

FIFを用いた一次元離散信号の拡大処理に関する考察

上村 郷志[†] 長谷山美紀[†] 北島 秀夫[†]

[†]北海道大学大学院 工学研究科

〒060-8628 札幌市北区北13条8丁目

TEL: (011)706-7369

E-mail: †{uemura,mikich,kitajima}@media.eng.hokudai.ac.jp

あらまし フラクタルモデルの1つである Fractal Interpolation Functions (FIF) を用いた一次元離散信号の拡大手法を提案する。FIFを用いて離散信号を表現する際には、対象となる信号ごとに設定される *inverse problem* と呼ばれる問題を解くことによって、必要なパラメータを決定しなければならない。しかしながら、拡大処理後の信号は補間されるべき未知のデータ点を含むため、その *inverse problem* を解くことは困難である。そこで、本文では、与えられた信号に関する *inverse problem* の解を用いることで、拡大処理後の信号に関する *inverse problem* を容易に解くことが可能であることを示す。これにより、与えられた離散信号に対する任意の倍率での拡大処理を容易に実現することが可能となる。

キーワード FIF, フラクタル, 補間, 拡大処理, 離散信号

A Novel Expansion Technique for One-Dimensional Discrete Signals Using Fractal Interpolation Functions

Satoshi UEMURA[†], Miki HASEYAMA[†], and Hideo KITAJIMA[†]

[†] Graduate School of Engineering, Hokkaido University

Kita-ku, Kita-13 Nishi-8, Sapporo, 060-8628 Japan

TEL: +81-11-706-7369

E-mail: †{uemura,mikich,kitajima}@media.eng.hokudai.ac.jp

Abstract This paper presents a novel expansion technique for one-dimensional discrete signals derived by using Fractal Interpolation Functions (FIF) known as one of the fractal models. When FIF is applied to a given discrete signal, the map parameters, which are required to represent the signal in FIF, must be determined by solving the *inverse problem* set as depending on the signal. However, the inverse problem concerned with the expanded signal cannot be easily solved, since the expanded signal includes unknown data points which must be interpolated. Therefore we demonstrate that the inverse problem concerned with the expanded signal can be easily solved by using the map parameters obtained by solving the problem of the given signal and thereby a given signal can be efficiently expanded with an arbitrary rate.

Key words FIF, fractal, interpolation, expansion, discrete signal

1. ま え が き

離散信号に対する補間処理は、信号の再構成あるいは画像の拡大処理等、様々な応用を含むことから、信号処理及び画像処理分野における重要な要素技術の1つであると言える。そのような補間処理の応用の1つである、離散信号の拡大処理は、サンプリングレートを変換することにより、データ取得時のサンプリングによって失われたデータ点を獲得することと等価である。また、その際、一度失われた高周波成分を何らかの方法により推定する必要がある。従来、離散信号のサンプリングレートを変更する際には、sinc interpolation [1] が広く用いられてきた。sinc interpolation では、まず、与えられた信号に対して、適当な数のゼロを挿入し、さらに sinc 関数との畳み込みによりサ

ンプリングレートを変更する。しかしながら、ある信号と sinc 関数との畳み込みは、その信号に対して低域フィルタを施すことと等価であり、この処理により、失われた高周波成分を獲得することは困難である。

この問題に対して、我々は、フラクタルモデルの1つであり、一次元離散信号を表現する際に用いられる Fractal Interpolation Functions (FIF) [2] に注目した。FIF は、その優れた補間能力から、信号及び画像処理分野における様々な補間問題に適用されており [3]~[8]、対象となる信号が自己相似性 [9] あるいは自己アフィン [10] と呼ばれる特性を有している場合、ラグランジュ多項式、スプライン関数、自己回帰モデル等の線形モデルに比べて、有効であることが報告されている [6]。

FIFを用いて対象となる信号を表現する際には、*inverse prob-*

lem と呼ばれる問題を解くことにより、与えられた信号を表現するために必要となるパラメータを決定しなければならない。これにより得られるパラメータは、近似の精度に大きな影響を及ぼすため、与えられた信号を正確に近似するための inverse problem の解法がこれまでに幾つか提案されている [3]~[6]。対象となる信号が、全て既知のデータ点により構成されている場合、その inverse problem を解くことは比較的容易である。ところが、拡大処理後の信号は、補間されるべき未知のデータ点を含むことから、その inverse problem を解き、信号を表すために必要となるパラメータを獲得することは困難である。

