのような原始帰納的関数が存在する．それが $S_n{}^m(e, y_1, \cdots, y_m)$ であり，$S_n{}^m(e, y_1, \cdots, y_m)=e'$ となる．すなわち,

$$\{e\}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \simeq \{S_n{}^m(e, y_1, \cdots, y_m)\}(x_1, \cdots, x_n)$$

である.

この定理は **$S_n{}^m$-定理**と呼ばれる.

定理VI $f(z, x_1, \cdots, x_n)$ を任意の帰納的部分関数とする．このとき

$$\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq f(e, x_1, \cdots, x_n)$$

なる自然数 e を求めることができる.

証明してみよう．与えられた関数 f と定理Vの原始帰納的関数 $S_n{}^1$ を合成した，$y, x_1, \cdots, x_n$ を変数とする関数 $f(S_n{}^1(y, y), x_1, \cdots, x_n)$ を考える．この関数は帰納的部分関数であるから，定理III（あるいは定理IV）により，そのゲーデル数 w が存在する．すなわち,

$$\{w\}(y, x_1, \cdots, x_n) \simeq f(S_n{}^1(y, y), x_1, \cdots, x_n)$$

この $(n+1)$ 変数の関数 $\{w\}$ に対し $S_n{}^1(w, y)$ を考えると，定理Vと w の定め方から,

$$\{S_n{}^1(w, y)\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq \{w\}(y, x_1, \cdots, x_n) \simeq f(S_n{}^1(y, y), x_1, \cdots, x_n)$$

$y=w$ とすれば,

$$\{S_n{}^1(w, w)\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq f(S_n{}^1(w, w), x_1, \cdots, x_n)$$

であるから,

$$e=S_n{}^1(w, w)$$

とおけば

$$\{e\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq f(e, x_1, \cdots, x_n)$$

が成立する.

これが Kleene の**帰納定理**（あるいは第2帰納定理）である.

この定理は，方程式

$$\{z\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq f(z, x_1, \cdots, x_n)$$

が，z について解ける，ということを主張している．これは，帰納的部分関数 $\{z\}$ を，z を右辺に用いながら上の方程式のかたちに定義できれば，方程式は z について解けて，そのような関数が定まることを意味している．つまり，関数 $\{z\}$ の満たすべき条件を変数 z を含む帰納的部分関数となるように書きあげれば，その条件を満たす関数を見つけることができるのである.

これは，いろいろな帰納的部分関数を定義するさい，きわめて有効に働く.

この定理は順序数の理論など，さまざまな応用をもっている.

不動点定理（定理II）は，本質的には，この帰納定理そのものといってもよい．その事実をみておこう.

与えられた1変数の帰納的関数 f のゲーデル数を e とする．すなわち，$f(x)=\{e\}(x)$．この e を用いて，$(n+1)$ 変数の帰納的部分関数 φ を次のように定義する：

$$\varphi(z, x_1, \cdots, x_n) \simeq \{\{e\}(z)\}(x_1, \cdots, x_n)$$

このとき，帰納定理によって次のような自然数 n を求めることができる：

$$\{n\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq \varphi(n, x_1, \cdots, x_n)$$

よって，φ の定義から

$$\{\{e\}(n)\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq \{n\}(x_1, \cdots, x_n)$$

すなわち,

$$\{f(n)\}(x_1, \cdots, x_n) \simeq \{n\}(x_1, \cdots, x_n)$$

したがって，$\{f(n)\}$ と $\{n\}$ は関数として等しく,

$\{f(n)\}=\{n\}$.

帰納定理はさまざまな構成的問題に対する強力な手段を与える. 上述の不動点定理は, その最もよく用いられる形式で述べたが, これが多変数関数 f の場合にも成立するように手直しすることは容易であり, より一般的な形式に拡張することも困難ではない. たとえば, 定理VIは次のようにも拡張できる:

定理VII $F(\zeta;z,x_1,\cdots,x_n)$ を, ζ は n 変数の帰納的部分関数上を動く変数 (未知関数), $z,x_1,\cdots,x_n$ は自然数上の変数であるような, 帰納的部分汎関数とする.

このとき,

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq F(\varphi;e,x_1,\cdots,x_n)$$

を満たす帰納的部分関数 φ と φ のゲーデル数 e を求めることができる.

