Vol. 34 No. 3　　情　報　処　理　　Mar. 1993

解　説

証券価格変動をめぐる諸問題†

岸　本　一　男††

1. はじめに

有価証券とは，なんらかの定められた権利を保証する証書であるから，価値はその証券が保証する権利に応じて定まる．たとえば1年後に100万円の支払を（無リスクで）保証する証券は，現時点では，1年間の金利相当分を100万円から割り引いた価格だけの価値がある．この価格を「理論価格」と呼ぼう．この「理論価格」の意味は単純明瞭なので，この証券の価格変動を論ずることは一見些末にみえる．しかし，たとえば，明日金利が大きく下がるとすれば，その時点で，割引率の減少にともない，この証券の明日の価格は上昇するであろう．もし，この証券が市場で売買されており，さらに，大半の市場関係者が金利の下落を予期していたとすれば，実際には，今日のうちからこの証券の価格は，「現時点での金利を前提とした理論価格」より高くなることが期待される．実際の金利は日々変動しており，さらに，市場関係者による将来の金利予想は，景気見通しの変化や政府当局者の発言などから，日々変化するので，この証券の市場価格も日々複雑に変動する．

株式市場は，市場メカニズムに基づいて個別の企業活動の価値を評価し，資金の配分を最適化する機能を実現するための場所であるとされている．純粋に学問的な立場からも，また個別投資家の立場からも，このメカニズムを通じて株式価格がどのように変動するかに関心がもたれるが，確定利付きの証券の価格ですら複雑に変動するならば，価値評価のより困難な株式の価格は，はるかにやっかいな振る舞いをすることが予想される．

これらの振る舞いを解明しようとする試みは，著者の理解する限りでは，必ずしも十分には成功していない．しかし，学問的にも実践的にも，今後の発展と成功があるならば，それは，なんらかの意味で現状をふまえたうえのものであるはずである．本稿では，最も素朴な立場から出発して，できるだけ手短に，大まかな「地図」を書こうと試みてみる．実際には，どのような対象の価格変動を問題にするのかを明確にしなくてはならないのであるが，既存の研究の流れの基本は，株価変動であるように思われるので，本稿では，資産（実資産＋金融資産），金融資産（現金＋預金＋有価証券＋…），有価証券（株券＋債券＋派生証券＋…）といった区別を明確にはせず，実際には，より一般的な名称で呼ぶのが適当な場合も，やむをえない場合以外は常に株式を考える．

2. 株価変動の定式化

2.1 株価変動へのアプローチ

株価変動は，投資家による取引の結果の軌跡として現れる．したがって，たとえば一つの機関投資家が大量の売買を行えば，そのこと自身が株価を変動させる．このようなことをふまえた，一種のゲーム論的な株価変動論があってもよさそうであるが，現在までのところ，そのようなアプローチで部分的以上に成功したものを著者は知らない．

最も素朴で，しかし，最も多いアプローチは，「ある個人が株価の時間的な軌跡を傍観者として追跡していくならば，何が観測されるであろうか，あるいは，何が観測されるべきであろうか？」ということからスタートする．まず，株価の上下への変動は予測し難いということが推論される．なぜならその変動が予測可能だとしたら，市場に存在するであろう十分に慧眼な投資家は，その変動を見抜き，現在の時点ですでに株価をつり上げ，あるいは，下落させてしまっていると考えられるからである．

このような議論は，株式市場が，各種の情報に

† Price Changes of Securities and Their Related Problemes by Kazuo KISHIMOTO (Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba).
†† 筑波大学社会工学系

十分迅速に反応することを前提としている．この前提を，効率的市場仮説という．この「情報」として，

（ａ） 過去の株価の履歴

（ｂ） 公開された任意の情報

（ｃ） インサイダ情報を含む任意の情報

を取った場合を，Fama[9] は，それぞれ，効率的市場仮説の弱形，半強形，強形と名付けた．

効率的市場仮説の最も弱いものは（ａ）の弱形である．効率的市場仮説の弱形を認めることは，過去の株価の軌跡を眺めることによって投資利益の増大に利用可能な規則性を発見しようと試みること，いわゆる罫線分析が無駄だと認めることをただちに意味している．なぜなら，もしそのようなものが存在したなら，やはり十分に慧眼な投資家が，そのパタンの存在に気づき，それを利用することを通じて，そのパターンを解消してしまうと考えられるからである．

適当な可測性の条件（詳細略）を満足する確率過程の，任意の時刻 t におけるその期待値が，その過去のいかなる情報が判明したという条件のもとでの条件付き期待値とも等しいなら，その確率過程はマルチンゲールであると呼ばれる．株価変動が確率過程に従うことを仮定するとき，市場の効率性仮説の弱形は，しばしば，「株価変動はマルチンゲール過程に従う．」と要約される．もっとも，投資家がなんらかのリスク回避の行動を取ることを前提とし，かつリスクが時間的に変動していると仮定すれば，素朴な形でのマルチンゲール性はもはや成立しなくなる．もし，マルチンゲール性を認めてしまえば，連続時間の関数としてみた株価変動は，有界変動関数ではありえないことがただちに導かれる．（たとえば Elliott[6]，第５章を見よ．）

