解 説

1. 不動点論の歴史と展望

1.1 不動点論をめぐって†

堀内和夫†† 大石進一††

1. はじめに

不動点 (fixed point) とは数学の用語である．数学では，集合論の言葉により問題を記述する．二つの集合間の対応のことを写像という．ここでは，同じ集合間の写像を考える．ある集合の要素(これを簡単に点という) がその写像によって同じ点に写されるとき，その点をその写像の不動点という．すなわち，不動点とは写像されても動かなかった点という意味の用語である．写像に不動点が存在することを述べる定理を不動点定理 (fixed point theorem) という．不動点および不動点定理は解析学を中心に数学において重要な役割を果たしてきたし，今後もその重要性は失われることはないであろう．不動点定理に関する著作は多数出版されており，数学的な詳細についてはそれらを参考にされたい (たとえば文献 1) 参照)．また，不動点定理を理解するための基礎に関して詳しく記述してあるのは，非線形関数解析と呼ばれる分野の本である．文献 2)，3) はその代表的なものである．

数学の抽象的な性格により不動点定理の応用は理工学のいろいろな分野に及ぶ．情報処理の分野でも，不動点定理は重要な役割を果たす．たとえば，プログラムの意味論[4] など．一方，不動点定理自身もきわめて多様である．本稿では，まず，思想の異なるいろいろな不動点定理について，その発見の歴史も含め，紹介する．不動点定理の初期の歴史にはポーランド学派が深く係わってくる．この点については，文献 5) に生き生きとした記述がある．本稿の記述の歴史に関する部分についても文献 5) に負うところが多い．また，同時に，非線形解析を中心として，不動点定理の応用について概観する．その中で，不動点定理を利用する非線形解析における計算機援用証明につながる話題も述べる．

2. Brouwer の不動点定理

Brouwer, L. E. J. (1881-1966) は本稿に対して二重に係わってくる数学者である．Brouwer の専門分野の主なものの一つは位相幾何学であり，位相幾何学における彼の成果の一つのピークは連続写像を単体近似することによって得られている．Brouwer の不動点定理は「Dを単体とすると任意の連続写像 $f: D \to D$ は少なくとも一つ不動点をもつ」と述べられる．現代では，この定理を少し拡張した次の形のものを Brouwer の不動点定理と呼ぶことが多い：

定理 2.1 (Brouwer の不動点定理) DをR内の有界凸閉集合とする．任意の連続写像 $f: D \to D$ は少なくとも一つ不動点をもつ． □

この定理が掲載されたのは 1912 年のことであった[6]．Brouwer は，このころ，先に述べた位相幾何学に関する研究を展開しており，この定理がそれに関連していることは明らかであろう．

さて，ここで，二つ歴史的な注意をしておきたい．第一は，Brouwer の不動点定理と等価な定理が 1886 年に Poincaré によって公表されていた[7] ことである．Poincaré は不動点定理の応用として力学，特に，天体力学への応用を考えていた．連続力学系の定義される相空間内で周期軌道を求める問題を考えよう．今，周期解と横断的に交わる滑らかな超平面を考える．この面をSと呼ぶ．Sの一点xから出発する軌跡は，それが周期解の近くにあるならば，再びSに戻ってくると考えられる．戻ってくる点をyとする．このとき，点xから点yへの写像 $P: S \to S$ が $Px=y$ によって

† Topics Related to Fixed Point Theorems by Kazuo HORIUCHI and Shin'ichi OISHI (Waseda Univercity, School of Science and Engineering).
†† 早稲田大学理工学部

定義できる．これを Poincaré 写像という．明らかに，もとの力学系の周期解は，写像Pの自明でない不動点に対応する．

Bohl, P. は 1904 年に Poincaré の結果を再発見している[8]．このことに代表されるように Brouwer の不動点定理には一見まったく異なった同値な定式化が多数発見されてきた（文献 1)，4.2 参照)．Borsuk-Ulam の定理（文献 1)，4.4 参照)，Sperner の補題[9]，Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz の補題[10] などである．

第二は，1914 年から 1918 年に第一次世界大戦がヨーロッパを戦火に包んだことである．そして，1939 年から 1945 年まで再び第二次世界大戦が世界を戦火に覆う．1912 年というのは，この二つの大戦が始まる少し前の辛うじて平和が保たれていた時期のことである．

もう一つ，別の立場からの歴史的注意をしたい．Brouwer はフランス経験主義 (French empiricism) の継承者で，さらにその立場を先鋭化して数学における直感主義 (Intuitionism) を 1907 年ごろより唱えていることである．岩波数学辞典第 2 版数学基礎論の項 (pp. 659-662) によればフランス経験主義とは Kronecker, L. や Poincaré, H. が取った立場で，「数学的な真理や対象が，数学を考える精神とは独立に存在するとはせず，精神活動によって直接にとらえられるものである」とする説である．Borel, É., Lebesgue, H. L., Luzin, N. N. らもこれに似た数学批判をしたとのことであるが，Brouwer はこれを先鋭化し，具体的には排中律の無制限の成立を否定する立場を取った．たとえば，「π の小数点以下に 20 桁続けて 0 が並ぶ箇所がある」という命題は，通常の数学では真か偽のいずれかであるが，実際に 20 桁並ぶ箇所が発見できたら正しい命題であり，また，20 桁並んだら矛盾となることを証明できたら偽であるが，どちらの証明もまだできないときには，真とも偽ともいえないとするのが，彼の立場である．