これらについての詳細は, たとえば, 参考文献3)の§11や, 5)の§66などを参照されたい.

3. Kleene の第1帰納定理

定理VIや定理VIIが第2帰納定理として知られているのに対し, 第1帰納定理として知られている帰納定理がある. これも典型的な不動点定理の一つで, ある種の汎関数 (関数上の変数をもつ関数) についての不動点を見出すものである.

定理VIII $F(\zeta;x_1,\cdots,x_n)$ を, ζ は n 変数の部分関数上を動く変数 (未知関数), $x_1,\cdots,x_n$ は自然数上の変数であるような, 帰納的部分汎関数とする.

このとき, 方程式

$$\zeta(x_1,\cdots,x_n)\simeq F(\zeta;x_1,\cdots,x_n)$$

に対し, 次の性質(i), (ii), (iii)を満たすような φ が存在する:

(i) $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\simeq F(\varphi;x_1,\cdots,x_n)$

(ii) φ は帰納的部分関数

(iii) φ は, $\psi(x_1,\cdots,x_n)\simeq F(\psi;x_1,\cdots,x_n)$ を満たす任意の ψ に対し, ψ の拡大になっている.

この第1帰納定理の(i)は, 汎関数方程式の不動点—ζ についての解—が存在することを, (ii)は, その不動点 φ が帰納的部分関数として得られることを, (iii)は, ζ の解 ψ はいずれも φ の拡大になっていること, つまり,

φ の定義域 $\subseteq$ ψ の定義域

であり, a で φ が定義されていれば, $\varphi(a)=\psi(a)$ であることを主張している.

つまり, 関数 ζ の満たすべき条件を, 未知関数 ζ を含む帰納的部分汎関数となるように書きあげれば, その条件を満たす帰納的部分関数が, 唯一つ (他の解の縮小写像として) 存在する, というのである.

たとえば, 自然数上の階乗関数 $x!$ を考えてみよう. この関数を $\zeta(x)$ と表すことにすれば, この関数は

(ア) **if** $x=0$ **then** 1 **else** $\zeta(x-1)\cdot x$

(イ) $[x=0\Rightarrow 1, \zeta(x-1)\cdot x]$

(ウ) $\begin{cases}\zeta(0)=1\\ \zeta(x+1)=\zeta(x)\cdot(x+1)\end{cases}$

などによって, その性質が定められる. (ア), (イ), (ウ)などを

$F(\zeta;x)$

と書けば, F は帰納的部分汎関数である.

φ_0 を, いかなる自然数に対しても定義されない関数とする. 定義されないことを⊥と書けば, すべての x について,

$\varphi_0(x)=\perp$.

以下, $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\cdots$を

$\varphi_1(x)\simeq F(\varphi_0;x)$

$\varphi_2(x)\simeq F(\varphi_1;x)$

$\varphi_3(x)\simeq F(\varphi_2;x)$

$\vdots$

とすれば,

$\varphi_1(0)=1, \varphi_1(1)=\varphi_0(0)\cdot 1=\perp,\cdots$で,

φ_1 の定義域は $\{0\}$.

$\varphi_2(0)=1$, $\varphi_2(1)=\varphi_1(0)\cdot 1=1$, $\varphi_2(2)=\varphi_1(1)\cdot 1=\perp,\cdots$で,

φ_2 の定義域は $\{0,1\}$.

$\varphi_3(0)=1$, $\varphi_3(1)=\varphi_2(0)\cdot 1=1$, $\varphi_3(2)=\varphi_2(1)\cdot 2=2$, $\varphi_3(3)=\varphi_2(2)\cdot 3=\perp,\cdots$で,

φ_3 の定義域は $\{0,1,2\}$.

同様にして,

φ_{n+1} は φ_n の拡大写像 $(n=0,1,2,\cdots)$

になっていて,

φ_n の定義域は $\{0,1,\cdots,n-1\}$

である. そして,

$\varphi_n(x)=x!(x=0,1,2,\cdots,n-1)$

になっている.