ある個別企業の株価は，その企業の本来有する価値によって定まるはずであり，その価値の予測は，公開された財務情報などのしかるべき分析から，ある程度可能であるかに思われる．（ｂ）の半強型は，その分析をいくら丁寧に行ったとしても，その時点ではすでに，株価にすべての情報が正しく折込済みであるために，結果的に情報自身が無価値であることを主張する．

（ｃ）の強型は，さらに強く，非公開のインサイダ情報を利用しても，収益を増加させることができないという主張である．インサイダ取引の禁止が厳密に守られていれば，一見成立しないはずであるが，決定的な証明は得られていないようである．

2.2 効率的市場仮説に関する実証研究

効率的市場仮説は，証券市場を取り扱ううえでの最も基本的な考え方であり，多数の実証研究がなされている．

効率的市場仮説の弱型の古典的な検証は，大きく分けて，

（ａ） 株価の対数の日次，週次，月次変動を時系列として眺めたときの，なんらかの相関の有無を調査する，

（ｂ） 適当な売買規則を定め，その売買規則による取引の収益が，適当な基準収益を越えるか否かを計算する，

の２通りのアプローチで行われてきた．細かく眺めれば，株価変動にはたとえば月ごとに，また，曜日ごとに「癖」があることが分かっており，この「癖」の原因は十分には合理的に説明されていない．また，個別株価には，細かな正，あるいは負の系列相関があることも知られている．しかし，手数料などの取引コストを考えると，これらを利用して利益をあげることはできない．

大筋としては，効率的市場仮説の弱形は成立するものとして認められている．しかし，比較的長期の相関に関しては，かなり強い負の相関があるのではないかとの指摘[12),28)]も行われている．

効率的市場仮説の半強型，強型についてもいくつもの研究が行われており，おおむね，半強型については肯定的な結果が示されている．

2.3 株価変動の分布について

確率過程 $\{Y(t):t\geqq 0\}$ は，

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i Y(t_i)$$

からなるあらゆる線形結合が正規分布に従い，かつ，

$$E[Y_t]=0,\ \ E[Y_tY_s]=\min(t,s)$$

が成立するとき，ブラウン運動であると呼ばれる．容易に分かるように，ブラウン運動では，任意の（時刻の）増加列 $t_1<t_2<\cdots<t_N$ に対し，$Y(t_1)$, $Y(t_2)-Y(t_1)$, $Y(t_3)-Y(t_2)$, $\cdots$, $Y(t_N)-Y(t_{N-1})$ は，互いに独立である．すなわち，過去の株価系列は現時点以後の価格変化に対し，なんの手がかりも

与えない.

株価変動をなんらかの意味で定量的に取り扱おうとする場合，株価変動の具体的な分布が必要になることが少なくない．株価変動が確率過程に従うとすると仮定するとき，とりあえずの出発点になるのが対数ブラウン運動である．これは，株価系列 $X(t)$ の対数を $Y(t)=\log(X(t))$ とするとき，ある平均上昇率 μ に対して，$Y(t)-\mu t$ がブラウン運動に従うというモデルである.

ここでもし株価の対数をとらないならば，ある株式の価格がたとえば千円から一万円に上昇したとき，同じ百円の変動が，株価が千円のときには1割，一万円のときには1分の収益となり，投資収益率の立場からみて首尾一貫しなくなる.

株価変動をブラウン運動で近似することは，第一近似としてはそれなりの説得力がある．すなわち，株価（の対数）$Y(t)$ が多数の小さな要因の積み重ねを反映したものであるならば，その期間 Δt における変動は，かなりゆるい条件のもとで中心極限定理により，正規分布に従うからである.

しかし，現実の株価の対数の変動は，ブラウン運動では不十分にしか説明できない．Mandelbrot[23]は，実際の株価の日次変動の尖度，すなわちその平均値回りの4次のモーメントを分散の自乗で割って規格化した量（文献によってはこの値から3を引いた量を尖度と呼ぶ場合もあるので注意を要する）が，正規分布の場合3になるのに対し，株価変動の場合はほとんど常に3より有意に大きいことに積極的に着目した．正規分布以外にも無限個の確率変数の和として表現できる一群の分布が知られており，安定分布と呼ばれるが，Mandelbrotの議論の要点は，株価の対数の変動が独立に，正規分布ではない同一安定分布に従うという主張である．正規分布の場合を除いて，これらの分布は分散も尖度ももたない（すなわち，無限大となる)．このことに対応し，有限個の実現値からそれらを推定しようとしても，そのデータの個数に依存しながら，きわめて大きな計測値が得られるという性質をもっていて（後述)，Mandelbrot の着目した性質と合致する．Fama[8] は，米国の株価について Mandelbrot[23] の主張を検討し，株価の対数の日次変動は，互いに独立に，正規分布以外の安定分布に従うと考えるのが適当であると結論した.

