特集「不動点をめぐって」の編集にあたって

渡　辺　俊　典[†]

J. Stoy によるプログラム意味論の教科書“Denotational Semantics : The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory”の巻頭で，D. Scott はプログラム意味論の生い立ちに関わった C. Strachey の経歴を述べている．それによれば，Strachey の大学卒業直後の仕事は微分方程式解析への計算機応用であり，その後，いくつかの経歴の後，Oxford で教鞭を取るようになったとある．周知のように彼の着想は，D. Scott によって深い基礎を与えられ，今世紀の情報学分野での金字塔の一つに数えられるプログラム意味論として開花することになったのである．

半導体技術の爆発的発展に支えられた計算機の進歩によって，今日の情報処理技術の発展には目ざましいものがあり，まさに豊饒の時代を迎えつつあるように見える．このような時代には多くの思想が生まれ，それぞれの生命力に応じた長，短さまざまの軌跡をたどる．優れた思想は最終的には古典という知識空間内の不動点に到達し，人類共有の知的財産となる．そうでないものは，衰微の軌跡をたどる．この意味で，豊饒の時代は他方で淘汰の時代であるとも言える．人類の思想史というマクロな見地からは，現代は情報処理学の大発展期であり，その時期を情報処理学会の会員として過ごす機会を与えられたわれわれは類希な機会に恵まれた立場にいると言える．しかしながら，おびただしい思想の洪水の中に身を置く立場からは，このような時代は必ずしも居心地のよいものでもない．学ばなければならない知識は多く，ともすれば消化不良に陥る．製品のライフは極端に短くなり，精魂をつくした製品もわずかのうちに市場から放逐される．

物事の深層にある“変らないもの”を探求することは，このような多様な変化の時代に処する一つの知恵である．“変らないもの”は思考の節約のみならず新たな着想の源泉ともなる．われわれの思想の基礎をなす“変らないもの”の一つに，力学的世界観がある．その不変性はわれわれの根源的属性である時空間内の移動能力に由来するのかもしれない．力学的世界観では時間とともに対象の状態が遷移する様式に関心が払われ，連続微分あるいは離散差分方程式によってその記述が行われる．ニュートン力学系は前者の例であり，われわれに馴染みの深い計算機はメモリ内容を状態に取ると，後者の例となる．方程式の解が時空間内に描く軌道は系の時間変化を表す．初期点をさまざまに取った場合の無限の軌道群をいちいち考察していたのでは，系全体の動作様式を把握したことにはならないので，途中の軌道は捨象して終着点を調べあげることに関心がもたれる．軌道の終着点は状態遷移作用に対して不変な軌道の集合であり，不動点と呼ばれる．系の状態遷移式の記述から始めるのでなく，より根源的な，状態遷移現象そのものの背後にある広い意味での費用関数を捉え，状態の遷移は費用関数の勾配方向への移動に過ぎないとみなす立場もある．物理学での作用積分関数，経済学での効用関数，生物進化の説明に用いられる個体の環境適応価などは費用関数の例である．不動点は費用関数の局所停留点に対応する．

情報処理分野で最も馴染み深い Programming は，冒頭に述べたように Strachey や Scott によって広い意味の力学系としての意味付けを与えられ，その基礎を確立したわけであるが，青年時代に Strachey が微分方程式の計算機解析に従事したことは，その後の重大な発見に無関係であるはずはなく，“変らないもの”の一つである力学的世界観の永遠の価値を証明する例のように思われる．

本特集の企画は以上のような動機を背景としている．特集のタイトルは象徴的に“不動点をめぐって”としたが，著者には不動点の狭い意味にこだわらず，力学モデルに関わる話題を自由に選択していただいた．幸い，各界で著名な方々より計

† 電気通信大学大学院情報システム学研究科

10編の解説をいただくことができた．構成は，歴史解説1件，情報学以外の領域からの話題4件，情報学領域での話題5件である．

1.1 は，不動点概念の発展の歴史，特に今世紀初頭の Brouwer による不動点定理の発見以来の，数学特に解析学の分野での不動点論の発展と，それが諸科学に受け入れられていった過程の解説である．若い数学者たちが大戦の戦火をくぐりつつ，この永遠の知識を掘り起こしていった過程がつぶさに語られており，深い感銘を禁じえない内容となっている．

2.1 は数学基礎論において不動点が果たす基本的役割の解説である．ゲーデルの不完全性定理の対角線論法による証明が，ある命題関数が不動点をもつことの証明と等価であることを指摘した後，基礎論で重要な位置を占める Kleene の二つの帰納定理が，機能的部分関数における不動点の存在定理であると解釈できること，帰納定理と不動点意味論の間に深い関係が存在することなどが明解に示されている．思考や計算の根源に関わる哲学的領域が，すでに不動点と深く関わっていることを読者は知ることができる．

2.2 は物理学での力学モデルにおける時間の概念を問い直す解説である．従来の物理学では，時間は空間と独立に系の外部から借用でき，基礎方程式を解いて系の時間変化を知ることが問題の解を得ることであった．そこでは，時間経過に非依存な状態としての不動点の考察が可能であり意味をもっていた．ところが，宇宙論のように閉じた系を扱う場合には，時間を系の内部から調達する必要に迫られる．その場合，ほかの物理量とともに力学原理を満たす範囲で多様な時間の定義が可能となる．ほかの座標変数と単調な相関をもつというのが時間のせいぜいの特徴となり，時間の無限継続性も保証されない．時間が相対化するこの世界においては，従来の意味の不動点は意味をもたなくなり，新たな意味を問い直す必要があるが，その解答は今後の研究に待たれるとのことである．

