

木構造フィルタバンクを用いた 高速3次元逆Radon変換

溝脇一成[†]

村上純一^{††}

森川良孝[†]

[†]岡山大学 工学部
^{††} 詫間電波工業高等学校

700-8530 岡山市津島中 3-1-1

Phone. 086-251-8128

E-mail. mizowaki@trans.cnc.okayama-u.ac.jp

あらまし 2次元 X線 CT の断層像再構成において、データ収集は2次元画像信号を複数の投影方向に線積分する操作である。この操作は2次元 Radon 変換 (Radon Transform; 略して RT) に対応し、したがって、断層像再構成はこの逆変換となる。一般に、2次元逆 Radon 変換 (Inverse Radon Transform; 略して IRT) の実装として畳み込み-逆投影 (Convolution Backprojection; 略して CB) アルゴリズムが用いられている。筆者らは、すでに CB 法の逆投影操作部に木構造フィルタバンクを用いることにより再構成時間を短縮する手法を提案した。本稿では、この手法を3次元 IRT に拡張することを提案し、高速化できることを示す。シミュレーション結果によれば、 $256 \times 256 \times 256$ 画素の立体像の再構成において、本提案法は IRT 法を直接適用することに比べ約 760 倍の高速化を実現することができた。

キーワード CT, 木構造フィルタバンク, Radon 変換, 高速アルゴリズム

Fast Three Dimensional Inverse Radon Transform by Using Tree-structured Filter Bank

Kazunari MIZOWAKI[†]

Junichi MURAKAMI^{††}

Yoshitaka MORIKAWA[†]

[†]Faculty of Engineering, OKAYAMA University

^{††}TAKUMA National Colleg of Technology

3-1-1 Tsushima-naka, Okayama-shi 700-8530, Japan

Phone. (+81)86-251-8128

E-mail. mizowaki@trans.cnc.okayama-u.ac.jp

Abstract In reconstructing cross-sectional images of 2D(2-dimensional) X-ray CT, a data acquisition is a line integral operation along a projection's direction. This operation is equivalent to the Radon transform(RT), hence the reconstructing cross-sectional images is equivalent to this inverse transform. Generally, the convolution backprojection(CB) algorithm has been used for realiging 2D inverse Radon transform(IRT). The authors proposed the method to shorten reconstructing time by using TFB for the backprojection-part. In this paper, we expand the TFB method to 3D-IRT, and show that this technique is very effective for time saving. The application to 3D-IRT realized that the reconstructing speed of TFB method was approximately about 760 times faster than that of IRT method.

key words CT, Tree-structured filter bank, Radon transform, Fast algorithm

1. はじめに

人体内部を非破壊・非侵襲的に観測する X 線コンピュータ断層撮影 (Computer Tomography; 略して CT) 装置の普及は目覚ましく、現在では、3 次元画像として再構成する 3 次元 CT が普及しつつある。しかし、X 線の照射から再構成画像を得るまでに、計算時間が多大であることが障害となっている。再構成の処理を高速化することができれば、X 線 CT は集団検診などさまざまな診断に取り入れられ、病気の早期発見や原因究明に役立つことが期待される。

一般に、 n 次元空間のスカラー関数を複数の法線方向に沿う 1 次元信号に積分する変換を Radon 変換 (Radon Transform; 略して RT) と呼ぶ。2 次元 CT において、データ収集は 2 次元 RT に対応し、断層像再構成は 2 次元逆変換 (Inverse Radon Transform; 略して IRT) に対応する。2 次元 IRT による再構成は RT により得られた 1 次元信号のそれぞれに高域強調処理を施す畳み込み操作と、再生 2 次元面に逆投影する操作からなっており、畳み込み-逆投影 (Convolution Backprojection; 略して CB) アルゴリズムとして現行の商用 2 次元 CT 装置に実装されている。筆者らは CB 法の逆投影操作部に木構造フィルタバンク (Tree-structured Filter Bank; 略して TFB) を用いることにより再構成処理時間を約 1/10 に短縮する手法を提案した [1]。