Fama[8] の論文以後しばらくの間，株価の対数の変動を独立同一の非正規安定分布に従うとみなす流れが強かった．また，Mandelbrot の主張は，近年，非正規安定分布をフラクタルとして捕えるという観点から，再び脚光を浴びている．しかし，現在では独立同一の分布に従わないことはほぼ確実視されており，Fama 自身も 1976 年の著書[10]において，彼の 1965 年の結論を撤回している.

ここで Fama の結論については，一言コメントしておくのが適当だろう．不幸なことであるが，「株価の対数の変動が独立同一の非正規安定分布に従うか否か」を，実データに即して検証しようとする論文には，数学的な誤りに起因する混乱が，今でもみられることがある．たとえば，大半の実データに対して，時系列データを等間隔に間引きながら株価の対数の差の尖度を計算していくと，間引くに従って尖度が減少していくことが観察される．尖度が発散する分布に対しては，この現象が独立同一分布の仮定と矛盾しないことは，すでに Mandelbrot 自身[24]が指摘していることであるが，実証研究者は，しばしばこの事実を無視している．（データの個数が多くなるに従って，真の値，すなわち無限大に近づいていくのだろうと考えれば，間引きにともないデータ個数の減少によって，尖度は当然減少すべきである.）Fama[10]の著書では，類似の誤りを犯しており，データを間引きながら標準偏差で規格化したヒストグラムを観察して，独立同一性を否定する一つの根拠としている．非正規安定分布は分散をもたない（発散する）ので，先の尖度の場合と同じく，彼のこの計算は数学的に無意味である.

数理的な好事家は（筆者も含めて)，これらの数理的に誤った推論をことさらに重大視し，独立同一の非正規安定分布の正しさの可能性を擁護したい誘惑にかられる．しかし，冷静な検討を行うなら，結果的には，独立同一分布の仮説は成立しないことが示される．（気になる方は，たとえば，岸本[16]のアプローチを用いて自ら検証されてみるとよいであろう.）

特に，分散が時間的に変動していることはほぼ確実で，この現象をモデル化した ARCH モデル[7]，Taylor モデル[32]，あるいはこれらの拡張がいくつも提案されている.

2.4 株価変動に対するその他のアプローチ

Mandelbrot[25]は非正規安定分布（この場合は独立同一分布であると第一近似される）のほかに，長期的相関の観点からのフラクタル性の存在の可能性も主張している．Mandelbrotは，この現象をJosepf効果，あるいはNoa効果という名で呼んだ．Greene and Fielitz[13]は，200日の日次データの解析から，この長期的相関の存在を報告している．(ただし，著者の理解と経験では，これではデータが少なすぎるし短すぎる.）他の観点からの実証研究によっても，株価変動になんらかの長期的相関が存在することは疑えないが，この長期的相関をフラクタルの立場から正当化し得るか否かは，現在のところ，著者自身は実データに基づいて判断できる十分な根拠をもっていない．

最近では，期価変動をChaosの立場から検証しようというアプローチも検討されている．すなわち，適当な差分方程式を考え，株価変動が，決定論的にこの差分方程式に従うにも関わらず，その解がChaosになっているために，規則性が判定し難いのだとする見方である．しかし，実証研究の結果は，このようなアプローチを単純には肯定していない[4]．

学問的立場を離れると，巷にあふれる数え切れない「株で儲ける方法」と題した図書は，大半が，株価変動はなんらかの意味で予測可能であるとの立場をとっている．もっとも，著者の研究室で卒業研究を行った何名かの学生諸君が，これらのアプローチ，あるいは「独自の工夫」を過去の東証株価の軌跡に適用してみたが，買い持ち戦略（その名のとおり，株式を当初購入したまま，ずっと持ち続ける戦略）を越えるものは得られなかったと結論している．

3. 投資家の行動

（前章で述べた意味での）効率的市場仮説が成り立っているなら，罫線分析などの，株価変動の過去の履歴から将来の株価を予測して他の投資家をだしぬこうとする試みは，無意味である．Markowitzの手法は，この仮説（もっとも，Markowitzがその理論を提唱した時点では，効率性の概念はいまだ提出されていなかったのであるが）のもとでも有効に機能する，最適な投資戦略を探ろうというものである．

投資家が保有する金融資産（ここでは株式）の集まりは，ポートフォリオと呼ばれる．Markowitzの考え方の要点は，なんらかの期間（たとえば1年間）を区切り，この期間での投資において，収益の期待値ができるだけ大きくなるように，また，変動リスクとしての分散が最小となるようにポートフォリオを組むべきだ（あるいは，組むはずだ），という仮定をおくことである．この結果，ポートフォリオは，パラメータcをもつ次の一群の最小化問題の解を満足するように選ばれることになる：

$$
\begin{aligned}
&[\text{投資による収益の分散}] \to \min\\
\text{subject to } &[\text{投資による収益の期待値}] = c\\
&[\text{各銘柄に対する投資額}] \geqq 0 \quad (*)\\
&[\text{投資額}] = 1.
\end{aligned}
$$