そこで、本文では、与えられた信号に関する inverse problem の解と拡大処理後の信号に関する inverse problem の解の間に単純な関係が存在することを導きだし、その性質を用いて一次元離散信号の拡大処理を実現する。これにより、与えられた離散信号を任意の倍率で拡大処理した信号を容易に獲得することが可能となる。

本文では、まず、2. において、提案手法の基礎となる FIF の概念及び既に提案されている inverse problem の一解法を説明する。次に、3. において、与えられた信号とその拡大処理後の信号に関する inverse problem の解が持つ関係性を導きだし、さらにその性質を用いた一次元離散信号の拡大手法を提案する。4. では、提案手法の有効性を検証するために行った計算機実験を示す。

2. Fractal Interpolation Functions

本章では、フラクタルモデルの 1 つであり、一次元離散信号を表現する際に用いられる Fractal Interpolation Functions (FIF) [2] について説明する。実際に、一次元離散信号 $S = \{(u_n, v_n) : n = 0, 1, \dots, N\}$ が与えられた際の処理手順を以下に示す。ただし、信号 S は次式を満足する 1 価関数で表される信号である。

$$u_0 < u_1 < \dots < u_N \quad (1)$$

まず、信号 S から、 $(M+1)$ 個の代表点 $P = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$ を選択する。ただし、信号 S の両端点は次式に示すように、代表点として無条件に選択するものとする。

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \quad (2)$$

上記 $(M+1)$ 個の代表点を選択することにより、信号 S は M 個の区間に分割される。尚、本文では、連続する 2 つの代表点により定義される区間 $[x_{i-1}, x_i]$ を補間区間 i と呼ぶ。

次に、式 (3) に示すアフィン写像 w_i を適用することで、信号 S を M 個の補間区間にそれぞれ写す。

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

上式において、 w_i は信号 S を補間区間 i に写す縮小写像である。したがって、FIF を適用することで与えられた信号 S は、次式に示すように縮小写像 w_i による自身の縮小像 $w_i(S)$ の和集合として表現されることがわかる。

$$S \approx G = \bigcup_{i=1}^M w_i(S) \quad (4)$$

上式において、 G は IFS のアトラクタと呼ばれている。

ところで、式 (3) において、5 つの未知パラメータ a_i, c_i, d_i, e_i, f_i (以降、写像パラメータと呼ぶ) が存在することがわかる。そこで、式 (3) を実際の信号に適用する際には、次式に示す制約条件を設ける。

$$w_i \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}, \quad w_i \begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

上記制約により、図 1 に示すように、信号 S の端点は補間区間 i の端点に写される。このような制約を設け、さらに 5 つ存在する写像パラメータの内、縮小因子と呼ばれるパラメータ d_i を変数と考えると、他の 4 つの写像パラメータはそれぞれ、以下に示すように表すことができる。

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_M - x_0}, \quad (6)$$

$$e_i = \frac{x_M x_{i-1} - x_0 x_i}{x_M - x_0}, \quad (7)$$

$$c_i = \frac{y_i - y_{i-1} - d_i \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0}}{x_M - x_0}, \quad (8)$$

$$f_i = \frac{x_M y_{i-1} - x_0 y_i}{x_M - x_0} - d_i \frac{x_M y_0 - x_0 y_M}{x_M - x_0}. \quad (9)$$

したがって、FIF を用いて与えられた信号を高精度に表現するためには、代表点及び縮小因子をいかに決定するかという問題が生じる。この問題は FIF における inverse problem と呼ばれており、これまでにその解法が幾つか提案されている [3]~[6]。本文では、文献 [5] において、Mazel らにより提案された手法を用いて inverse problem を解決する。そこで、次節において、その方法を説明する。

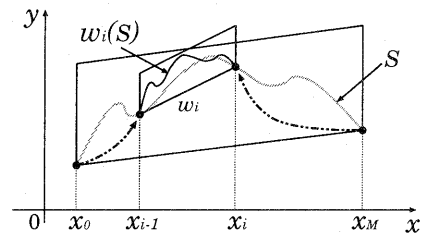


図 1 縮小写像 w_i を適用する際の制約条件。

2.1 inverse problem の解法

先に述べたように、FIF を適用することで、与えられた信号 S は各補間区間に写される。このとき、縮小写像 w_i による信号 S の像 $w_i(S) = \{(p_n, q_n) : n = 0, 1, \dots, N\}$ は、次式に示すように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \cdot u_n + e_i \\ c_i \cdot u_n + d_i \cdot v_n + f_i \end{pmatrix}; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (10)$$