さて,

$$\varphi=\lim_{n\to\infty}\varphi_n$$

なる関数 φ を考える．すなわち，

$$\varphi(x)=y \Leftrightarrow \exists n[\varphi_n(x)=y]$$

である．もちろん，ある n に対し $\varphi_n(x)=y$ ならば，$m\geqq n$ なる全ての m に対して $\varphi_m(x)=y$ となる．

このとき，

$$\varphi(x)\simeq F(\varphi;x)$$

が成り立つ．なぜならば

任意の x に対し $\varphi(x)$ が定義されていれば，

$$\varphi(x)\simeq\varphi_{n+1}(x)\quad(\varphi \text{ の定義による})$$
$$\simeq F(\varphi_n;x)\quad(\varphi_{n+1} \text{ の定義による})$$
$$\simeq F(\varphi;x)\quad(\varphi \text{ は } \varphi_n \text{ の拡大})$$

であり，逆に $F(\varphi;x)$ が定義されていれば，それが φ の値を定めるからである．

また，

$\psi(x)\simeq F(\psi;x)$ ならば ψ は φ の拡大であることも，帰納法によって比較的容易に示すことができる（ψ が全ての φ_n の拡大ならば，ψ は φ の拡大である．$\varphi_n(x)$ が定義されているならば，$\psi(x)\simeq\varphi_n(x)$ であることの，n についての帰納法）．

かくて，$F(\zeta;x)$ に対し，第1帰納定理を満たす φ として，階乗関数 $x!$ が得られる．

くわしくは，参考文献5)を参照されたい．以上の議論が，階乗関数などの特殊性によっていないことは，明らかに読みとっていただけると思う．

4. 不動点意味論

ここでは，第1帰納定理と深い関わりをもつ再帰的プログラムの不動点意味論，つまり，再帰的プログラムの意味を最小不動点によって与える方法について大雑把にみてみよう．

任意の集合 D に対し，$f: D^n\to D$ なる部分関数 f を考える．

定義されていないことを表す記号 $\perp(\notin D)$ を導入し，$f(x_1,\cdots,x_n)$ が定義されていないことを $f(x_1,\cdots,x_n)=\perp$ と書く．

$D^+=D\cup\{\perp\}$ とする．$(x_1,\cdots,x_n)\in(D^+)^n$ について，$x_i=\perp$ となる $x_i(i=1,\cdots,n)$ が一つでも存在するときは，$f(x_1,\cdots,x_n)=\perp$ とすれば，f は $f: (D^+)^n\to D^+$ なる（全域で定義された）関数に自然に拡張される．

D^+ 上の順序 $\sqsubseteq$ を，

$$x\sqsubseteq y \Leftrightarrow x=\perp \text{ あるいは } x=y$$

によって定義する．

すなわち，$\perp\sqsubseteq x$，$\perp\sqsubseteq\perp$，$x\sqsubseteq x$ であるが，$x,y\in D$ なる x，$y(x\neq y)$ に対しては $x\sqsubseteq y$ も $y\sqsubseteq x$ も成立しないものとするのである．

$(x_1,\cdots,x_n),(y_1\cdots,y_n)\in(D^+)^n$ に対しては，

$$(x_1,\cdots,x_n)\sqsubseteq(y_1,\cdots,y_n)$$
$$\Leftrightarrow i=1,\cdots,n \text{ の全てに対し，} x_i\sqsubseteq y_i$$

と定義する．

$f: (D^+)^n\to D^+$ なる関数について，$(x_1,\cdots,x_n)\sqsubseteq(y_1,\cdots,y_n)$ ならば $f(x_1,\cdots,x_n)\sqsubseteq f(y_1,\cdots,y_n)$ が成立するとき，f は**単調**である，という．

$D^n\to D$ なる部分関数 f を，$(D^+)^n\to D^+$ なる関数に自然に拡張したとき，$f: (D^+)^n\to D^+$ は単調になる．

$f: (D^+)^n\to D^+$ なる単調な関数の全体を，いま，$[(D^+)^n\to D^+]$ と書くことにしよう．

$f,g\in[(D^+)^n\to D^+]$ に対して，

$$f\sqsubseteq g \Leftrightarrow \text{任意の } (x_1,\cdots,x_n)\in(D^+)^n \text{ について}$$
$$f(x_1,\cdots,x_n)\sqsubseteq g(x_1,\cdots,x_n)$$

と定義すれば，$[(D^+)^n\to D^+]$ は $\sqsubseteq$ についての順序集合になる．

この順序 $\sqsubseteq$ について，たとえば，f，g が $D^n\to D$ なる部分関数で，g が f の拡大写像であることと，f，g を $(D^+)^n\to D^+$ に自然に拡張したとき $f\sqsubseteq g$ であることとは同値である．

