解 説

逆計算：計算の理論における逆問題

5. 逆数学と最近の数学基礎論†

田 中 一 之††

1. はじめに

この解説のねらいは，「逆数学」と呼ばれる研究プログラムの周辺に焦点を当てて，現代の数学基礎論において数学の基礎についての研究がどう行われているかみてみようというものである．数学基礎論は数学の基礎についての問題意識から生まれた学問であるが，今日そこで基礎的な問題を直接議論することは稀である．むしろそういう問題意識を積極的に捨象することで数学の一分野としての現代基礎論の立場を確立できたともいえよう．そういった現状に対する反省を踏まえ，ある命題（定理）を論証するのにどれだけの前提（公理）が必要かという基礎論の根本問題を現代的な舞台装置の上で再考しようというのが「逆数学」の主題である．

「逆数学」における中枢的研究は，2階算術という枠組みの中である定理を証明するのにどの程度の集合存在公理が必要になるかを調べるもので，ここ10数年の活発な研究により，いろいろ興味深い結果が得られている．たとえば，解析学の歴史において Cauchy が中間値の定理を証明(?)したのは実数の公理（たとえば Weierstrass の上限に関する公理）が発見される前であったが，「逆数学」の結果によると後者のほうが前者より強い集合存在公理を必要とする．つまり，それは数学史の流れがより高度な集合論を求める方向に進んだと解釈できるであろう．もう1つ関連した話題として，実数列の収束部分列に関する Bolzano-Weierstrass の定理と関数列に関する Arzela-Ascoli の補題の関係がある．解析学の教科書では大抵前者の定理が最初のほうに書かれていて，後者はその一般化のように扱われる．しかし，この二つの定理はほぼ同じころ独立に発見されていて，「逆数学」の結果でも両者は同じ強さの集合存在公理を必要とする．

ここで，2階算術について簡単に説明しておこう．自然数を対象とした理論を1階算術といい，自然数と自然数からなる集合の両者を対象とした理論を2階算術という．2階算術の公理系 Z_2 は，自然数の順序や和積演算に関する1階算術の諸公理と，定義し得るどんな自然数の集まりも“集合”として扱えることを保証する集合存在公理（内包公理）から成り立っている．体系 Z_2 は実数論あるいは解析とも呼ばれ，一般の数学のかなりの部分がそこで展開できることは Hilbert-Bernays の研究[19]以来よく知られているが，この体系の無矛盾性についてはいまだ構成的な（拡張された有限の立場での）証明は見つかっていない．

Z_2 の集合存在公理に種々の制限を付けることによりいろいろな部分体系が得られる．以下の議論において特に重要な体系は（証明能力の）弱いほうから順に，RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π_1^1-CA_0 の5つである．正確な定義は後にまわすが，たとえば RCA_0 は Recursive Comprehension Axiom（再帰的内包公理）の頭文字をとったもので，この体系では再帰的集合の存在のみが保証されている．これら5つの体系の無矛盾性は証明論的にすでに確立したもの（Π_1^1-CA_0 の無矛盾性の証明は竹内外史氏[34]による）と考えられているが，それより本質的に強い集合存在公理をもつ体系の無矛盾性についてはまだ議論が続いている．

1974年ごろ，H Friedman は Z_2 の各部分体系でどれだけの数学が展開できるかを調べ，次のような現象に気付いた[5),6]．

数学の定理の多くは RCA_0 で証明できるか，そうでなければ上にあげた他の4つの体系のど

† Reverse Mathematics and Some Recent Topics in the Foundations of Mathematics by Kazuyuki TANAKA (Mathematical Institute, Faculty of Science, Tohoku University).

†† 東北大学理学部数学科

れかと論理的に同値であることが RCA_0 において証明できる.

このいわゆる逆数学現象に適合する定理の例はそれ以降も S. Simpson を中心とする研究グループによって次々発見され，このあたりの研究が「逆数学」のメインストリームになっている.