3 次元 CT においては、X 線源と透過 X 線量を 2 次元信号とする観測面を被写体の周りに回転させて情報を収集し、この観測データから 3 次元濃度分布を計算機内に再構成することとなる。データ収集法としてはヘリカルスキャン方式や直交 2 重スキャン方式が提案されている [2]。これらの再構成の原理は 3 次元 IRT であり、観測データを 3 次元 RT データに並べ替える方式が検討されている [2]。本稿では 2 次元 TFB 法を 3 次元に拡張した 3 次元 TFB 法を提案し、3 次元 IRT を高速化できることを示す。また、シミュレーション結果より、 $256 \times 256 \times 256$ 画素の画像再構成において、IRT を直接適用することに比べ約 760 倍の高速化を達成できることを示す。

以下では、まず、2. において 3 次元 RT と IRT について説明する。次に、3. において、TFB 法による高速化法を説明し、その後、シミュレーションにより IRT 法と TFB 法の再構成時間を比較する。

2. 3 次元 Radon 変換とその逆変換

本章では、まず、3 次元 RT について説明し、次に“投影切断定理”について述べ、最後に、IRT について説明する。

2.1 3 次元 Radon 変換

3 次元空間内の濃度分布 $f(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} = (x, y, z)^T$) に対して、法線ベクトルを $\Theta = (\cos \theta_0 \sin \theta_1, \sin \theta_0 \sin \theta_1, \cos \theta_1)^T$ とすると、原点から距離 t の平面 ($t = \mathbf{r} \cdot \Theta$; \cdot はベクトル

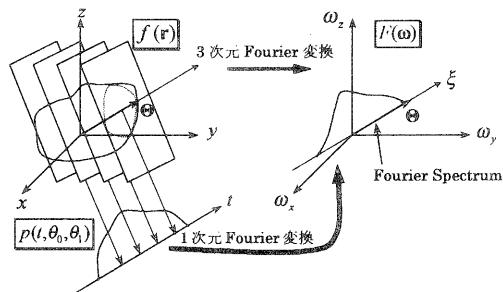


図 1: 3 次元投影切断定理

内積を示す) 上の平面積分値は次式で表される。

$$p(t, \theta_0, \theta_1) = \int f(\mathbf{r}) \delta(t - \mathbf{r} \cdot \Theta) d\mathbf{r} \quad (1)$$

ただし $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。3 次元信号 $f(\mathbf{r})$ から 1 次元信号 $p(t, \theta_0, \theta_1)$ への上式の変換をあらゆる Θ 方向に対して実行することを 3 次元 Radon 変換と呼び、各 1 次元信号 $p(t, \theta_0, \theta_1)$ を投影信号と呼ぶ。

2.2 3 次元投影切断定理

$f(\mathbf{r})$ の 3 次元 Fourier 変換 $F(\omega)$ ($\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$) の $\omega = \mathbf{0}$ を通る Θ 方向の直線上の値 $F(\xi \Theta)$ は、 $p(t, \theta_0, \theta_1)$ の t に関する 1 次元 Fourier 変換 $P(\xi, \theta_0, \theta_1)$ に一致し、次式が成立する。

$$F(\xi \Theta) = P(\xi, \theta_0, \theta_1) \quad (2)$$

$$\xi \Theta = (\xi \cos \theta_0 \sin \theta_1, \xi \sin \theta_0 \sin \theta_1, \xi \cos \theta_1)^T$$

この性質は 3 次元の“投影切断定理”と呼ばれている。図 1 は式 (2) の説明図である。以下では $F(\xi \Theta)$ で示されるスペクトルを“Fourier スペクトル”と呼ぶ。

2.3 3 次元逆 Radon 変換

式 (1) に対する逆変換公式は次式で与えられる [2]。

$$f(\mathbf{r}) = \int \left[-\nabla^2 p(t, \theta_0, \theta_1) \right]_{t=\mathbf{r} \cdot \Theta} d\Omega$$

$$= \int q(\mathbf{r} \cdot \Theta, \theta_0, \theta_1) d\Omega \quad (3)$$

ただし ∇^2 は t に関する 2 階微分演算を表し、 Ω は立体角である。また $-\nabla^2 p(t, \theta_0, \theta_1)$ を $q(t, \theta_0, \theta_1)$ と置くことにより、上式第 1 式を第 2 式へ書き直している。式 (3) によると、 $q(t, \theta_0, \theta_1)$ を平面 ($t = \mathbf{r} \cdot \Theta$) 上に値を複写する“逆投影操作”をあらゆる Θ 方向において実行し、その結果を重ね合わせることで、原信号 $f(\mathbf{r})$ を再構成することができる。この操作は xyz 空間の全ての格子点で計算しなければならないため、3.5 で述べるように多大な計算回数を必要とする。