前節で述べたように、FIF を適用する際には、与えられた信号 S を高精度に近似したアトラクタ G をいかに生成するかが問題となるが、この問題は、信号 S の部分集合 $S_{[x_{i-1}, x_i]}$ と縮小像 $w_i(S)$ との誤差を最小化することにより解決できる。ここで、信号 $S_{[x_{i-1}, x_i]}$ と縮小像 $w_i(S)$ の誤差を E_i とすると、 E_i は図 2 に示すように、信号 $S_{[x_{i-1}, x_i]}$ 及び縮小像 $w_i(S)$ を構成するデー

点の垂直方向の距離を足し合わせることで、次式に示すように算出できる。

$$E_i = \sum_{n=0}^N (c_i \cdot u_n + d_i \cdot v_n + f_i - v_m)^2 \quad (11)$$

$$m = [a_i \cdot u_n + e_i + 0.5] \quad (12)$$

尚、式(12)において、 $[\]$ はガウス記号を表す。式(11)に式(8)、(9)をそれぞれ代入し、整理すると次式を得る。

$$E_i = \sum_{n=0}^N (\alpha_n \cdot d_i - \beta_n)^2 \quad (13)$$

$$\alpha_n = v_n - \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} u_n - \frac{x_M y_0 - x_0 y_M}{x_M - x_0} \quad (14)$$

$$\beta_n = v_m - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_M - x_0} u_n - \frac{x_M y_{i-1} - x_0 y_i}{x_M - x_0} \quad (15)$$

次に、式(13)を縮小因子 d_i に関して最小2乗規範に基づき最小化すると、縮小因子 d_i は次式により与えられる。

$$d_i = \frac{\sum_{n=0}^N \alpha_n \beta_n}{\sum_{n=0}^N \alpha_n^2} \quad (16)$$

先に述べたように、縮小因子 d_i の値が決定できれば、残り4つの画像パラメータは一意に定めることができる。したがって、対象となる信号が全て既知のデータ点により構成されている場合、その inverse problem は比較的容易に解くことができる。

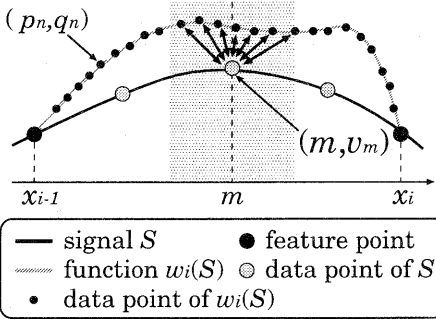


図2 信号 $S|_{[x_{i-1}, x_i]}$ と縮小像 $w_i(S)$ との誤差 E_i の算出

3. FIF を用いた一次元離散信号の拡大手法

前章で述べたように、対象となる信号が全て既知のデータ点により構成されている場合、その inverse problem は比較的容易に解くことができる。しかしながら、拡大処理後の信号は、これから補間されるべき、未知のデータ点を含むことから、その inverse problem を解くことは困難である。

そこで、本章では、まず 3.1 において、拡大処理の前後における画像パラメータの関係を導出し、次に、3.2 において、FIF を用いた一次元離散信号の拡大手法を提案する。

3.1 画像パラメータの関係

本節では、与えられた信号を S 、 S に比べてサンプリングレートが k 倍である信号 (拡大処理後の信号) を $S_k = \{(\hat{u}_n, \hat{v}_n) : n = 0, 1, \dots, kN\}$ とする。ただし、信号 S_k は次式を満足するものとする。

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{kn} \\ \hat{v}_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot u_n \\ k \cdot v_n \end{pmatrix} : n = 0, 1, \dots, N \quad (17)$$

このとき、信号 S_k に関する代表点 (\hat{x}_i, \hat{y}_i) は、次式に示すように、信号 S に関する代表点 (x_i, y_i) を u 軸及び v 軸方向にそれぞれ k 倍した位置に配置することで決定する。

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_i \\ k \cdot y_i \end{pmatrix} : i = 0, 1, \dots, M \quad (18)$$

ここで、信号 S_k に関する画像パラメータを $\hat{a}_i, \hat{c}_i, \hat{d}_i, \hat{e}_i, \hat{f}_i$ とすると、画像パラメータ \hat{a}_i は次式により与えられる。

$$\hat{a}_i = \frac{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}}{\hat{x}_M - \hat{x}_0} \quad (19)$$