このような直感主義の立場から定理 2.1 を眺めることによって，本稿の主旋律の一つが始まる．すなわち，Brouwer は定理 2.1 の原型となる定理の証明を，背理法，すなわち，もし不動点が一つも存在しないならば，矛盾が導かれることによって証明した．しかし，これは明らかに彼の直感主義の思想と反する，と思われるのは面白い．すなわち，彼の直感主義の思想によれば，定理 2.1 が真であることをいうには，定理 2.1 の条件を満たす任意のfについてその不動点を少なくとも一つ実際に計算できることを示す必要がある．Brouwer がこの点をどう考えていたのかについては文献 11) が参考になる．歴史的にいえば，このような構成的 (constructive) な証明が行われるようになるには，第二次大戦後，ホモトピー法と呼ばれる非線形方程式の解の大域的数値解法の研究によって，Brouwer の不動点定理の構成的証明（不動点を数値計算するアルゴリズムが実際に作れることを示すことによる証明）の研究とその拡張の研究が盛んに行われるようになるまでまたなくてはならない．ホモトピー法は，1965 年に公表された非線形抵抗回路解析における Katzenelson 法[12]を出発点とする電気工学者による研究の流れと，1967 年の Scarf の研究[13]に端を発する数理計画の分野の研究の流れなどがある．非線形回路理論の基礎は非線形抵抗回路の動作点を求める問題である．この問題は多くの場合，回路素子においてエネルギが消費されるという受動性のため，$f(D)\subset D$ を導く事前評価が成立し，Brouwer の不動点定理によって動作点の存在が保証される．その詳細については，文献 14) を参照されたい．また，数理計画分野への応用については本特集号で詳細に説明されるが，文献 15)，16) がよい参考書である．最近の成果については文献 17) が詳しい．このように Brouwer の不動点定理には異なった多くの証明法があるのも面白い．

1912 年，Brouwer はその不動点定理の導入とともに，写像度の理論も展開した．Xをn次元ユークリッド空間，fをXからその上への連続写像とする．I を恒等作用素，DをXの領域とするとき I-f のD上での写像度をfのD内のすべての不動点（今，一般性を失うことなく，有限個で非退化，孤立しているものとする），における I-f の Jacobi 行列式の符号の和とする．このとき，$\partial D\times[0,1]$で

$$h(x,t)=(1-t)(x-g(x))+t(x-f(x))\neq 0 \tag{1}$$

とすると I-g と I-f の D 上での写像度は一致することが知られている．これをホモトピー不変性という．したがって，たとえば，$0\in D$ とすると，$g=0$ と置けば，I-g の写像度は 1 となる．このと

き，もし，(1)式の成立がいえれば，I-f の写像度が I-g と等しく，1となることが分かる．写像度の定義から，I-f の写像度が零でないということは，少なくとも一つ f が不動点をもつことを意味する (Kronecker の定理)．このように，所望の写像が零でない写像度をもつことをホモトピー不変性を用いるなどして示す方法が写像度を用いた解析であり，非線形解析におけるきわめて有力な方法となる．たとえば，ある領域における I-f の写像度を計算し，それが非零となることが示せれば，f の不動点の存在証明となる．そこで，写像度の計算法が注目され，多くの結果が出されている．写像度の単体近似による計算法の基礎は 1975 年 Stenger, F. によって与えられた[18]．この方法では写像度を計算する有界領域の単体分割が十分細かければという仮定の元に，有限回の手間で写像度が計算できることが示されている．しかし，十分単体分割が細かいというのは，計算機では判定できない．この困難を解決し，写像度の有効な計算手法を与えたのは Stynes, M.[19]である．これらの研究をきっかけとして，Kearfott, B.[20]らは写像度計算アルゴリズムの研究を発展させている．

なお，Brouwer の写像度の一意性は 1951 年 Nagumo, M.[21]によって示された．

3. Banach の不動点定理

Banach, S. (1892-1945) は 1892 年ポーランドのクラコフに生まれた．貧しい生まれで，Banach という姓は養家の姓である．数学はほとんど独学であったらしい．1920 年にルブフ工科大学の数学助手になり，1927 年には正教授になっている．1920 年に「抽象数学における作用素とその積分方程式への応用」で学位を申請し，1922 年学位を獲得するとともに，論文が公表された[22]．Banach 空間の概念はこの論文の前半に定義されている．Wiener, N. によっても，ほんの数カ月後に独立に同じ公理系が取り扱われている[5]．Banach の縮小写像の原理 (普通 Banach の不動点定理とはあまりいわなくて，この名称が用いられているが，本稿ではどちらも用いることにする) はこの論文の後半で証明されている．

定理 3.1 (Banach の縮小写像の原理) X を Banach 空間とし，$f: X \to X$ が任意の $x, y \in X$ に対し，縮小性の条件

$$\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|, \quad 0<k<1 \qquad (2)$$

をみたすとき，点列 $x_{n+1}=f(x_n)$ は f の唯一の不動点 x^* に収束する． □

というのがその内容である．この不動点定理は不動点定理の中で最も基本的である．証明は $x_{n+1}=f(x_n)$ によって定義される点列が Cauchy 列となることを示すことによって行われる．また，不動点の局所的な唯一性まで主張できることが特徴である．