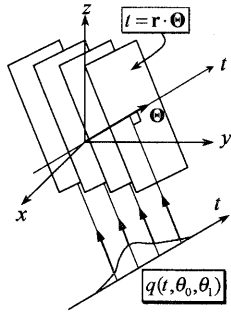


図 2: 逆投影

投影切断定理よれば、2.1 の Radon 変換は原信号 $f(\mathbf{r})$ を Fourier スペクトルと等価な信号へ分解する変換と解釈でき、また、その逆変換は分解されたスペクトルを合成して原信号を得る変換であると解釈できる。以下では、Fourier スペクトルを合成する方法として、フィルタバンクによる再構成法を示す。

3. フィルタバンクを用いた高速化法

本章では、まず、3次元 RT における積分操作に等価な狭帯域低域通過フィルタについて述べ、RT と IRT はフィルタバンクの分析・合成過程とみなせることを説明する。最後に、フィルタバンクを用いた高速再構成法について説明する。

3.1 狭帯域低域通過フィルタ

ある方向 Θ の投影信号 $p(t, \theta_0, \theta_1)$ をそのまま逆投影し、格子点 $\mathbf{n}(\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2)^T$ は整数ベクトル) でサンプリングした信号を $g_{\Theta}[\mathbf{n}]$ とおくと、次式で表される。

$$\begin{aligned} g_{\Theta}[\mathbf{n}] &= p(\mathbf{n} \cdot \Theta, \theta_0, \theta_1) \\ &= \int f(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r} - \mathbf{n}) \cdot \Theta) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4)$$

次に、原信号 $f(\mathbf{r})$ を格子点 \mathbf{n} でサンプリングした信号 $f[\mathbf{n}]$ に理想内挿関数 $\psi(\mathbf{r})$ を畳み込むことにより、次式のように $f(\mathbf{r})$ を表すことができる。

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} f[\mathbf{n}] \psi(\mathbf{r} - \mathbf{n}) \quad (5)$$

式 (4) に式 (5) を代入して $g_{\Theta}[\mathbf{n}]$ を $f(\mathbf{r})$ を用いて表すと次式となる。

$$\begin{aligned} g_{\Theta}[\mathbf{n}] &= \int \sum_{\mathbf{k}} f[\mathbf{k}] \psi(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \delta((\mathbf{r} - \mathbf{n}) \cdot \Theta) d\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} f[\mathbf{k}] \left[\int \psi(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r} + \mathbf{k} - \mathbf{n}) \cdot \Theta) d\mathbf{r} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} f[\mathbf{k}] h_{\Theta}[\mathbf{n} - \mathbf{k}] \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{k} = (k_0, k_1, k_2)^T$ は整数ベクトルであり、上式第 1 式から第 2 式への変形は $\mathbf{r} - \mathbf{k}$ を \mathbf{r} と変数変換している。また、最終式では次式のようにおいている。

$$h_{\Theta}[\mathbf{n}] = \int \psi(\mathbf{r}) \delta((\mathbf{r} - \mathbf{n}) \cdot \Theta) d\mathbf{r} \quad (7)$$

上式を式 (4) と比較すれば、上式は理想内挿関数 $\psi(\mathbf{r})$ を Θ 方向に投影し、続いて Θ 方向に逆投影した後、格子点 \mathbf{n} でサンプリングしたものと解釈される。周波数領域において $\psi(\mathbf{r})$ は半径 π の球内で一定値を示し、その領域以外では 0 となる関数である。投影切断定理によれば、 Θ 方向に投影・逆投影した信号 $h_{\Theta}[\mathbf{n}]$ は周波数空間において、原点を通る Θ 方向の直線上の値に等しい。すなわち、 $h_{\Theta}[\mathbf{n}]$ は Θ 方向に通過特性を持つ無限に狭い帯域の低域通過フィルタである。したがって、原信号 $f(\mathbf{r})$ を Θ 方向に投影し、逆投影した信号を格子点 \mathbf{n} でサンプリングした信号は、原信号をサンプリングした信号 $f[\mathbf{n}]$ に低域通過フィルタ $h_{\Theta}[\mathbf{n}]$ を施したものに等価である。