ここで(*)は，投資対象銘柄が二つ以上ある場合に，各銘柄への投資額が非負だという自然な条件である．しかし，Markowitz以後の理論的な解析においては，(*)を制約条件からはずして議論する場合が多い．これは無制限の空売り（当該銘柄の株式を借りて現在の値段で売却すること，その株式を後に後の時点での価格で買い戻して，借り主に返却することを前提としている）を許すという仮定を置いているのである．以下の議論でも，(*)をはずして論じよう．

あるcに対してこの解を実現するポートフォリオは，フロンティア・ポートフォリオと呼ばれる．制約条件中の定数cを動かしてえられる一群の解は，ポートフォリオ・フロンティアと呼ばれる．cをどのように選択するか，あるいは同じことだが，ポートフォリオ・フロンティア上のどのポートフォリオを選択するかは，投資家の「嗜好」の問題となる．収益の標準偏差をx軸に，期待値をy軸に取って，ポートフォリオ・フロンティアが実現する標準偏差―収益の期待値の関係をx―y平面上に図示（**図-1**, *CAD*）すると，議論が分かりやすくなる．この曲線は，フロンティア曲線と呼ばれる．

株式の投資比率をベクトル表示しよう．投資による収益の分散は，このベクトルと分散共分散行列とにより表現される2次形式となる．分散共分散行列が正則であると仮定する．フロンティア曲線は右半平面上に位置し，対称軸がx軸に平行な双曲線（の右側の連結成分）になることが分かる．

この双曲線は，標準偏差の2価関数である．われわれに関心があるのは，その上側半分の点に対応する，すなわち各標準偏差値に対して最大実現可能収益率をもたらす，ポートフォリオである．このようなポートフォリオを有効ポートフォリオ，その集まりを有効フロンティアと呼んでいる．

銀行預金のように収益の分散が0の金融資産（安全資産と呼ばれる）は，ここまでの計算では許されていない．なぜなら，分散共分散行列が特異になってしまうからである．もし安全資産が許されるなら，投資家が実現できる領域が広がり，上の解のフロンティア曲線によって囲まれる双曲線片側内部無限凸領域に加えて，それらの任意の一点と安全資産を表す点 F（図-1，点 F）とを結ぶ直線上の点も許されることになる．このように広がった領域の有効ポートフォリオに関心があるのであるが，「安全資産の収益が株式の収益より低い」という妥当な条件のもとで，F から双曲線上側部分への接線（図-1 では半直線 FMB）が引けることが分かる．この接点を M と記す．有効フロンティアは，明らかに，この半直線を実現するポートフォリオの集まりである．

この半直線上の任意の点は，M を実現するポートフォリオと安全資産とを適当な比率で保有する

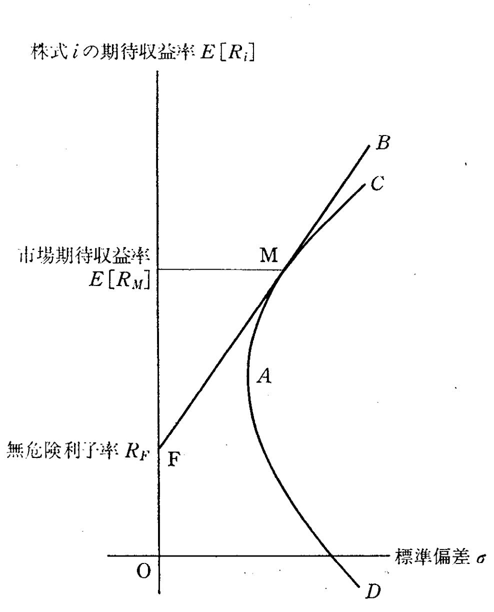


図-1 無危険資産がない場合のポートフォリオ・フロンティア（曲線 $CMAD$）と有効フロンティア（曲線 CMA），ならびに無危険資産がある場合の有効フロンティア（直線 FMB）

ことによって実現される．もし，すべての個別株価の期待値と分散とが全投資家に既知であるなら，どの投資家が解く最適問題も，その希望する期待収益 c が異なる以外は同一であるから，点 M は全投資家に共通となる．この結果，各投資家の株式への投資総額に対する各個別株式への投資比率は，この点が定める投資比率に一致することになる．投資家の希望する期待収益の違いは安全資産と危険資産（ここでは株式のこと）とへの投資比率に反映するのみであり，危険資産内部での投資比率は影響を受けない．Tobin[33] に端を発するこの発見は，現在，分離定理と呼ばれている．

最後に一言，投資リスクを分散で測定するアプローチは，必ずしも絶対的なものではないことにも注意しておこう．事実，たとえば，Konno[19]，Konno and Yamazaki[20] は，分散の代わりに，絶対偏差，あるいはさらに一般的な区分的に線形な関数をリスクとしたアプローチを論じている．

4. CAPM と APT

4.1 CAPM

市場にあるすべての株式が投資家に保有されているなら，実は，前章で出てきた，「点 M が定める，危険資産中での個別株式の比率」は，実は，市場の存在するすべての株式の中での個別株式の比率に一致するはずである．このようなポートフォリオを市場ポートフォリオと呼ぶ．全投資家が先に述べた最適問題の解の定めるところに従って株式市場への投資を行うならば，前章の結果は，実は，証券の価格付けのモデルを与えていることになる．これが，CAPM (Capital Asset Pricing Model)[22),27),31] である．CAPM にもいろいろなアプローチとバージョンがあるが，最も基本的には，