写像 f の離散化誤差や数値計算における丸めの誤差の影響を考慮するために定理 3.1 を拡張する問題は 1956 年に Urabe, M.[23]が，また，1964 年に Ostrovski, A. (文献 1), p. 101 参照) が考えている．このような拡張された定理を用いれば，この定理の証明は，アルゴリズム化でき，不動点を計算するための数値計算への応用が可能となる．したがって，関数方程式などの解の存在の問題を不動点問題に変換し，Banach の不動点定理の証明をアルゴリズム化した数値計算技法を用いれば，関数方程式の解の存在の計算機援用証明ができることが考えられる．

ここで，不動点定理による非線形解析の例として，非線形方程式を不動点問題に変換して解く方法を概観しよう．X を Banach 空間，$g: X \to X$ を連続写像として，非線形方程式

$$g(x)=0 \qquad (3)$$

を考える (**図-1** 参照)．$x-g(x)$ が縮小写像であれば，そのまま，Banach の不動点定理を適用すればよいが，一般には，それは期待できない．そこで，

$$f(x)=x-k(x)g(x) \qquad (4)$$

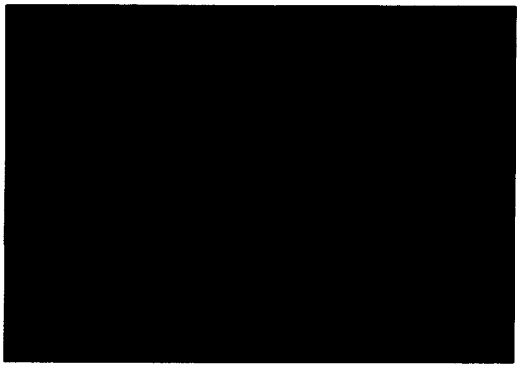
と置く．ある $x^* \in X$ の近傍 U において，$k(x)$ が存在して，$k: U \to X$ となり，

$$f(x^*)=x^* \qquad (5)$$

が成立し，$k^{-1}(x^*)$ が存在すれば，x^* は(3)式の解となる．すなわち，(3)式と(5)式は局所的には等価である．そこで，$k(x)$ を適当に選ぶことにより，f が縮小作用素となるようにいろいろな非線形解析の手法が考案されてきた．たとえば，$k(x)=[g'(x)]^{-1}$ または $k(x)=G^{-1}$，G は連続線形作用素，のときには，(5)式の解を求めるための逐次反復式は

$$x_{n+1}=x_n-[g'(x)]^{-1}g(x_n) \qquad (6)$$

または，

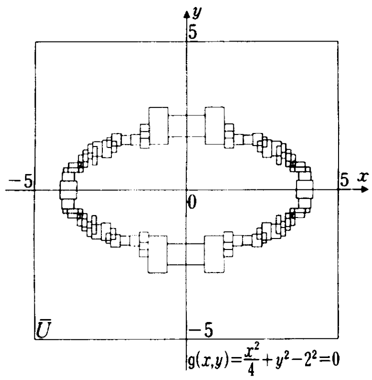


$$g_1(x,y,z)=\frac{(x-20)^2}{30^2}+\frac{(y-150)^2}{200^2}+\frac{(z-5)^2}{40^2}-1=0\ (青)$$

$$g_2(x,y,z)=\frac{(x+10)^2}{50^2}+\frac{(y+130)^2}{180^2}+\frac{(z+20)}{30^2}-1=0\ (赤)$$

$g_3(x,y,z)=y=0$ (緑)
の解の表示.

図-1 連立非線形方程式



(矩形領域の和集合の中に $g(x,y)=0$ の解集合が包み込まれる．矩形領域の中では陰関数定理が成立する)

図-2 $g(x,y)=0$ の解の包み込み I

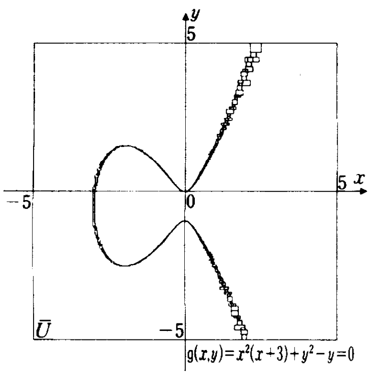
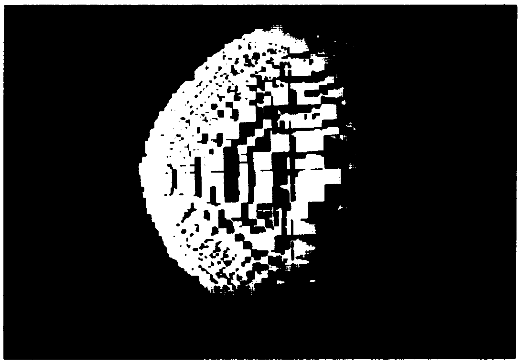
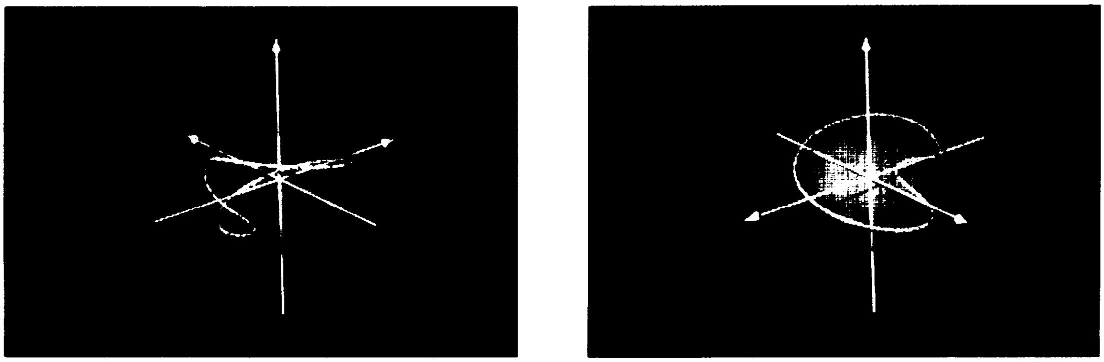