3.2 フィルタバンクによる再構成

図 3 に一般のフィルタバンクシステム^[3]を示す。図中 $L_k(\mathbf{z})(k = 0, 1, \dots, K-1)$ は入力信号 $F(\mathbf{z})$ を K 個の帯域に分割するためのフィルタであり、 $G_k(\mathbf{z})(k = 0, 1, \dots, K-1)$ は因子 K でのダウンサンプリングとアップサンプリングの結果生じたイメージスペクトルを抑圧し、合成するためのフィルタである。3.1 で述べたように、原信号 $f(\mathbf{r})$ を Θ 方向に投影し、逆投影した信号を格子点 \mathbf{n} でサンプリングした信号は、原信号をサンプリングした信号 $f[\mathbf{n}]$ に低域通過フィルタ $h_{\Theta}[\mathbf{n}]$ を施したものに等価である。この低域通過フィルタを $L_k(\mathbf{z})$ とし、 k により Θ を変化させれば、図 3 の $L_k(\mathbf{z})$ は方向性の低域通過フィルタであるとみなすことができる。さらに、このようなフィルタが施された信号は 1 次元信号と変わりはなく、どのようにダウンサンプリングしてもスペクトルの重複がない。すなわち、図 3 中のダウンサンプリング因子 K は任意に設定してもよい。結局、CT におけるデータ収集過程は図 3 の分析過程と同一視することが可能であり、したがって、サブバンドシステムの合成過程により原信号を

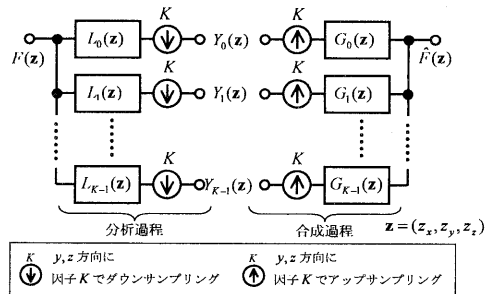


図 3: フィルタバンクシステム

再構成することができ、逆 Radon 変換を再サンプリング操作と合成過程による合成操作とみなすことができる。

3.3 ダウン/アップサンプリング

図3のフィルタ $G_k(\mathbf{z})$ がどのようなフィルタであるのかを述べるために、ダウン/アップサンプリングによるスペクトルの変化について、2次元の場合を例にとって説明する。図4は輝線状のスペクトル(図の太い実線)をもつ 16×16 画素の2次元信号列を、 y 方向に因子 $K=8$ でダウン/アップサンプリングする場合に、実空間と周波数空間での信号の変化を示している。

まず実空間では、因子8のダウンサンプリングは、●で示す標本だけを残し、同図中央上段に示すように残りの標本を取り去る操作となる。次に、因子8のアップサンプリングは、ダウンサンプリングのときに取り去った格子点に0値を挿入し、元と同じサイズの信号列に戻す操作となる(図4右端上段参照)。次に周波数空間では、まず、ダウンサンプリングにより Fourier スペクトルが ω_y 方向に8倍に引き伸ばされ、隣の帯域からのスペクトルが入り込み、実線のスペクトルが何本も現れる(図4中央参照)。しかし、それと同時に折り返し成分が生じるため、図の点線で示すスペクトルが生じる。次に、アップサンプリングすることにより、図中の太い実線で示す Fourier スペクトルの形状は元に戻るが、同図右端下段に破線で示すように折り返し成分からなるイメージスペクトルが生じる。

輝線状のスペクトルをもつ信号がダウン/アップサンプリング操作によりイメージスペクトルが生じることは、図3に示す3次元の場合も同様である。このイメージスペクトルを抑圧するために Fourier スペクトルに沿った狭帯域の低域通過フィルタ $G_k(\mathbf{z})$ を施す必要がある。