（a） すべての投資家は，現在からある同一の一期間の間での，彼の目的関数（効用関数と呼ばれる）を最大にするように行動する．この目的関数は，投資家ごとに異なってよいが収益の期待値と分散とのみの関数であり，どの投資家も，収益がより大きく，分散のより小さな株式を好むものとする．

（b） すべての投資家は，株式の期間中の期待収益率と収益率の分散とに関し，同一の意見をもっている．

（c） 市場は均衡している．すなわち，各株式への需要と供給が一致している．

（d） すべての投資家が，ある同一の安全利子率で資金を自由に預け入れ，あるいは借り受け可能である．

（e） 株式は任意の端数の株式を，税金，手数料なしに空売りも含めて自由に売買できる．

の仮定の下で，市場ポートフォリオと個別株価の間の関係が，次の式で与えられることを主張する：

$$E[R_i]=R_f+\beta_i[E(R_M)-R_f],$$
$$\beta_i=\mathrm{Cov}[R_i, R_M]/V[R_M].$$

ただし，R_f，R_i，R_M は，それぞれ，安全資金，個別株式 i ならびに市場全体での収益率，$\mathrm{Cov}[\cdot, \cdot]$，$V[\cdot]$ は，それぞれ，共分散と分散である．

興味と意欲と工学部教養レベル以上の微分学の知識とを合わせ有する読者は，以下の手順で，この関係式の導出に挑戦されたい：（1）前章末の注意により市場ポートフォリオが点 M を実現することに注意する；（2）特に，市場ポートフォリオが有効ポートフォリオになることに注意する；（3）（2）の直接の結果として，市場ポートフォリオと任意のポートフォリオ（必ずしもポートフォリオ・フロンティア上にのらない任意のポートフォリオ，このポートフォリオをたまたま個別証券に取ると，上の関係式の場合に相当する）との凸一次結合が作る曲線が，接点 M において，有効フロンティアが定める半直線（図-1 の直線 FMB）と接することを確認する；（4）接点 M においては，曲線と接線の傾きが等しいという事実を，無危険資産の保有率 α を用いて書き下し，その中に現れた α に関する微分の計算を実行して $\alpha=0$ とおく．

CAPM 成立の前提条件はかなりきつい．ただ，ある程度は条件をゆるめても，本質的には同様の結果がえられることも，知られている．しかし，実証研究の結果によると，CAPM の説明力はきわめて弱いことが知られている．さらに，実証研究を行うに当たって，「市場ポートフォリオがポートフォリオ・フロンティア上にのるためには，株式のみならず，投資可能なすべての資産を考慮せねばならないので，事実上，検証ができないのではないか」という Roll[29] からの主張が，批判として強力である．

最後に，CAPM はリスクとして分散を取るわけであるが，たとえば，前述の今野らの立場からでも同様の議論の試み[21]があることにも言及しておこう．また，CAPM の前提を認めてしまうなら，効率的市場仮説の検証は個別銘柄の時系列の相関の有無の問題から，各時点で市場が CAPM の関係を実現する均衡を実現しているか否かの問題へと変質することにも注意しておこう．

4.2 APT

CAPM は，限定されてはいるが，美しい理論である．これに対し Ross[30] により提案された APT (arbitrage pricing theory) は，導出での美しさを多少犠牲にしながら，形式上は，より一般的な定式化を可能としたモデルを提案している：

$$R_i=E[R_i]+\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}F_k+\varepsilon_i, i=1, 2, \cdots, n.$$

R_i は株式 i の収益，F_k は組織的変動要因，ε_i は株式 i に固有の変動要因で，β_{ik} は株式 i の価格が F_k の変動にどの程度に感応するかを表す定数である．この式を実現するためには，独立性その他のいくつかの仮定が必要であるが，詳細は省略する．

この式で，因子として市場ポートフォリオの収益率からその期待値を減じたもののみを取ると，CAPM と類似の形となっていることに注意しよう．

5. オプション

5.1 オプション

「株式投資で（安全利子率より大きな）利得を期待したい．しかし，損をするのはいやだ．」と考えるのは，人情としては自然である．そして，株価変動に対して一種の「保険」を掛ければ，この問題はある程度解決される．

「定められた分量 a の株券をある定められた満期日 b に定められた行使価格 c で引き取ってもらう権利」をヨーロピアン・プット・オプションという．分量 a の株券とそれに対応するヨーロピアン・プット・オプションを両方同時に所有していたなら，時点 b がきたとき，株価が c より低かったならばプット・オプションを行使して，c の金額を確保することができる．一方，株価が c よりも高かったならば，プット・オプションは放棄してしまうことになるが，株券を売却することによ