他方，逆数学現象に当てはまらない定理もいろいろ発見されている．その中には普通の数学の定理もあるが，とくに興味深いのはこれから述べる組合せ的な命題である．1963 年に選択公理と連続体仮説が ZF 集合論から独立になることが P. Cohen によって証明されたが，ペアノの 1 階算術の公理系に対し，いわゆる自己言及文（“自分は矛盾した体系ではない” という意味の命題）ではなく，数学的に意味をもった独立命題が存在するかどうかは長い間基礎論の研究者の関心の的であった．そんな中 1977 年に Paris と Harrington[23] が Ramsey の定理の 1 変種がその独立命題になることを発見し，ペアノ算術は数学的な意味でも不完全であることが分かった．2 階算術の話に直すと，Paris と Harrington の命題およびそのもとになっている Ramsey の定理（無限形）は，ACA_0 で証明できず ATR_0 なら証明できることになる．その後 80 年代には ATR_0 で証明できない組合せ的命題（例：Kruscal の定理[17]），Π_1^1-CA_0 で証明できない命題（例：Robertson-Seymour の定理[7]）などが H. Friedman らによって次々発見されている.

この解説文の構成について述べておく．次章の **2.** では，2 階算術の諸体系を定義し，それらの基本的な性質について説明する．**3.** では，解析学の導入部を例に「逆数学」の基本的な議論展開をスケッチし，その後「逆数学」の主要結果をリストアップする．**4.** では，組合せ的独立命題の例として「ヘラクレスとヒドラの戦い」[16]を取り上げ，その論理的な強さを図るための基本的な方法や考え方を示し，**5.** でその他の組合せ命題について説明する．**6.** は，全体のまとめと，本文で触れられなかったことなどを簡単に述べ，最後に参考文献をあげる.

2. 2 階算術の諸体系

最初に，2 階算術の言語を定義する．まず原則として，a, b, c, ..., m, n, ... など小文字で自然数の上を動く変数，X, Y, Z, ... など大文字で集合の上の変数を表す．数に関する変数記号と定数記号 0, 1 を，2 項演算記号 +, $\cdot$ および括弧を適当に使って組み合わせたものを項という．たとえば，$(m+1)\cdot((n+1)+1)$ などが項である．t_1 と t_2 を項とするとき，$t_1=t_2$, $t_1<t_2$ あるいは $t_1 \in X$ の形の記号列を原子式と呼ぶ．一般の（論理）式は，原子式から，$\neg$, $\vee$ などの命題演算子と，算術量化記号 $\forall n$, $\exists n$ および集合量化記号 $\forall X$, $\exists X$ を使って組み立てられる．自由変数を含んでいない式は文とも呼ばれる.

式はその形によって次のように分類される．まず，原子式から命題演算子と有界量化記号 $\forall n<t$, $\exists n<t$ だけを使って作られる論理式を有界な式または Π_0^0 式と呼ぶ．ここで，$\forall n<t$ は $\forall n\,(n<t \to \ldots)$，$\exists n<t$ は $\exists n\,(n<t \wedge \ldots)$ の省略形で，t は n を含まない項とする．集合量化記号を含まない式を算術的あるいは Π_0^1 という．φ が Π_j^i 式のとき，$\neg\varphi$ は Σ_j^i 式である．そして，φ が Σ_j^0 式のとき $\forall n_1 \ldots \forall n_k \varphi$ を Π^0_{j+1} 式，φ が Σ_j^1 式のとき $\forall X_1 \ldots \forall X_k \varphi$ を Π^1_{j+1} 式と呼ぶ．（注：上の分類に属さない式も多数ある.）

さて，再帰的内包公理の体系 RCA_0 は次の公理からなる.

（i） 基本算術公理：

$n+1\neq 0,\ n+1=m+1 \to n=m,$

$n+0=n,\ n+(m+1)=(n+m)+1,$

$n\cdot 0=0,\ \ n\cdot(m+1)=n\cdot m+n,$

$0+1=1,\ n<m \leftrightarrow \exists k\,(k\neq 0 \wedge n+k=m).$

（ii） Δ_1^0 内包公理（Δ_1^0-CA）：

$\forall n\,(\varphi(n)\leftrightarrow\psi(n)) \to \exists X \forall n\,(n\in X \leftrightarrow \varphi(n)),$

ただし，$\psi(n)$ は任意の Π_1^0 式，$\varphi(n)$ は Σ_1^0 式で X を自由変数として含まないものとする,

（iii） Σ_1^0 帰納法：任意の Σ_1^0 式 $\varphi(n)$ について，

$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n)$

A を自然数からなるある集合とし，各自然数 n についてそれが A の要素か否かを判定するアルゴリズムがあるとき，A は再帰的 (recursive) であるという．Δ_1^0 内包公理は，標準的な解釈のもとでは（すなわち non-standard な数を含まないモデルの上では）再帰的集合の存在を主張していることになるので，再帰的内包公理とも呼ばれる．荒っぽくいえば，RCA_0 で展開される数学は計算