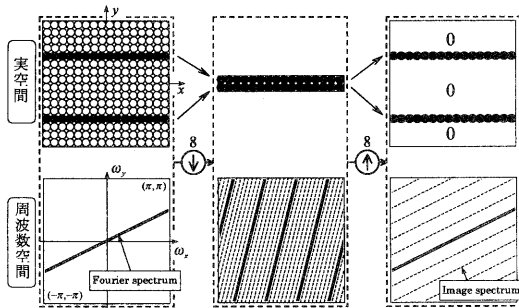


図4: 因子8でダウン/アップサンプリング

3.4 3次元再構成フィルタ

フィルタバンクを用いる再構成ではダウン/アップサンプリングにより生じたイメージスペクトルを抑圧するフィルタ $G_k(\mathbf{z})$ が必要である。ここでは、このフィルタの実現方法を示す。3次元再構成の場合には図5(a)に示すように、Fourier スペクトルに沿った狭帯域の低域通過フィ

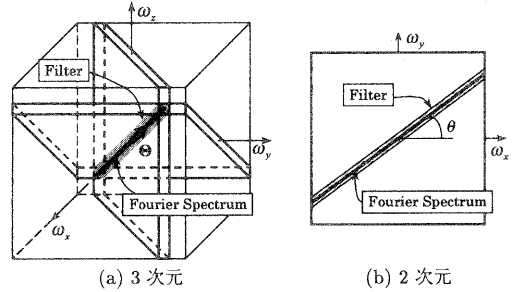


図5: 再構成フィルタ

ルタが必要となる。このフィルタは図5(b)に示す2次元フィルタの積として表される。まず、 ω_y 方向に垂直な面の2次元信号に対して、この2次元フィルタを随時施す。次に、 ω_x 方向にも同様に2次元フィルタを随時施す。以上の操作により、それらの共通部分(図5(a)の影の部分)を通過させるフィルタが実現できる。

3.5 木構造フィルタバンクによる高速化

本節では図3に示したフィルタバンクについて、まず、再サンプリング操作による合成過程への入力信号 $Y_k(\mathbf{z})$ の作成について説明し、次に、合成過程を木状の構成とすることにより高速化できることを述べる。

図6に示すように、 $16 \times 16 \times 16$ 個の信号列に対して y, z 方向にそれぞれ因子8でダウンサンプリングをする場合を例として説明する。因子8のダウンサンプリングでは、図6の●で示す $4 (= 2^2)$ 本の信号列だけを残し $Y_k(\mathbf{z})$ とし、他は取り去る。すなわち、逆投影計算を行う信号はこの4本だけとなる。

次に、再サンプリング操作において計算しなかった格子点に対しては図3のフィルタバンクの合成過程により内挿する。この処理を木状の構造を持つ木構造フィルタバンクに置き替えることにより高速に処理を行うことができる。図7は、図中 BAND-1~BAND-4 の4つの帯域のスペクトルに対応する狭帯域低域通過フィルタが木構造フィルタバンクにおいてどのように実現されているかを表して