って，c より高い価格を確保することができる．つまり，プット・オプションは株価下落に対する保険として機能していることが分かる．

この例では，オプションの権利行使は満期日に限定されていたが，満期日以前の任意の日の権利行使をする「保険」もあってよいはずである．このようなプット・オプションは，アメリカン・プット・オプションと呼ばれる．

「所定の条件で株式を強制的に売却する権利」があるなら，それに対応して，「所定の条件で株式を強制的に購入する権利」も存在してよいはずである．このような権利を，行使期日が特定の一日のみであるか，それ以前の任意の日であるかによって，それぞれ，ヨーロピアン・コール・オプション，アメリカン・コール・オプションと呼ぶ．

5.2 Black-Scholes 式

オプションを「保険」と考えるなら，その期待収益分だけの「保険料」を支払わなくてはならないことは，素直に理解される．この「保険料」はいくらにすべきであろうか？ この問題に回答するのが，有名な Black-Scholes 式である．すなわち，

（a） 安全資産利子率は一定であり，安全資産の借り入れ貸出は無制限に行える．

（b） 株価の対数（から平均増加率を除去したもの）はブラウン運動に従う．

（c） 株式に対しては配当は支払われず，空売りは無制限に可能で，取引に対しては，手数料，税金，証拠金などは一切不要である．

という仮定のもとで，時刻 t におけるヨーロピアン・コール・オプションの価格 x は，

$$w(x,t)=xN(d_1)-c\exp(r(t-t^*))N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\ln(x/c)+(r+v^2/2)(t^*-t)}{v\sqrt{t^*-t}}$$

$$d_2=\frac{\ln(x/c)+(r-v^2/2)(t^*-t)}{v\sqrt{t^*-t}}$$

t^*：満期日

c：行使価格

r：安全資産の利子率

v：株価変動の標準偏差

$N(x)$：標準正規分布の累積分布関数

$$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\exp(-z^2/2)/\sqrt{2\pi}\,dx$$

で与えられることが示される．この式の導出には，確率微分方程式の議論が素直に適用される．この式を用いて，ヨーロピアン・プット・オプションに対しては，

$$w(x,t)=-xN(-d_1)+c\exp(r(t-t^*))N(-d_2)$$

が成立することが容易に導かれる．

オプションは，それ自身独立の証券であり，株式の所有と無関係に，オプションのみを購入することも可能である．たとえばプット・オプションの場合，満期日 t^* で株価が c 以上であれば，（実際の株価より安い価格で株を売りつけても損が出るだけだから，わざわざプット・オプション行使の需要は存在しえず）プット・オプションはただの紙切れになり，投資された資金はすべて失われる．これに対し，株価が c 以下になれば，投資金額に比べてきわめて大きな収益を得ることができる．この意味で，プット・オプションをハイリスク・ハイリターンの投資対象と眺めることも可能である．

5.3 Black-Scholes 式をめぐって

Black-Scholes 式の仮定は，きわめて強い．しかし，その計算において，株価変動の分散 v 以外の量は，すべて測定可能な量であることに注意しよう．この結果，v を測定することのみが，実務上の問題になる．この簡明性は，実用上大きな利便性を与える．一見，前提条件の制約が強すぎて実用につながらないかにみえる Black-Scholes 式は，実は，本稿に記された諸議論のうち，最も幅広く実用に供されている理論である．

6. 実証研究における技術的問題

この解説を締めくくるに当たって，一見自明にみえる場合ですら，実証研究が幾重にも技術的困難を抱えていることにも，言及しておこう．

6.1 系列相関の統計的検定をめぐって

2.2 でも述べたように，効率的市場仮説の弱型の実証分析は，古典的には，系列相関の有無の検証を通じて行われた．しかし，投資家がリスク回避を希望するなら，同じ期待収益率をもつ株であっても，分散の小さな株が（あるいは CAPM を認めてしまうなら，市場ポートフォリオとの共分散の小さな銘柄が）好まれ，結果的に，人気のない株式は，そのリスク分が上乗せされた収益率が予想されない限り，購入されることはないであろ

う．この上乗せ分，すなわちリスク・プレミアムの存在を認めるならば，リスクが時間的に変動する場合，系列相関が観測されるのが自然であり，このような検定が意味をもつのか否かが問われることになる．

しかし，ここでは仮に古典的な素朴なアプローチを受け入れたとしてみよう．このとき数理的・客観的検証には何の問題もないものと，考えられがちである．しかし，たとえば株価指数に対しては，個別株価の系列相関が0であったとしても，薄商い株に対する値付きが遅れがちになることに起因する正の系列相関が発生することが知られており，その補正法の決定版は，筆者の知る限りでは知られていない．さらにこの問題がクリアされたとしても，なお，分散が時間的に変動するという条件のもとで，系列相関の有無をどのように検定するかという問題が残る．たとえば，時系列データが自己相関をもっているか否かは，多くの場合，その系列相関係数 r を計算することによって与えられる．このとき，この元となる確率過程が独立同一分布に従っているなら，データの個数が無限大の極限において，r の値は，その平均0，分散 $1/n$ の正規分布に従う．通常の計算では，この事実を用いて検定を行う．しかし，個数無限大での漸近理論が適用できるほどデータの個数が多いか否かという問題はさておいても，分散が変動するならば，もはやこの議論は成立しない．実際に，たとえば，Taylor が提案しているモデルに対して，彼自身が株価系列に対して妥当な実例としてあげている数値をパラメータとして与えて，サイズ200の無相関時系列データを発生させて，r の値に基づく無相関の帰無仮説の検定を一万回行ってみた．すると，有意水準5パーセントの両側検定において，実に，3001個の系列に対し帰無仮説が棄却されたのである．ただし，この最後の点については，Kishimoto[18] が，Taylor[32] のアプローチ自身も不十分であることを示しながら，かなり実質的と思える一つの解決法を示している．