上式に式(18)を代入すると次式を得る。

$$\hat{a}_i = \frac{k \cdot x_i - k \cdot x_{i-1}}{k \cdot x_M - k \cdot x_0} \quad (20)$$

$$= a_i \quad (21)$$

上式から、画像パラメータ a_i は拡大処理の前後において不変であることがわかる。他の画像パラメータ e_i, c_i, f_i についても、同様の処理を施すことで、それぞれ以下に示す関係を導くことができる。

$$\hat{e}_i = k \cdot e_i, \quad (22)$$

$$\hat{c}_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_M - x_0} - \hat{d}_i \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} \quad (23)$$

$$= c_i - \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} (\hat{d}_i - d_i), \quad (24)$$

$$\hat{f}_i = k \left\{ \frac{x_M y_{i-1} - x_0 y_i}{x_M - x_0} - \hat{d}_i \frac{x_M y_0 - x_0 y_M}{x_M - x_0} \right\} \quad (25)$$

$$= k \left\{ f_i - \frac{x_M y_0 - x_0 y_M}{x_M - x_0} (\hat{d}_i - d_i) \right\}. \quad (26)$$

ただし、2. で述べたように、画像パラメータ \hat{c}_i 及び \hat{f}_i は縮小因子 \hat{d}_i の関数であることから、現時点において、 \hat{c}_i と c_i 及び \hat{f}_i と f_i の関係を明らかにすることはできない。

そこで、次に、縮小因子について考える。縮小画像 \hat{w}_i による信号 S_k の像を $\hat{w}_i(S_k) = \{(\hat{p}_n, \hat{q}_n) : n = 0, 1, \dots, kN\}$ とすると、 $\hat{w}_i(S_k)$ は以下のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}_i \cdot \hat{u}_n + \hat{e}_i \\ \hat{c}_i \cdot \hat{u}_n + \hat{d}_i \cdot \hat{v}_n + \hat{f}_i \end{pmatrix} : n = 0, 1, \dots, kN \quad (27)$$

したがって、図3(a)に示すように、補間区間 i について、信号 S_k とその縮小像 $\hat{w}_i(S_k)$ との誤差 \hat{E}_i は次式により与えられる。

$$\hat{E}_i = \sum_{n=0}^{kN} (\hat{c}_i \cdot \hat{u}_n + \hat{d}_i \cdot \hat{v}_n + \hat{f}_i - \hat{v}_n)^2, \quad (28)$$

$$\hat{m} = [\hat{a}_i \cdot \hat{u}_n + \hat{e}_i + 0.5]. \quad (29)$$

しかしながら、先に述べたように、信号 S_k は補間されるべき未知のデータ点を含むため、式(28)を用いて誤差 \hat{E}_i を算出することは困難である。そこで、図3(b)に示すように、信号 S_k の内、既知のデータ点のみを用いると、次式に示すように、誤差 \hat{E}_i を近似できる。

$$\hat{E}_i \approx \sum_{n=0}^N (\hat{c}_i \cdot \hat{u}_{kn} + \hat{d}_i \cdot \hat{v}_{kn} + \hat{f}_i - \hat{v}_n)^2, \quad (30)$$

$$\hat{m} = k \cdot \left[\frac{\hat{a}_i \cdot \hat{u}_{kn} + \hat{e}_i}{k} + 0.5 \right]. \quad (31)$$

式(31)に式(17)、(21)、(22)をそれぞれ代入すると次式を得る。

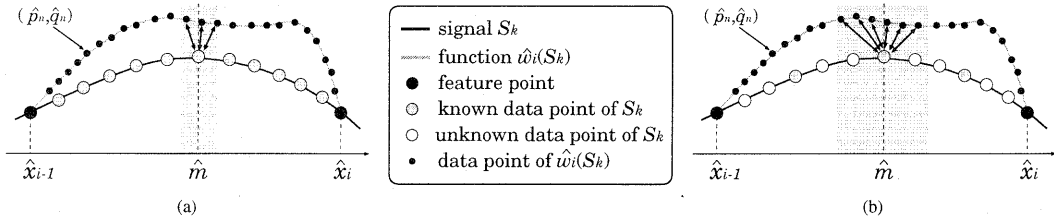


図3 信号 $S_k|_{\{\hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i\}}$ と縮小像 $\hat{w}_i(S_k)$ との誤差 \hat{E}_i の算出: (a) 信号 S_k を構成するデータ点が全て既知の場合, (b) 信号 S_k を構成するデータ点の内, 既知のデータ点のみを用いる場合.