図-3 $g(x,y)=0$ の解の包み込み II
(図-2 と同様)



(図-2, 3 と同様のことを 3 次元空間内で行った例．直方体の中で陰関数定理が成立する)

図-4 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2^2=0$ の解の包み込み



(a)　　　　(b)

(a) 非線形連立方程式 $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3^2=0$, $g_2(x,y,z)=x^2+xy+z=0$ の解の包み込み (小さな直方体の和集合の中に上記方程式の解集合が包み込まれている．各直方体の中で陰関数定理が成立)

(b) (a)を裏から見た図

図-5

(図-2〜図-5 に関する内容の詳細は，山本，柏木，大石："パラメータ依存非線形方程式の全解探索アルゴリズム—構成的陰関数定理の応用—"，電子情報通信学会技術研究報告，CAS 91-141, NLP 91-84 (1992) を参照されたい．不動点定理の計算論的理論が有効に用いられている)．

$$x_{n+1}=x_n-G^{-1}g(x_n) \qquad (7)$$

となる．(6)，(7)式で定義される反復式による(3)式の解法は，それぞれ，Newton 法または準 Newton 法と呼ばれる．(6)式または(7)式の右辺が縮小写像となるための条件を考えることにより，Newton 法あるいは準 Newton 法の収束定理を作ることが考えられる．Kantorovich の定理[24]が前者に，Urabe の定理[25]が後者に当たる．ただし，この両定理ともその原証明に縮小写像の原理を直接には用いていないのは面白い．

適当な条件のもとで，数値計算の丸め誤差まで厳密に考慮した上で，Kantorovich の定理や Urabe の定理の成立を数値的に検証することにより，非線形方程式の解の存在を任意に与えられた精度の範囲内で証明することが，現実的な計算量でできるのが分かりつつある．これは精度保証付き数値計算の理論として最近注目されつつある分野の話題である．**図-2** から**図-5** 口絵にこのような精度保証付き数値計算の手法により非線形方程式の解集合を包み込んだ例を示した．

Banach は 1929 年に現在 Hahn-Banach の定理と呼ばれる，線形汎関数の存在定理を Studia Mathematica に発表している[26]．この定理は，変分法などの基礎となり，非線形関数解析の重要な基本定理の一つであるが，その証明には選択公理が本質的に用いられており，構成的とはなりにくい，と思われる．これらの結果をまとめて，Banach は 1932年に Theorie de Opérations Linéaires という有名な関数解析の本[27]を公刊した．この本は，多くの研究者が生涯に出会った美しい数学書の一つとしてあげてきた本である．この本の中では線形作用素の理論が展開されるが，この本には続巻が予定されていたらしく，その中では，線形のみならず，非線形も主役を果たす予定であったらしい[5]．続巻はついに刊行されなかったが，それには戦争が関連する．第一次大戦後，Banach の時代となってポーランドの数学界はその全盛期を迎える．Banach 空間の思想が非線形問題を考えるときに基本的となることからも実感できるように，ポーランド学派の無限への思考の軌跡が，世界の数学に大きな影響を与えた．しかし，第二次世界大戦の悲劇がポーランドの数学者たちにも大きなダメージを与えた．Banach は 1945 年の8月に亡くなっている．Banach の非線形に対する思想は Schauder によって実現されたが，戦争の悲劇はさらに重く Schauder の上に降りかかった．

Banach の縮小写像原理には多くの拡張がある(文献 1)，3.3 参照)．その中で，縮小性の条件の中の $k<1$ という条件を $k=1$ で置き換えた非拡張作用素の理論が，広く研究されている．非拡張作用素は一般には不動点をもたないが，Petryshin, W. V.[28]によって定義された demi-compact 性などを満たすと不動点をもつことが示される．非拡張作用素の不動点の計算理論も提案されている(文献 1)，6 章参照)．

4. Schauder の不動点定理

Brouwer の定理に対して多様な拡張が考えられた．その一つの方向はこれを無限次元空間のコンパクト凸集合上の定理に拡張することであった．Birkhoff, G. D. と Kellog, O. D. は有限区間上の2乗可積分な関数の作る関数空間や有限区間上の連続関数の作る空間内の凸集合上のコンパクト写像に対して，Brouwer の不動点定理を拡張した．これを一般の Banach 空間の場合に拡張したのが Schauder, J. P. (1899-1943) である．Schauder はユダヤ系ポーランド人で，ルヴフに生まれた．1923 年にはルヴフ大学に学位論文を提出した．中学教員などをしていたが，第2次世界大戦が始まりルヴフがソ連領に併合された後，ソ連政府によってルヴフ大学の教授に任命された．しかし，1941 年にドイツが侵攻してき，1943 年に処刑された．33 編の論文があるという．