6.2 フィルタ・ルールをめぐって

証券の機械的売買規則のうちで，学問的立場から最もよく研究されているのは，Alexander のフィルタ・ルールである．この規則は，証券関係者の間で「順張り」と呼ばれているものの一種で，大ざっぱに言えば，「株価が，事前に定めた f パーセントだけ上昇すれば，その株式を購入し，f パーセントだけ下落すれば，その株式を売却する．」という手法である．

フィルタ・ルールの有効性の検証法についても，長い論争の歴史がある．初めてフィルタ・ルールを提案し，実データに対しその有効性を示したと主張したのは，Alexander[1] である．Mandelbrot[23] は，株価が不連続に変動するため，フィルタ・ルールが要求する価格での売買が不可能であると主張し，Alexander の計算にはバイアスが含まれていると批判した．これに関連して，Mandelbrot は，非正規安定分布に基づいて時間的連続な過程を構成すると，その見本関数は連続ではありえないことを強調している．Alexander[2] は，この批判を受けて，売買価格がわずかに変動した場合の収益の再計算を行い，著しく収益が減少することを発見した．Fama and Blume[11] は，売買価格の実在を保証するために，売買がちょうど終わり値で行われるものと仮定して，収益の計算を行い，フィルタ・ルールが有用でないと結論した．Dryden[5] は，Fame and Blume の空売りを行うときの計算にバイアスがあると主張し，そのバイアスを補正すると，結論が変わるかも知れないと主張している．

また，岸本[17]は，たとえ株価がブラウン運動に従うとしても，その終わり値を折れ線で結んだ軌跡に対して Alexander[1] の提案した手法をそのまま適用して収益を計算すると，巨大なバイアスが発生することを示し，その値が，実データでのバイアスを，かなりの程度説明することを示した．この一見奇妙な現象は，実は，ブラウン運動を折れ線近似する段階で発生する，正の相関に起因している．この事実に基づけば，Mandelbrot の Alexander 批判は，バイアスの原因の批判としての十分な根拠を失ってしまうことが理解されるであろう．

岸本[15),16),18]は，これらの歴史を念頭に起きながら，東証株価指数に対して，フィルタ・ルールの収益を計算して，買い持ち戦略と比較し，その統計的有意性も検証している．その結論は，実は微妙なのであるが，少なくともなんらかの長期的な非効率性の存在を示唆している．

しかし，この岸本の結果にせよ，リスク・プレミアムの考慮をしていないという批判に対しては

無力である．そして，「このとき測定されるべきリスク・プレミアムとは何か」についてすら，明確な結論は得られていないのである．

6.3 実証研究における反省

本章での2例でも分かるように，実証研究の結果は，最も検証方法が明瞭な場合ですらその検証方法によって大きく影響される場合が少なくない．多くの実証研究は，検証方法の妥当性に対して，数理的観点からの十分な注意を払っているとは，必ずしも言えない．しかも，問題点が明らかになったとしても，その十分な解決法は，しばしば開発されていない．そのうえに，実は，「いったい何を検証したらよいのか」についての合意すら，必ずしもとれていないことも，これまでに指摘したとおりである．

このような状況は，筆者の判断する限りでは，これら2例に留まらず，多数の実証研究に，広範にみられるように思われる．

7. おわりに

株価変動をめぐる諸議論において，理論と現実の間には，相当大きなギャップが存在する．また，その検証に当たっても，たとえば，効率的市場仮説一つにしても，何が示されればそれが反証されたと言えるかが判然としていないことは，先に述べたとおりである．（この問題の近況については文献14）を見よ．）また，最近の「高度に洗練された」経済学，あるいは確率過程論の立場からは，本稿の議論は「耐え難く素朴」なものとなっているのであるが，一方で，これら「高度」な理論と「現実」との距離は開く一方であるように思われる．

このような事情をみて，「だから，これらはまっとうな工学者のかかわり合うべき問題ではない」と判断するか，「だから，まっとうな推論能力をもった万人に納得できる，合理的な理論を早急に建設すべきである」と判断するかは，現在のところでは，各人の見識にまかされているように思われる．

謝辞　本稿の最終原稿を作成するに当たっては，筑波大学社会工学系の同僚，岸本直樹先生，白川浩先生より有益なコメントをいただいた．

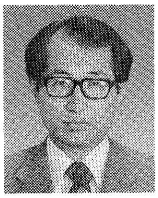
本研究の一部は，文部省科学研究費，筑波大学学内プロジェクトの援助を受けて行われた．