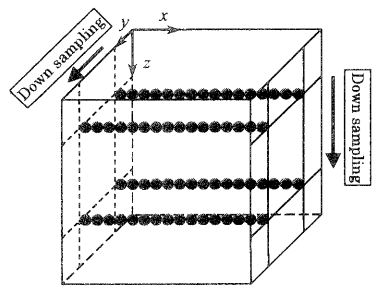


図6: ダウンサンプリング

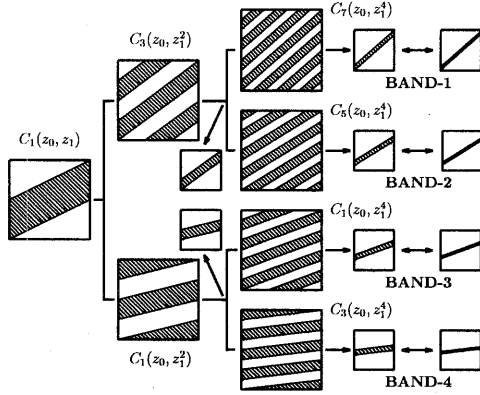


図 7: 各帯域の狭帯域低域通過フィルタ

いる。図中の斜線はフィルタ $C_\ell(z_0, z_1)$ ($\ell = 1, 3, 7$) の通過領域を表しており、小さい四角はその時点での通過特性を示している。図より右の狭帯域低域通過フィルタが、左から順に積を取ることで実現される。例えば、BAND-1 の通過特性は $C_1(z_0, z_1) \times C_3(z_0, z_1^2) \times C_7(z_0, z_1^4)$ により得られる。このように共通な因子を抽出し、まとめて処理を行うことにより高速に処理を行うことができる。提案する 3 次元 TFB 法では周波数空間を式 (8) に示す合同な 3 領域 P_1, P_2, P_3 に分け、それぞれに同様の処理を施す。

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left\{ -\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 < \frac{\pi}{4} \right\} \\
 P_2 &= \left\{ \frac{\pi}{4} \leq \theta_0 < \frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 < \frac{\pi}{4} \right\} \\
 P_3 &= \left\{ -\pi \leq \theta_0 < \pi, \frac{\pi}{4} \leq \theta_1 < \frac{3}{4}\pi \right\}
 \end{aligned} \quad (8)$$

以下で述べる計算ステップは、領域 P_1 は y, z 2 方向、領域 P_2 は z, x 2 方向、領域 P_3 は x, y 2 方向の再構成にそれぞれ対応している。3 次元 TFB 法の計算ステップは以下の 4 ステップにより構成される。

- Step-1 すべての投影信号 $p(t, \theta_0, \theta_1)$ に対して、 t に関する 2 階微分演算を行い、 $q(t, \theta_0, \theta_1)$ を求める。
- Step-2 各領域に応じたダウンサンプリング点でのみ逆投影操作を行い、TFB への入力信号を作成する。
- Step-3 TFB による再構成を P_1, P_2, P_3 のそれぞれに対して行う。
- Step-4 Step-3 の結果を足し合わせて 3 次元再構成像とする。

最後に、提案法と 3 次元 IRT 法における演算量の比較を乗算回数について行う。再構成画像サイズを N^3 ($N = 2^M$) とすれば、3 次元 IRT ではすべての格子点において逆投影計算を要するから、乗算回数は N^3 に比例する。提案法では、Step-2 において、ダウンサンプリングにより残る格子点でのみ逆投影計算を行うことから、例えば、ダウ

ンサンプリングの因子 K を $K = 2^{M-2}$ とすれば、乗算回数は N^3/K^2 に比例する。すなわち、乗算回数は、3 次元 IRT に比較して $1/K^2$ 倍となる。次に Step-3 の TFB による再構成では、 $\log_2 K$ に比例する乗算回数を要する。このため、IRT との比は縮小されるが、結果として、大きな N では高速化を実現できる。

4. シミュレーション

3 次元 IRT による再構成法 (IRT 法) と木構造フィルタバンクを用いた提案法 (TFB 法) によりシミュレーションを行った。実験対象は大小 2 個の楕円体で構成される 3 次元密度分布である (図 8)。表 1 に示した 2 個の楕円体を原点に配置し、小楕円体は各軸の回りに $\pi/4$ 回転した。ただし、表の回転角はそれぞれの軸を中心に右ねじ方向に回した角度である。また、図 9 は $z = 0$ の断面画像を表している。なお、フィルタ $C_\ell(z_0, z_1)$ は 2 次元 TFB 法と同様に全域通過フィルタを用いた簡単な零位相低域通過フィルタを用いた^[1]。以上に基づいて、再構成画像を $N \times N \times N$ 画素として、 $N = 32, 64, 128, 256$ について再構成を行った。 $N = 256$ のとき、IRT 法及び TFB 法の再構成画像をそれぞれ図 10 及び図 11 に示す。また、図に示した信号対雑音比 (SNR) は対象信号の半径 0.8 の円内について次式で計算した。

$$\text{SNR} \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{256 \times 256}{\text{平均二乗誤差}} \right) \quad (9)$$