Schauder は，1927 年に，現在 Schauder 基底と呼ばれる基底をもつ Banach 空間における不動点定理を証明した[29]．これは Brouwer の不動点定理を無限次元連続写像に拡張したものになっている．Schauder や Banach は，Brouwer の不動点定理の証明にみられる単体分割のような位相幾何学の思想が無限次元に拡張できれば，偏微分方程式論などの関数方程式論に実り豊かな成果が得られると考えていたようである．実際に，Schauder はこの不動点定理を2階の非線形楕円型偏微分方程式の解の存在を示すのに有効に用いられることを示している．

1930 年には，いわゆる Schauder の不動点定理として現在引用される次の定理を示した．

定理 4.1 (Schauder の不動点定理)[30] X を Banach 空間，$D\subset X$ を有界閉凸集合とする．$f: D\to D$ が連続なコンパクト写像であれば，ある $x\in D$ があって $f(x)=x$ を満たす．□

この定理が Brouwer の不動点定理（定理 2.1）の拡張になっていることは明らかであろう．ただし，写像がコンパクトであるというのは，有限次元写像で近似できることを意味する．写像のコンパクト性を仮定しているのは本質的であり，一般の連続写像という条件のみでは不動点をもたない例が作れる．このような反例の有名なものは Kakutani（角谷静夫）によって得られている[31]．

Schauder の不動点定理にはさまざまな拡張がなされている．コンパクト性の仮定をはずさず，一般化する方向がその一つである．1935 年，Tychonoff は局所凸な線形位相空間にこれを拡張した[32]．1965 年には Browder, F. は f^m に対する条件の定理に Schauder の不動点定理を拡張した[33]．また，コンパクト性の条件を弱める方向の拡張もある．この方向は，非線形問題に不動点定理を応用する場合に，きわめて重要となる．そこで，この方向の研究について少し詳しく論じよう．

コンパクト集合とは，有限次元空間における有界閉集合と同様，任意に $r(>0)$ を固定したとき，適当に覆い方を工夫すれば，有限個の直径 r の閉球によって被覆できるという性質をもつ集合のことである．したがって，ある集合 A に対し

$$\alpha(A)=\inf\{r\mid 集合 A は直径 r 以下の有限個の集合によって被覆できる\},$$

または

$$\beta(A)=\inf\{r\mid 集合 A は直径 r の有限個の閉球によって被覆できる\}$$

と定義すると，A がコンパクト集合であれば，$\alpha(A)=\beta(A)=0$ となる．一般に，$\alpha(A)$ と $\beta(A)$ の値は異なることが知られている．もし，$\alpha(A)\neq 0$ または $\beta(A)\neq 0$ であるならば，A は非コンパクト集合であることが分かる．さらに，$\alpha(A)$ または $\beta(A)$ が零からどのくらい違っているかは，集合 A がどのくらいコンパクト集合と異なっているかを表す．そこで $\alpha(A)$ および $\beta(A)$ を非コンパクト性の測度という．このように非コンパクト性の測度には幾つかの種類があり，$\alpha(A)$ は Kuratowski の非コンパクト性の測度，$\beta(A)$ は Hausdorff によって考案されたので，Hausdorff の球測度と呼ばれる[1)~3)]．X を Banach 空間とし，$\gamma(A)$ を $\alpha(A)$ あるいは $\beta(A)$ のいずれかとする．連続写像 $f: X\to X$ が任意の $A\subset X$ に対して $\gamma(f(A))\leq k\gamma(A)$, $(k<1)$, または $\gamma(f(A))<\gamma(A)$ を満たすとき，f は，それぞれ，k-縮小または condensing と呼ばれる．Schauder の不動点定理において，f がコンパクトという条件を f が k-縮小または condensing という条件に置き換えても，結論はそのまま成立する．これを，それぞれ，Darbo の不動点定理[34]，Sadvskii の不動点定理[35]という．k-縮小写像の典型的な例は，$f=K+C$ という場合である．ただし，K は縮小写像で，C はコンパクト写像である．この特別な場合に対する不動点定理は有名な Krasnosel'skii の不動点定理[36]と呼ばれる．g を適当な関数として Krasnosel'skii の定理を $f=g(K,C)$ の形の写像に拡張したのが Melvin の不動点定理である[37]．

Petryshin[38] は Hausdorff の球測度に関する k-縮小（これを簡単に球 k-縮小という）作用素などを含み，また，不動点を数値計算できるための近似可解性をもつ作用素のクラスとして Approximation-proper（A-プロパと訳す）作用素のクラスを定義し，コンパクト作用素はもとより，多くの重要な非コンパクト作用素がこのクラスに含まれることを示した．そして，コンパクト性の条件を A-プロパ性に置き換えた形に Schauder の不動点定理を拡張した．牧野と大石は A-プロパ作用素論と有限次元ホモトピー法を結合させることにより偏微分方程式などの無限次元方程式の大域的な数値解法に有限次元ホモトピ法が拡張できることを示し，これを無限次元ホモトピー法と呼んでいる[39)~43)]．

Schauder は 1932 年からロックフェラー財団の援助で，ドイツのライプティヒ大学に留学し，このとき，Leray との有名な共同の論文[44]を書き上げた．この論文の思想は，難しい関数方程式の性質を調べるのに，やさしい方程式を少しずつ対象とする難しい方程式まで変形していき，解の変化を調べるという連続変形法を用いるというものであり，写像度理論などへ発展し，非線形解析の最も基本的なアイデアを与えている．たとえば，写像 f がコンパクトなことが示されている場合には，有界閉凸集合 D に対して $f(D)\subset D$ が示されれば，f の不動点の D 内の存在が分かる．このた

めに $f(D)\subset D$ と等価な不等式が幾つか知られている(文献 1), 5.3 参照). この不等式が満たされるか否か調べるのを Schauder 評価といい, 偏微分方程式論の基本的な手法となっている. また, $f(D)\subset D$ を直接数値的に検証することによる偏微分方程式などの解の数値的存在検証法も知られている.