$$\hat{m} = k \cdot m \quad (32)$$

次に, 式 (30) に式 (23), (25), (32) を代入すると, 誤差 \hat{E}_i は以下のように書き表すことができる.

$$\begin{aligned} \hat{E}_i = & \sum_{n=0}^N \left\{ \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_M - x_0} - \hat{d}_i \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} \right) \hat{u}_{kn} + \hat{d}_i \cdot \hat{v}_{kn} \right. \\ & \left. + k \left(\frac{x_M y_{i-1} - x_0 y_i}{x_M - x_0} - \hat{d}_i \frac{x_M y_0 - x_0 y_M}{x_M - x_0} \right) - \hat{v}_{kn} \right\}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

上式に式 (17) を代入し, 整理すると次式を得る.

$$\hat{E}_i = \sum_{n=0}^N k^2 (\alpha_n \cdot \hat{d}_i - \beta_n)^2 \quad (34)$$

ただし, 上式において, α_n, β_n はそれぞれ式 (14), (15) と一致する. 式 (34) を縮小因子 \hat{d}_i に関して, 最小 2 乗規範に基づき最小化すると, 以下に示す d_i と \hat{d}_i の関係式を導くことができる.

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= \frac{\sum_{n=0}^N \alpha_n \beta_n}{\sum_{n=0}^N \alpha_n^2} \\ &= d_i \end{aligned} \quad (35)$$

上式から, 拡大処理の前後において, 縮小因子は不変であることがわかる. そこで, 式 (35) を式 (24), (26) にそれぞれ代入すると, 次式に示す関係式が得られる.

$$\hat{c}_i = c_i \quad (36)$$

$$\hat{f}_i = k \cdot f_i \quad (37)$$

したがって, FIF において 5 つ存在する写像パラメータの内, a_i, c_i, d_i は拡大処理の前後において不変であり, e_i, f_i は, 拡大率 k を乗じることで, 拡大処理後の値を決定することが可能である. この性質を用いて, 与えられた離散信号を拡大処理するための手順を次節で述べる.

3.2 アルゴリズム

本節では, 実際に離散信号 S が与えられた際に, サンプリングレート及び信号値が k 倍である信号 S_k を推定するための処理手順を以下に示す.

[与えられた信号のモデル化]

まず, 与えられた信号に対して, ベクトルトレサ法 [11] を適用することにより, 代表点 $P = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$ を選択する. ベクトルトレサ法では, 選択される代表点の数及びその位置を 3 つのしきい値 (ベクトル長さ L , 鋭角検出 e_1 , 曲線検出 e_2) により制御することができる. ここでは, 与えられた信号をモデル化した際に, その誤差がほぼゼロとなるように,

$L = 1, e_1 = 0.3, e_2 = 0.99$ と設定する. 先に述べたように, 信号 S は全て既知のデータ点から構成されているため, 写像パラメータを決定することは容易である. そこで, 実際に, 式 (6)-(9) 及び式 (16) を用いて写像パラメータ a_i, c_i, d_i, e_i, f_i を決定する.

[拡大信号に関する inverse problem の解決]

上記処理により, 与えられた信号に関する inverse problem は解決された. そこで, 次に拡大処理後の信号 S_k に関する inverse problem を解決する. まず, 信号 S に関する代表点 $P = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$ を u 軸, v 軸方向にそれぞれ k 倍することで, 信号 S_k に関する代表点 $\hat{P} = \{(\hat{x}_i, \hat{y}_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$ を決定する. 次に, 3.1 で述べたように, 拡大信号 S_k に関する写像パラメータ $\hat{a}_i, \hat{c}_i, \hat{d}_i, \hat{e}_i, \hat{f}_i$ を式 (21), (22), (35)-(37) を用いて決定する.