単調な関数の列 $\{f_i\}$ が

$$f_0\sqsubseteq f_1\sqsubseteq f_2\sqsubseteq\cdots$$

を満たすとき，$\{f_i\}$ を単調増加列という．

単調増加列 $\{f_i\}$ に対して

（i） 全ての i に対して，$f_i\sqsubseteq f$

（ii） 全ての i について $f_i\sqsubseteq g$ となる任意の単調関数 g に対しては，$f\sqsubseteq g$

となる関数 f を，$\{f_i\}$ の上限と呼び $\cup f_i$ と書く．

たとえば，第1帰納定理（定理Ⅷ）の説明の際に述べた，

$$\varphi_0(x)=\perp,\ \varphi_{n+1}(x)\simeq F(\varphi_n;x)\quad(n=0,1,\cdots)$$

を $[\mathbf{N}^+\to\mathbf{N}^+]$ に自然に拡張した関数 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots$ について，$\{\varphi_i\}$ は単調増加列であり，φ はその上限 $\cup\varphi_i$ というわけである．

$[(D^+)^n\to D^+]$ の中の任意の単調増加列は，$[(D^+)^n\to D^+]$ の中に上限をもつ．

単調性の概念は，$F: [(D^+)^n\to D^+]\to[(D^+)^n\to$

$D^+]$ なる汎関数に拡張できる．すなわち，汎関数 F が単調であるとは，任意の $f, g \in [(D^+)^n \to D^+]$ に対し，

$f \subseteq g$ ならば $F(f) \subseteq F(g)$

であるような汎関数 F のことである．

さて，ここで，単調な汎関数 F の連続性を定義しよう．

汎関数 F が**連続**であるとは，

（i） F が単調であって，かつ

（ii） 任意の単調増加列 $\{f_i\}$ に対し，

$F(\cup f_i) = \cup F(f_i)$

となることである．

さて，この連続汎関数について，次の定理が成立する．

定理IX $F: [(D^+)^n \to D^+] \to [(D^+)^n \to D^+]$ なる連続汎関数 F に対し，次の(i)，(ii)を満たす $\varphi \in [(D^+)^n \to D^+]$ が存在する：

（i） $\varphi = F(\varphi)$

（ii） $\psi = F(\psi)$ なる任意の ψ に対し，$\varphi \subseteq \psi$

もちろんのことながら，(i)は φ が F の不動点であること，(ii)は φ が不動点の中で最小のものであることを意味している．つまり，

連続汎関数は最小不動点をもつ

という定理である．

いろいろな概念の定義をよく見較べれば明らかなように，この定理IXは第1帰納定理そのものといってよいものである．

それは以下に述べる最小不動点の求め方からもうかがわれよう．

F の最小不動点は，具体的には次のようにして得られる．

関数 $\varphi_0: (D^+)^n \to D^+$ を，任意の $(x_1, \cdots, x_n) \in (D^+)^n$ に対して，$\varphi_0(x_1, \cdots, x_n) = \perp$ と定める．

このとき，φ_0 は単調である．

$\varphi_{n+1}: (D^+)^n \to D^+$ を，$\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$ と定義する．

このとき，$\varphi_{n+1} (n = 0, 1, 2, \cdots)$ は単調で，関数列 $\{\varphi_i\} (= \{F^i(\varphi_0)\})$ は単調増加列になる．

したがって，$\{\varphi_i\}$ は $[(D^+)^n \to D^+]$ の中に上限 $\cup \varphi_i (= \cup F^i(\varphi_0))$ をもつ．

今，最小不動点を φ としよう．

$\varphi_0 \subseteq \varphi$ と F の単調性から

$F(\varphi_0) \subseteq F(\varphi) = \varphi$

であり，したがって，全ての i について

$F^i(\varphi_0) \subseteq \varphi$

である．よって上限 $\cup \varphi_i$ についても

（ア） $\cup \varphi_i = \cup F^i(\varphi_0) \subseteq \varphi$

一方，F の単調性から

$\varphi_0 \subseteq F(\varphi_0) \subseteq F^2(\varphi_0) \subseteq \cdots \subseteq F^i(\varphi_0) \subseteq F^{i+1}(\varphi_0) \subseteq \cdots$