5. 集合値写像の不動点定理

以上に述べた不動点定理の拡張の一つの流れは集合値写像への拡張である. Xを完備距離空間とする. $P(X)$ および $K(X)$ によって, それぞれ, Xのすべての部分集合およびすべてのコンパクトな部分集合の全体とする. Hausdorff は本[45]の中で, $K(X)$ 上に, 現在では Hausdorff 距離と呼ばれる距離を導入した, そして, $K(X)$ が Hausdorff 距離によって完備距離空間となることを示した. この完備距離空間における縮小写像原理を用いて Hutchinson, J. E. はフラクタル集合の一つの定義と生成法を示した[46]. すなわち, 自己相似図形は, 全体に相似な部分の組合せでできている. 今, n次元ユークリッド空間 R^n 内の集合 A が $S_1, S_2, \cdots, S_N$ を縮小写像として

$$A=S_1(A)\cup S_2(A)\cup\cdots\cup S_N(A) \qquad (8)$$

と表せるとする. このとき Hutchinson は A をフラクタル集合と呼んだ. すなわち, 集合Aは自己相似な図形となり, その Hausdorff 次元は一般に非整数となる. (8)式の右辺を $F(A)$ と書き, 集合から集合への写像と考えると, F は $K(X)$ に Hausdorff 距離を入れた Banach 空間からその上への縮小写像となることが分かる. したがって, F の不動点が一意に定まり, それが先のフラクタル集合Aとなる.

Xを Banach 空間とする. Xから $P(X)$ の写像fに対し, Xの点xが

$$x\in f(x) \qquad (9)$$

を満たすとき, xは集合値写像fの不動点と呼ばれる. Kakutani は Brouwer の不動点定理を有限次元の集合値写像に拡張した[47]. この定理はゲーム理論の基本的命題の証明に用いられた. すなわち, 経済理論における均衡経済理論の均衡点は不動点や鞍点として捕らえることができる. これらは Brouwer の不動点定理によってその存在が示される. また, ゲーム理論においては, 解の存在に Brouwer の不動点定理や Kakutani の不動点定理が用いられる. 角谷は第二次大戦前米国高等数学研究所で研究を行っていたが, 戦中になり, 日本へ送還された. 戦中, きわめて活発な研究活動を展開するが, 原稿が灰になってはいけないということで, 研究成果をすぐに投稿したことがその一因になったとのことである. 戦後再び高等数学研究所に戻った. Kakutani は関数解析, Brown 運動論, エルゴード理論などに多くの優れた業績をあげている.

Schauder の不動点定理の集合値写像の不動点定理への拡張は 1950 年 Bohnenblust, H. と Karlin, S. によって, また, 1952 年に独立に Glicksberg, I.[48] によってなされた. また, Tychonoff の定理の集合値写像への拡張は Fan, K.[49] によってなされた. 変分不等式との関係もある. 縮小写像の原理については Nadler, S.[50] および Robinson, S. M.[51] による拡張がある. これを非線形システムの変動解析に応用するために発展させた研究に Horiuchi[52),53] および Horiuchi-Iino[54] の一連の研究がある. これにより, 非線形システムに不確定な変動が加わったときのシステム応答の変動の範囲やシステム変動に対するフェールセーフの解析が行われている[55]. Horiuchi-Iino の不動点定理に対し, 無限次元ホモトピー法を適用してその不動点を計算するアルゴリズムを構成することも適当な条件の下で可能である.

6. その他の不動点定理

(1) Tarski の不動点定理　Tarski, A. は射影集合と論理の関係に関する業績, 形式体系の決定問題への貢献, 公理的集合論, モデルの理論などの業績や, 選択公理の逆理的側面を浮かび上がらせた 1924 年の Banach-Tarski の逆理[5] で有名である. 主に論理学の仕事をした人である. その Tarski の不動点定理[56] は順序集合上での不動点定理であり, 今までの不動点定理と趣を異にしている. しかし, Scott のプログラムの意味論などで重要な役割を果たすため当学会の会員にはむしろなじみが深いかもしれない. この不動点定理の証明には選択公理が用いられているため, 構成的な定理とはいいにくい. しかし, 特定の場合には第 2 章から第 4 章の不動点定理も一部として含むため, 不思議な感じに襲われる. Tarski の不動

点定理とフラクタル集合の関係も論じられている[57].

(2) 単調作用素に対する不動点定理　単調作用素に対する Minty の仕事をきっかけとして単調作用素論が大きな発展を遂げた．ここでは，Zeidler の2巻からなる本[58]を紹介するにとどめる．強単調作用素は A-プロパ作用素の代表例であり無限次元ホモトピー法によりその不動点を計算できる[39].