[拡大信号の構成]

次に, フラクタル関数を生成する際に広く用いられている Random Iteration Algorithm (RIA) [10] (付録参照) を適用することにより, 拡大処理後の信号 S_k を近似したアトラクタ G_k を生成する. ここで, $(kN + 1)$ 個のサンプル点から構成されるアトラクタ G_k を生成するためには, RIA において, $(kN + 1)$ 回の反復が必要となる. これにより, 次式に示すアトラクタ G_k が得られる.

$$G_k = \{(\hat{u}_n, \hat{v}_n) : n = 0, 1, \dots, kN\}. \quad (38)$$

上で述べたように, 提案手法では, 与えられた信号に対する拡大率 k が決定されれば, 拡大処理後の信号に関する代表点, 写像パラメータ及び RIA における反復回数等を一意に定めることができる. したがって, 与えられた信号に対する, 任意の拡大率での拡大処理を容易に実現できる.

4. 実験

本章では, 提案手法の有効性を計算機実験により検証した結果を示す. 本実験は以下で述べる方法により行った. データ取得時のサンプリングが施される前の信号, すなわち, 帯域制限されていない信号 S_k を獲得することができれば, 拡大手法を施すことで得られる信号 \hat{S} と信号 S_k とを比較することで, その拡大処理性能を評価することができる. しかしながら, 一般にデータ取得前の信号 S_k を獲得することは困難である. そこで, 本実験では, まず, 対象となる離散信号 S に対してデシメーション [12] を施すことで, S に比べサンプリングレート及びその信号値が $1/k$ 倍である信号 S_{-k} を生成する. 次に, 信号 S_{-k} に対して, 提案手法及び sinc interpolation を適用すること

で、拡大処理後の信号 \hat{S} を生成する^(注1)。信号 S と信号 \hat{S} のサンプリングレートは等しいため、2つの信号を比較することで、拡大処理性能を評価することができる。以上、与えられた信号から拡大処理後の信号を得るまでの手順を図4に示す。

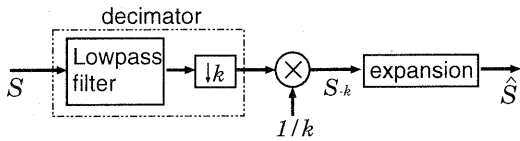


図4 本実験における処理の流れ。

実験には、図5に示す一次元離散信号を用いた。これらの信号に対して、提案手法及び従来手法を適用することで得られた信号を図6に、その拡大処理性能を信号 S と \hat{S} との平均2乗誤差 (MSE) により評価した結果を図7にそれぞれ示す。また、提案手法を適用することにより選択された代表点の数及び信号 S_k をモデル化した際の MSE を表1に示す。図7から、提案手法を適用することにより得られた拡大信号は、従来法を適用することにより得られる拡大信号に比べ、誤差が小さいことがわかる。

ところで、3.2で述べたように、提案手法では、代表点を選択する際に用いるベクトルトレサ法において、3つのしきい値を $L=1, \epsilon_1=0.3, \epsilon_2=0.99$ と設定した。表1において、与えられた信号 S_k を提案手法を用いて表現した場合の誤差がほぼゼロであることから、上記設定は妥当であると言える。

また、拡大処理後の信号 \hat{S} に含まれる周波数成分を確認するために、離散フーリエ変換を施した結果を図8に示す。図8から、sinc interpolation を適用することにより得られた信号には、デシメーションにおける遮断周波数 $\omega_c = \pi/k$ より高い周波数成分が含まれていないことが確認できる。これに対し、提案手法を適用することにより得られた信号は、 ω_c を越える周波数成分が含まれていることが確認できる。

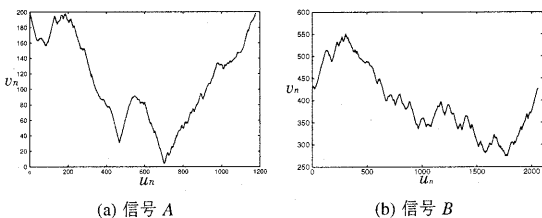


図5 実験に用いた一次元離散信号。

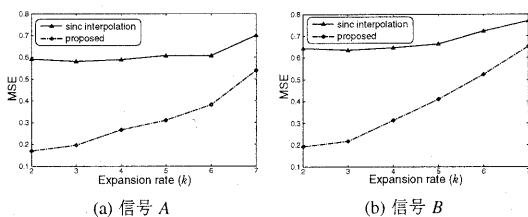
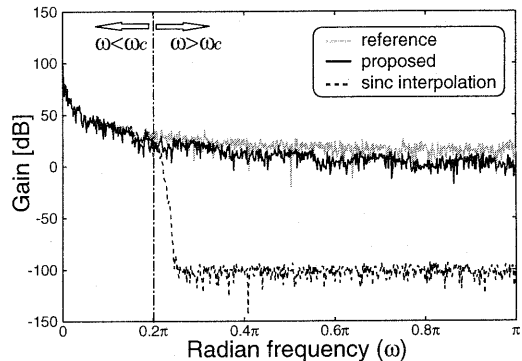