図 10 と図 11 の比較によれば、SNR の差が 0.04 [dB] で

表 1: 楕円体

楕円体	軸方向の半径	回転角 [rad]	輝度値
Oval-1	(0.8, 0.8, 0.8)	(0, 0, 0)	192
Oval-2	(0, 2, 0.5, 0.8)	($\pi/4, \pi/4, \pi/4$)	-64

() 内はそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の順に対応している。

あることから、TFB 法は IRT 法とほぼ同等の再構成画像を得ている。しかし、TFB 法では対象物体周辺部の値 0 である部分において、縞状のアーティファクトが生じてい

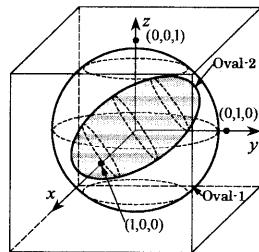


図 8: 実験対象

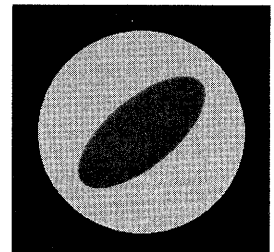


図 9: 原画像

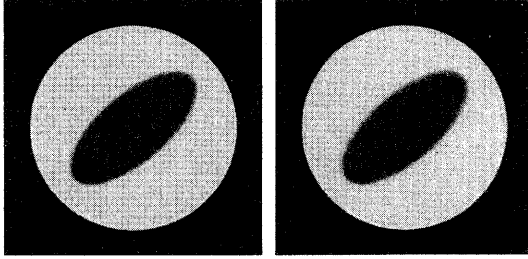


図 10: IRT 法による再構成画像 (SNR:27.42[dB]) 図 11: TFB 法による再構成画像 (SNR:27.38[dB])

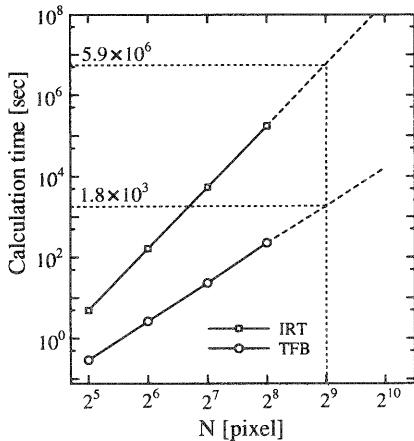


図 12: N に対する計算時間の変化

る。これはフィルタの境界値処理の仕方により変化する量である。

次に、計算時間の測定結果を表 2 に示す。表 2 によ

表 2: 計算時間の比較 (CPU:Pentium III,800MHz)

N	IRT 法	TFB 法	IRT/TFB
32	4.9[s]	0.29[s]	17
64	2.8[m]	2.6[s]	64
128	1.5[h]	23.2[s]	232
256	2.0[d]	3.8[m]	759

れば、 $N = 256$ において約 760 倍の高速化を実現している。また、表 2 をグラフ化して図 12 に示す。図 12 より、計算時間とメモリー量の制限から計算できなかった $N = 512 = 2^9$ の場合について推定すると、IRT 法の計算時間は 5.9×10^6 [s] (約 2ヶ月)、TFB 法は 1.8×10^3 [s] (約 30分) となり約 3200 倍の高速化が期待できる。

5. まとめ

本稿では、木構造フィルタバンクを用いることにより、3次元逆Radon変換を高速化する手法を提案した。シミュレーションの結果、画像サイズが 256^3 では約 760 倍の高速化を確認した。また、 512^3 における高速化は推定値約 3200 倍であるとの知見を得た。

本手法は、並べ替え処理による投影信号の 3 次元 RT データへの変換により、高速で被爆量の少ない円錐ビーム投影に適用可能であることが期待される。今後の課題は、本 3 次元 TFB 法を円錐ビーム投影に適用することである。

参考文献

- [1] 村上純一, 溝脇一成, 森川良孝: “木構造フィルタバンクを用いた CT の再構成アルゴリズム”, 第 22 回情報理論とその応用シンポジウム, vol.1, pp.137-140, 1999.
- [2] 斎藤恒雄: “画像処理アルゴリズム”, 近代科学社, 1998.
- [3] P.P.Vaidyanathan: “Multirate Systems And Filter Banks”, Prentice Hall, 1993.