(3) その他　複数の写像の共通不動点に関する不動点定理（文献 1)，9章参照)，作用素列に対する不動点定理（文献 1)，7章参照)，確率空間上の写像（文献 1)，11 章参照）に対する不動点定理，Fuzzy 写像の不動点定理[59]などが知られている．なお，Fuzzy 数学については応用数学者の立場から透徹した視点で書かれた概説[60]が参考になる．

7. むすび

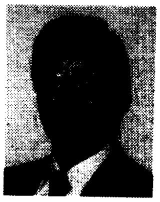
著者らは数学を専攻とするものではない．したがって，数学として大きな分野を形成する不動点理論について十分な解説ができなかったことを，お許し願いたい．本文で述べたように，不動点という概念は実に基本的な数学的概念である．したがって，抽象化も十分進んでいるし，具体的な応用も数知れずなされている．このような十分研究され尽くしたかにみえる基本概念によって，非線形システムの変動解析や非線形問題の精度保証付き数理解析など，大きな将来性を感じさせる分野が開けそうなのをみるとき，研究に置ける基礎の重要性とその深い応用可能性について，改めて感じさせられる．

参考文献

1) Istăţescu, V. I.: Fixed Point Theory, D. Reidel Pub. (1981).
2) Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Application I, Springer-Verlag (1984).
3) Deimling, K.: Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag (1985).
4) 中島玲二：数理情報学入門—スコット・プログラム理論，朝倉書店 (1982).
5) 志賀浩二：無限からの光芒—ポーランド学派の数学者達，日本評論社 (1988).
6) Brouwer, L. E. J.: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Math. Ann., Vol. 71, pp. 97-115 (1912).
7) Poincaré, H.: Sur les Courbes Definies par les Équations Différentielles Journ. de Math., 2 (1886).
8) Bohl, P.: Über die Bewegung eines mechanisches Systems in der Nähe einer Gleichgewishstlage, J. Reine Angew. Math., 127, pp. 279-286 (1904).
9) Sperner, E.: Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abh. a. d. Math. Sem. d. Univ. Hamburg, 6, pp. 265-272 (1928).
10) Knaster, B., Kuratowski, K. and Mazurkiewicz, S.: Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-Dimensinale Simplexe, Fund. Math., 14, pp. 132-137 (1929).
11) Brouwer, L. E. J.: An Intuitionist Correction of the Fixed Point Theorem on the Sphere, Proc. Royal Soc. London (A), 213, pp. 1-2 (1952).
12) Katzenelson, J.: An Algorithm for Solving Nonlinear Resistive Networks, Bell Syst. Tech. J., 44, pp. 1605-1620 (1965).
13) Scarf, H.: The Approximation of Fixed Points of Continuous Mappings, SIAM J. Appl. Mach., 15, pp. 1328-1343 (1967).
14) 大石進一：ホモトピーによる直流解の求解，システム/情報/制御，34, pp. 615-625 (1990).
15) Garcia, C. B. and Zangwill, W. I.: Pathways to Solutions, Fiexed Points and Equilibria, Prentice-Hall (1981).
16) 小島政和：相補性と不動点—アルゴリズムによるアプローチ，産業図書 (1981).
17) Allogwer, E. L. and Georg, K.: Numerical Continuation Method, Springer-Verlag (1990).
18) Stenger, F.: Computing the Topological Degree of Mapping in $\boldsymbol{R}^m$, Num. Math., 25, pp. 23-38 (1975).
19) Stynes, M.: An Algorithm for Numerical Calculation of Topological Degree, Appl. Anal., 9, pp. 63-77 (1979).
20) Kearfott, R. B.: An Efficient Degree Computation Method for a Generalized Method of Bisection, Num. Math., 32, pp. 109-127 (1979).
21) Nagumo, M.: Degree of Mapping in Convex Linear Topological Spaces, Amer. J. Math., 73, pp. 497-511 (1951).
22) Banach, S.: Sur les Operations dan les Ensembles Abstraites et luers applications aux Equations Integrales, Fund. Math., 3, pp. 133-181 (1922).
23) Urabe, M.: Convergence of Numerical Iterations of Equations, J. Sci. Hiroshima Univ., A19, pp. 479-489 (1956).
24) Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P.: Functional Analysis in Normed Space, Pergamon Press (1964).
25) Urabe, M.: Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems, Arch. Rat. Mech. Anal., 20, pp. 120-152 (1965).