参考文献

1) Alexander, S. S.: Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks, Industrial Management Review of MIT, Vol. 2, pp. 7-26 (1961).
2) Alexander, S. S.: Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks, No. 2, Industrial Management Review of MIT, Vol. 4, pp. 25-46 (1964).
3) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Financial Economics, Vol. 3, pp. 637-654 (1973).
4) Brock, W. A., Hsieh, D. A. and LeBaron, B.: Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence, MIT Press, Cambridge (1991).
5) Dryden, M. M.: A Source of Bias in Filter Test of Share Prices, Journal of Business, Vol. 42, pp. 321-325 (1969).
6) Elliott, R. J.: Stochastic Calculus and Applications, Springer: New York, Heidelberg, Berlin (1982).
7) Engle, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica, Vol. 50, pp. 987-1007 (1982).
8) Fama, E. F.: The Behavior of Stock-Market Prices, Journal of Business, Vol. 38, pp. 34-105 (1965).
9) Fama, E. F.: Efficient Market Hypothesis: A Review of Theory and Empirical Work, Jornal of Finance, Vol. 25, pp. 383-417 (1970).
10) Fama, E. F.: Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices, Basic Books, Inc., Publishers, New York (1976).
11) Fama, E. F. and Blume, M. E.: Filter Rules and Stock-Market Trading, Journal of Business, Vol. 39, pp. 226-241 (1966).
12) Fama, E. F. and French, M. E.: Dividend Yields and Expected Stock Returns, Journal of Financial Economics, Vol. 2, pp. 3-25 (1988).
13) Greene, M. T. and Fielitz, B. D.: Long-Term Dependence in Common Stock Returns, Journal of Financial Economics, Vol. 4, pp. 339-349 (1977).
14) Guimaraes, R. M. C., Kingsman, B. G. and Taylor, S. J. (Eds.): A Reappraisal of Efficiency of Financial Market, Springer Verlag, Berlin (1989).
15) 岸本一男：日本の株式市場の非効率性に関する実証テスト，in 柴川林也編著：資本市場の革新と財務戦略，同文館，pp. 195-208 (1991).
16) 岸本一男：時系列データ解析の一方法，シミュレーション，Vol. 10, pp. 270-276 (1991).
17) 岸本一男：証券価格の時系列データにフィルタールールを適用した場合の収益値のバイアスの原因について，日本応用数理学会平成3年度年会研究発表予稿集，pp. 21-22 (1991).

18) Kishimoto, K.: A New Approach for Testing the Randomness of Heteroscedastic Time Series Data, submitted for publication.
19) Konno, H.: Piecewise Linear Risk Functions and Portfolio Optimization, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol. 33, pp. 139-156 (1990).
20) Konno, H. and Yamazaki, H.: A Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimazation Model and Its Application to Tokyo Stock Market, Management Science, Vol. 37, pp. 519-531 (1991).
21) 今野 浩, 白川 浩：平均-絶対偏差資本市場における均衡理論, 日本応用数理学会平成3年度年会研究発表予稿集, pp. 29-30 (1991).
22) Linter, J.: The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Assets, Review of Economics and Statistics, Vol. 47, pp. 13-47 (1965).
23) Mandelbrot, B.: The Variation of Certains Speculative Prices, Journal of Business, Vol. 36, pp. 394-419 (1963).
24) Mandelbrot, B.: The Variation of Some Other Speculative Prices, Journal of Business, Vol. 40, pp. 393-413 (1967).
25) Mandelbrot, B. B.: When can price be arbitraged efficiently? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models, Review of Economics and Statistics, Vol. 53, pp. 225-236 (1971).
26) Markowitz, H. M.: Portfolio Selection, Yale University Press, New Haven (1959).
27) Mossion, J.: Equilibrium in a Capital Asset Market, Econometrica, Vol. 34, pp. 768-783 (1966).
28) Poterba, J. M. and Summers, L. H.: Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications, Journal of Financial Economics, Vol. 22, pp. 27-55 (1988).
29) Roll, R.: A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests: Part I: ON Past and Potential Testability of the Theory, Journal of Financial Economics, Vol. 4, pp. 129-176 (1977).
30) Ross, S.: Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, Journal of Economic Theory, Vol. 13, pp. 341-360 (1976).
31) Sharp, W. F.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance, Vol. 19, pp. 425-442 (1964).
32) Taylor, S. J.: Modelling Financial Time Series, John Wiley & Sons: New York (1986).
33) Tobin, J.: 1958, Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, Review of Economic Studies, Vol. 25, pp. 65-86 (1958).

(平成4年8月5日受付)



岸本 一男（正会員）

1952年生. 1975年東京大学工学部計数工学科卒業. 1980年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了. 工学博士. 広島大学工学部第2類(電気系)助手, 筑波大学社会工学系講師を経て, 現在同助教授. 各種現象への数理工学的アプローチに関心をもっている. 日本応用数理学会, 電子情報通信学会, 日本オペレーションズリサーチ学会など各会員.