図7 MSE を尺度とした拡大処理性能の評価。

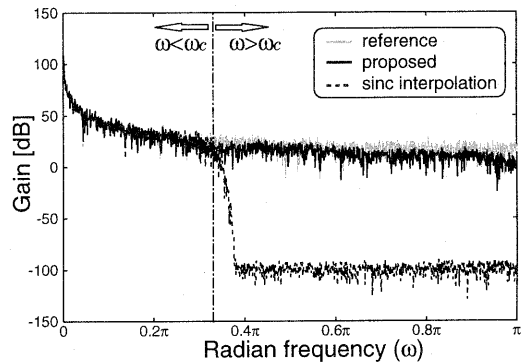
(注1): 提案手法を適用した場合、 $\hat{S} = G_k$ である。

表1 提案手法の適用により選択された代表点の数及び MSE による性能評価。

Rate (k)	信号 A		信号 B	
	代表点の数 (M/N)	MSE	代表点の数 (M/N)	MSE
1	396/1177	0.000	665/2056	0.001
2	323/589	0.005	520/1028	0.002
3	229/393	0.002	364/686	0.004
4	163/295	0.002	301/514	0.004
5	146/236	0.002	250/412	0.003
6	120/197	0.001	219/343	0.002
7	105/169	0.002	180/294	0.002



(a) 信号 A ($k=5$)



(b) 信号 B ($k=3$)

図8 離散フーリエ変換による拡大信号の周波数応答: ω_c はデシメーションにおける遮断周波数を示す。

5. まとめ

本文では、フラクタルモデルの1つである、Fractal Interpolation Functions を一次元離散信号の拡大処理へ応用する手法を提案した。提案手法では、与えられた信号に関する inverse problem を解くことにより得られる画像パラメータを用いて、拡大処理後の信号に関する inverse problem を容易に解くことができることを示し、その性質を用いて拡大処理を実現した。また、計算機実験により、提案手法を適用することにより、一度失われた高周波成分を保持した拡大信号を生成可能であることが示された。今後は、信号処理及び画像処理分野における様々な補間問題に対して、本手法を適用する予定である。

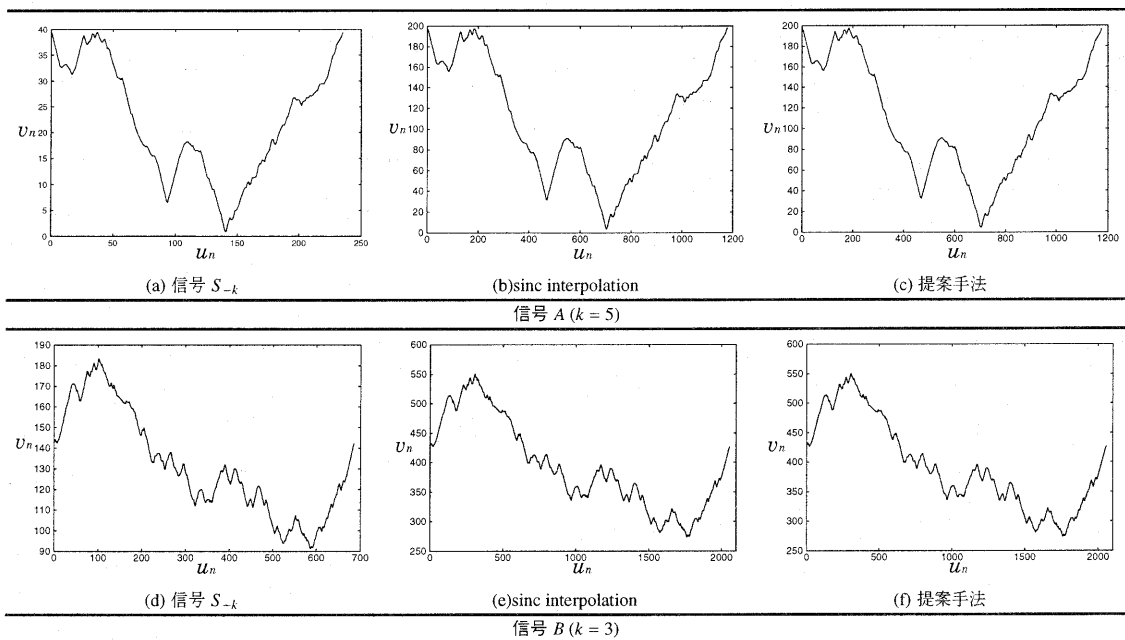


図6 実験結果: (a), (d) デンメーションにより得られた信号 S_{-k} , (b), (e) sinc interpolation による拡大信号, (c), (f) 提案手法による拡大信号.