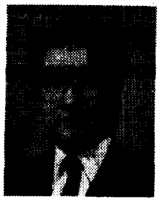
26) Banach, S.: Sur les Fonctionelles Linéaires, Studia Mathematica, 1, I, pp. 211-216 (1929) II, pp. 223-239.
27) Banach, S.: Théorie de Opérations Linéaires, Warszawa (1932).
28) Petryshin, W.V.: Construction of Fixed Points of Demicompact Mappings in Hilbert Spaces, J. Math. Anal. Appl., 14, pp. 276-284 (1966).
29) Schauder, J.P.: Zur Theorie stetiger Abblindungen in Funktionalräumen, Math. Z., 26, pp. 47-65, pp. 417-431 (1927).
30) Schauder, J.: Der Fixpunktsatz Functionalräumen, Studia Math., 2, pp. 171-180 (1930).
31) Kakutani, S.: Topological Properties of the Unit Sphere in Hilbert Space, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 19, pp. 269-273 (1943).
32) Tychonoff, A.N.: Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111, pp. 767-776 (1935).
33) Browder, F.E., Duke Math. J., 32, pp. 399-406, pp. 575-578 (1965).
34) Darbo, G.: Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto, Rend Sem. Mat. Univ. Padova, 24, pp. 84-92 (1955).
35) Sadovski, V.N.: Limit-compact and Condensing Operators, Russian Math. Surveys, 27, pp. 85-155 (1972).
36) Krasnosel'skii, M.A.: Two Comments on the Method of Successive Approximations, Usp. Math. Nauk, 10, pp. 123-127 (1955).
37) Melvin, W.R.: Some Extensions of the Krasnosel'skii Fixed Point Theorem, J. Diff. Eqs., 11, pp. 335-348 (1972).
38) Petryshin, W.V.: On the Approximation Solvability of Equations Involving A-proper and Pseudo-A-proper Mappings, Bull. AMS, 81, pp. 223-312 (1975).
39) 牧野光則, 大石進一: 無限次元非線形システムの構成的解析法ーホモトピー法の無限次元への拡張ー, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J 73-A, No. 3, pp. 470-477 (1990).
40) Makino, M. and Oishi, S.: A Homotopy Method for Numerically Solving Infinite Dimensional Convex Optimization Problems, IEICE Trans., Vol. E 72, No. 12, pp. 1307-1316 (1989).
41) Makino, M., Oishi, S. and Horiuchi, K.: Homotopy Method of Calculating Bifurcating Solutions for Infinite Dimensional Chaotic Systems, IEICE Trans., Vol. E 73, No. 6, pp. 801-808 (1990).
42) Makino, M., Oishi, S., Kashiwagi, M. and Horiuchi, K.: An Urabe Type A Posteriori Stopping Criterion and a Globally Convergent Property of the Simplicial Approximate Homotopy Method, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E 74, No. 6, pp. 1440-1446 (1991).
43) Kashiwagi, M., Oishi, S., Makino, M. and Horiuchi, K.: An Urabe Type Convergence Theorem for a Constructive Simplified Newton Method in Infinite Dimensional Spaces, IEICE Trans., Vol. E 73, No. 11, pp. 1789-1791 (1990).
44) Leray, J. and Schauder, J.: Topologie et equations fonctionelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, No. 3, pp. 45-78 (1934).
45) Hausdorff, F.: Set Theory, Second Edition, Chelsea Publ. Comp. (1962).
46) Hutchinson, J.E.: Fractals and Self-similaraity, Indiana Univ. Math. J., 30, pp. 713-747 (1981).
47) Kakutani, S.: A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, Duke Math. J., 8, pp. 457-459 (1941).
48) Glicksberg, I.: A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equiliblium Points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, pp. 170-174 (1952).
49) Fan, K.: Fixed Points and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 38, pp. 121-126 (1952).
50) Nadler, S.B. Jr.: Multi-valued Contraction Mapping, Pacific J. Math., 30, pp. 475-488 (1969).
51) Robinson, S.M.: The Contraction Principle for Multivalued Functions, MRC Technical Summary Report, University of Wisconsin, 1282 (1972).
52) Horiuchi, K.: A Mathematical Theory of System Fluctuations, Memoirs of the School of Science and Engineering, Waseda University, 46, pp. 183-189 (1982).
53) Horiuchi, K.: A Study on System Fluctuations Based on the Nondeterministic Operator Theory, Trans. IECE Japan, J 67-A, pp. 533-540 (1984). (in Japanese); for its English Translation see also, Electronics and Communications in Japan, Part 1, 68, pp. 10-18 (1985).
54) Horiuchi, K. and Iino, R.: Mathematical Foundation of the Fail-safe Principle in Wide-sense, Trans. IEICE, E 72, 5, pp. 479-484 (1989).
55) Horiuchi, K.: Functional Analysis of Nonlinear System Fluctuations, IEICE. Trans., E74, 6, pp. 1353-1367 (1991).
56) Tarski, A.: A Lattice Theoretical Fixed Point Theorem and Its Applications, Pac. J. Math., 5, pp. 285-309 (1955).
57) Hayasi, S.: Self-similar Sets as Tarski's Fixed Points, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21, pp. 1059-1066 (1985).
58) Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, IIA Linear Monotone Operators, II B Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag (1990).
59) Heilpern, S.: Fuzzy Mapping and Fixed Point Theorem, J. Math. Anal. Appl., 83, pp. 566-569 (1981).
60) 飯野理一: ファジィ数学概論, 早稲田大学理工学研究所報告 132, pp. 1-59 (1991).

(平成3年6月30日受付)



堀内　和夫

1952年早稲田大学理工学部電気通信学科卒業. 1957年同大学院博士課程修了. 工学博士. 1957年より同大学勤務. 現在電子通信学科教授. 非線形システム理論, 情報・制御理論, 電磁波理論等を専攻. 1977年電子通信学会論文賞, 1981年同学会業績賞, 1989年電子情報通信学会功績賞各受賞. 1991年郵政大臣表彰. 著書「電磁気学」(コロナ社),「電気数学Ｉ」(オーム社),「応用解析」(コロナ社),「応用数理への道」(コロナ社) 等. 現在, 電子情報通信学会副会長. IEEE Fellow.



大石　進一（正会員）

1976年早稲田大学理工学部電子通信学科卒業. 1981年同大学院博士課程修了. 工学博士. 1980年より同大勤務. 電子通信学科教授を経て, 現在情報学科教授. ソリトン, カオス, ホモトピー法, 精度保証付数値計算などの研究に従事. 非線形を中心とした情報数理工学を専攻. 著書「フーリエ解析」(岩波) 等. 電子情報通信学会英文論文誌 A, Journal of Circuits, Systems and Computer (World Scientific) 誌編集委員.