2.3 は化学分野からの話題で，化学反応の力学モデルとその不動点の発現とみれるリズム現象や秩序ある時空間パターン形成についての実験結果を交えた解説である．生命をもたない単なる物質の集合体がこのような秩序を獲得する現象は，生命現象の原始的モデルとして興味をもたれている．情報学の分野で今後発展が予想される分散システムにおいては，個々の独立要素が全体として秩序ある行動を示すようにシステムを構成することに関心が寄せられると予想されるが，本解説はその際のヒントを与えるように思われる．

2.4 は経済学分野からの話題である．不動点定理はフォン・ノイマンによって経済学に持ち込まれ，数理経済学の分野で各種の経済モデルの構築や不動点定理自体の一般化がなされた．この意味で，不動点定理と経済学の係わりは長い．本解説では，代表的モデルである均衡モデルと経済成長モデルにつき，それらの概要と不動点概念との関係を，モデルの発展経過に沿って解説していただいた．従来の情報学ではミクロな計算操作に多くの関心が寄せられてきたが，オブジェクト指向，並列分散計算などの新たな計算パラダイムは，マクロな視点への転換を要請することもあるのではないだろうか．フォン・ノイマンが深くかかわった経済学モデルは多くの示唆を含むように思われる．

3.1 は最近研究の盛んなニューラルネットワークについて，その基礎が不動点にあることの解説である．外部からの教示フィードバックループまでを含めた場合，ニューラルネットは力学系を成し，学習や想起は系の不動点の探索に帰着できること，今までに提案された各種のニューラルネットについて，このことが不偏的に言えることなどが示されている．数多く存在する学習機械の本質が不動点に帰着することを知ることは，読者にとって知識の整理に役立つばかりでなく，不動点論側の知見を利用した学習機械の改良の可能性をも与えてくれる．

3.2 は不動点の計算法についての解説である．Brouwer の不動点定理の発見の後，不動点の具体的探索方式が Scarf によって提案され，以来不動点アルゴリズムと呼ばれる一群の算法の発展があった．その中の均衡点問題とその解法の解説である．Brouwer 流の不動点探索問題が R^n の閉凸部分集合 K と連続写像 $f: K->R^n$ のペアで指定される均衡点問題 (f, K) と数学的に等価であることを示した後，数理経済，ゲーム，非線形計画問題などが，この問題に定式化できることが示される．その解法として，f の線形近似と K とから近似的均衡点を探索する処理を繰り返すニュー

トン法的アプローチと，K の代りにその部分集合を逐次使用する単体的分割法があることを指摘した後，後者に属し，著者自身によるパス追跡というアイデアに立脚した可変次元アルゴリズムの詳細が示される．

3.3 はプログラム理論と不動点の係わりの解説である．再帰的プログラムの意味をある抽象的領域の間での写像の不動点と考える Scott 理論の紹介の後，list や stream などの基礎的データタイプがカテゴリのファンクタの不動点として意味付けられることが示される．情報学の中でもプログラム理論は抽象性が高く難解であるが，ここではその本質が分かりやすく解説されており，読者のこの分野への認識を高めてくれると期待される．

3.4 は制御工学，特にフィードバック制御系における力学モデルと不動点の係わりについての解説である．制御において最も重要な安全性の問題について，安定性の基本概念，安定性解析手法として著名なリアプノフ関数法と受動定理及び両者の関係，制御系のパラメータの変化による不動点の消滅，発生，周期解などへの分岐現象などが示される．最後に，非線形システムの線形近似や，連続時間システムの離散時間近似によって不動点の性質が変化する問題が具体例をあげて考察される．制御分野の解説であるが，通信分野での LSI 設計や数値計算の精度問題など，広範な領域に影響を与える内容が含まれていることを，多くの読者は認識されることと思う．

3.5 は非線形システムの挙動の詳細な解析結果の解説である．非線形システムの振舞いは，そのパラメータ値に大きく依存する．ただし，多様な振舞いも大略，不動点，周期点，準周期点，カオスに分類できる．そこで，非線形システムの挙動全体を知るためにはパラメータ空間内に振舞いパターンの地図を描くことが有効である．この地図は分岐トポグラフィと呼ばれる．本解説では，簡単な非線形電子回路を例に，その分岐トポグラフィの探求が行われる．観測不能なサドルタイプの不動点の挙動を追跡することにより，系の振舞いの急激な変化が理解可能となることが示されている．分岐トポグラフィは非線形系の大域的理解の重要な手段であるのみでなく，カオス現象の CG 利用などの局面で今後活躍する可能性をもっている．

学会を代表される大先輩から新進気鋭の若手にいたる広範な年齢層の著者により，広範な話題を含めた本特集を刊行できること自体が，不動点概念の時間と学問分野とを越える生命力との証明であろう．

最後に，ご多忙中にもかかわらず，執筆を引き受けてくださった著者の方々，ならびにご査読の労をつとめてくださった方々，特集企画に際して示唆をいただいた東京大学工学部，伊理正夫教授に厚くお礼申しあげます．

（平成4年2月27日）