文 献

- [1] T. Schanze, "Sinc interpolation of discrete periodic signals," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no. 6, pp. 1502-1503, June 1995.
- [2] M. F. Barnsley, "Fractal functions and interpolation," *Constructive Approximation*, vol. 2, pp. 303-329, 1986.
- [3] P. Maragos, "Fractal aspects of speech signals: dimension and interpolation," in *Proc. ICASSP*, vol. 1, pp. 417-420, 1991.
- [4] W. C. Strahle, "Turbulent combustion data analysis using fractals," *AIAA J.*, vol. 29, no. 3, pp. 409-417, Mar. 1991.
- [5] D. S. Mazel and M. H. Hayes, "Using iterated function systems to model discrete sequences," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 7, pp. 1724-1734, July 1992.
- [6] X. Zhu, B. Cheng, and D. M. Titterington, "Fractal model of a one-dimensional discrete signal and its implementation," *IEE Proc. vision image and signal processing*, vol. 141, no. 5, pp. 318-324, Oct. 1994.
- [7] D. S. Mazel and W. N. Sirgany, "Synthesizing missing data points with iterated function systems," in *Proc. IEEE 35th Midwest Symp. Circuits and Systems*, 1992, vol. 1, pp. 583-586.
- [8] Oana I. Craciunescu, Shiva K. Das, Jean M. Poulson, and Thaddeus V. Samulski, "Three-dimensional tumor perfusion reconstruction using fractal interpolation functions," *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, vol. 48, no. 4, pp. 462-473, Apr. 2001.
- [9] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [10] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, New York Academic, 1988.
- [11] 安居院隆, 飯塚久登, 中嶋正之, "ピラミッド階層構造データの位相変化情報を利用した市街地図の処理," *信学論 (D)*, vol. J65-D, no. 10, pp. 1243-1249, Oct 1982.
- [12] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, and John R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing 2nd ed.*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.

付 録

Random Iteration Algorithm

ここでは、FIFにおいて、アトラクタを生成する際に広く用いられている *Random Iteration Algorithm* [10] について説明する。

ただし、ここでは対象となる信号に関する *inverse problem*, すなわち、代表点 $P = \{(x_i, y_i) : i = 0, 1, \dots, M\}$ 及び各補間区間に関する縮小写像 $\{w_i : i = 1, 2, \dots, M\}$ は既知であるものとする。

まず、上記 M 個の縮小写像の中からランダムに1つの写像を選択する。次に任意の代表点 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) を初期値として、 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) に対して選択した写像を施すことで (\bar{x}_1, \bar{y}_1) を得る。さらに、 (\bar{x}_1, \bar{y}_1) に対して、再びランダムに選択された写像を施すことで (\bar{x}_2, \bar{y}_2) を得る。同様の処理を N 回繰り返すことで合計 $(N+1)$ 個のデータ点からなる点列 $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_i) : i = 0, 1, \dots, N\}$ が得られる。その様子を図 A-1 に示す。尚、*Random Iteration Algorithm* を適用することにより得られる点列は、 $N \rightarrow \infty$ のとき IFS のアトラクタに収束することが知られている。したがって、*Random Iteration Algorithm* を適用することにより、代表点及び縮小写像のみを用いてアトラクタを生成可能である。

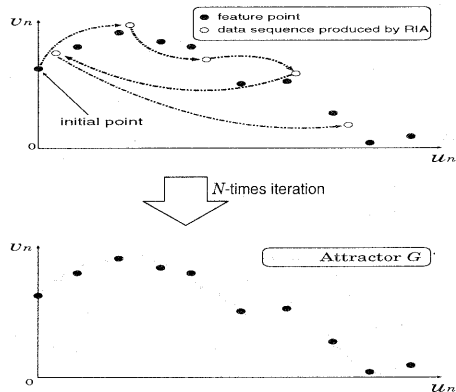


図 A-1 Random Iteration Algorithm によるアトラクタの生成.