で，F の連続性と上限の性質から

$F(\cup F^i(\varphi_0)) = \cup F^{i+1}(\varphi_0) = \cup F^i(\varphi_0).$

よって，

$\cup F^i(\varphi_0) (= \cup \varphi_i)$ は F の不動点

であって，しかも，φ が最小不動点であることから，

（イ） $\varphi \subseteq \cup F^i(\varphi_0) = \cup \varphi_i$

である．(ア)，(イ)から

$\cup \varphi_i = \varphi.$

さて，再帰的プログラムでは，一般に，入力変数 $x_1, \cdots, x_n$，プログラム変数 $y_1, \cdots, y_m$，出力変数 z とするとき，

$z = t_0(\psi_1, \cdots, \psi_l ; x_1, \cdots, x_n)$

where

$F_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$

$= t_1(\psi_1, \cdots, \psi_l ; x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_m)$

....

$F_l(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$

$= t_l(\psi_1, \cdots, \psi_l ; x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$

の形をしている．

ここで，$\psi_1, \cdots, \psi_l$ は関数変数であり，$t_i(\psi_1, \cdots, \psi_l ; x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ は，項 t_i に現れる変数が，$\psi_1, \cdots, \psi_l, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ の中のいくつかであることを表す．

以下では簡単のために，

(＊)

$z = \psi(x_1, \cdots, x_n)$

where

$\psi(x_1, \cdots, x_n) = t(\psi ; x_1, \cdots, x_n)$

で考えよう．

たとえば，前述した階乗関数を例にとれば，

$z = \psi(x)$

where

$\psi(x) = [x = 0 \Rightarrow 1, \psi(x-1) \cdot x]$

などである．

これらのプログラムは，もちろん，一つの計算手続き，関数値の評価規則とみることもできるが，未知関数 ψ についての関数方程式とみることもできる．

プログラム(＊)を関数方程式とみなして，

$$F: [(D^+)^n \to D^+] \to [(D^+)^n \to D^+]$$

なる汎関数Fを

$$F(\zeta)(x_1, \cdots, x_n) = t(\zeta;\ x_1, \cdots, x_n)$$

によって定めれば，Fは連続汎関数になる．

したがって，定理IXにより，Fの最小不動点φが存在する．$\varphi \in [(D^+)^n \to D^+]$であるが，これを$D^n \to D$なる部分関数と考えれば，

任意の$(x_1, \cdots, x_n) \in D^n$に対し

(＊＊)　$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \simeq t(\varphi;\ x_1, \cdots, x_n)$

である．

この部分関数φを，再帰的プログラム(＊)の意味であると考えよう，というのが**不動点意味論**である．

プログラム(＊)を計算手続き，計算規則とみなして(＊)の意味を考える立場は操作的意味論と呼ばれる．

操作的意味論では，計算途中に出現する関数の評価の順序に依存して関数値が変わることがあり，代入のための計算規則を明らかにしておく必要がある．不動点意味論はこのような点において明快であり，さらに高階の関数へも一般化できる．

これらについては，参考文献6)の15章以降や，7)などを参照されたい．

参考文献

1) 廣瀬　健：帰納的関数，共立出版．
2) 前原昭二：数学基礎論入門，朝倉書店．
3) Rogers, Jr., H.: Theory of Recursive Functions and Effective Computability, McGraw-Hill.
4) 廣瀬　健：情報数学，コロナ社．
5) Kleene, S. C.: Introduction to Meta-Mathematics, North-Holland.
6) 山田真市：情報処理の科学，朝倉書店．
7) 中島玲二：数理情報学入門，朝倉書店．

(平成3年12月5日受付)

廣瀬　健（正会員）

昭和10年生．立教大学理学部数学科卒業．理学博士（東京教育大学）．東京教育大学理学部講師などを経て，現在，早稲田大学理工学部教授．専攻は数学基礎論，とくにRecursion Theory，著書：「計算論」（朝倉書店）．「数学的帰納法」（教育出版），「解析学序説」（共立出版），「コンパイラのうちとそと」（共立出版）など．訳書：「基本算法」（サイエンス社，Knuth原著）．日本数学会，科学基礎論学会，電子通信学会各会員．