機が扱える範囲の数学であり，いわゆる計算可能数学[1]の形式化にあたる.（相異点については**6.**を見よ.）

RCA_0 において，0と1の数字からなる有限列を自然数でコーディングし，そのコードの集合を Seq とする．このとき，連接 (concatenation) などの列の基本演算が Seq 上で自然に（つまり primitive recursive function として）コード化できることは暗黙の了解とする．Seq の部分集合Tで，その各要素のすべての接頭部 (initial segment) が再び T の要素となるようなものを木 (tree) と呼ぶ．木Tの部分集合で，それ自身木であって，枝別れのない（つまり，任意の二つの要素に対し必ずどちらか一方が他方の接頭部になる）ものをTの道 (path) という．

以上の定義の下で，Seq の無限部分木が必ず無限長の道をもつという主張を弱ケーニヒの補題 (weak König's lemma) といい，RCA_0 にこれを公理として加えたものが体系 WKL_0 である．WKL_0 では，RCA_0 において証明できない実閉区間 [0,1] のコンパクト性 (Heine-Borel の定理) などがいえ，そこで展開される数学は RCA_0 上のものに比べてずっと豊かになる．にもかかわらず，証明論的には，つまり無矛盾性に関して，これら二つの体系は同等である[37]．

公理系 ACA_0 は RCA_0 に次の算術的内包公理 (arithmetical comprehention axiom) を加えたものである：

$$\exists X \forall n\ (n \in X \leftrightarrow \varphi(n)),$$

ただし，$\varphi(n)$ は Π_0^1 式で，X を自由変数としてもたないものとする．このとき，$\varphi(n)$ を Π_1^0 式または Σ_1^0 式に制限しても体系の強さは変わらない．また，Σ_1^0 帰納法を Π_0^1 帰納法に強めても，あるいは反対に

$$\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n n \in X)$$

のような形に制限しても同じである．ACA_0 はペアノの1階算術 PA の保存的拡大 (conservative extension) になっている．つまり，PA の定理は ACA_0 で証明でき，ACA_0 で証明できる1階算術の命題は PA の定理になる．また，ACA_0 では弱ケーニヒの補題を定理として導くことができ，さらに ACA_0 が WKL_0 の真の拡大になることも示せる．

次に，$\varphi(n, X)$ を任意の算術的論理式，A を任意の集合として，$A_0 = A, A_{i+1} = \{n : \varphi(n, A_i)\}$ によって集合列 $A_0, A_1, A_2, \ldots$ を定義する．さらに $A_\omega = \{2^i \cdot 3^n : n \in A_i\}$ とおき，$A_{\omega+i+1} = \{n : \varphi(n, A_{\omega+i})\}$ によって集合列 $A_\omega, A_{\omega+1}, A_{\omega+2}, \ldots$ を作る．このような操作を任意の可算順序数まで繰り返せるという主張が算術的超限再帰 (arithmetical transfinite recursion) の公理であり，これを RCA_0 に加えた体系を ATR_0 と呼ぶ．この公理をもう少し厳密に表現すると，任意の集合Aと任意の整列順序Rに対し，次の条件を満たす集合Hが存在することになる：

（i） bがRにおける最小元のとき，

$$(H)_b = A,$$

（ii） bがRに関して a の次者 (successor) であるとき，

$$\forall n(n \in (H)_b \leftrightarrow \varphi(n, (H)_a)),$$

（iii） bがRにおいて極限になるとき，bより小さなすべての a について，

$$\forall n(n \in ((H)_b)_a \leftrightarrow n \in (H)_a),$$

ただし，$(A)_a = \{n : 2^a \cdot 3^n \in A\}$ である．

最後に，Π_1^1 式で定義されるすべての集合の存在を主張する Π_1^1 内包公理 (Π_1^1-CA) を RCA_0 に加えたものが Π_1^1-CA_0 である．

3.「逆数学」の主要結果

この章では，解析学の導入部が2階算術の中でいかに展開されるかをみる．特に断わらない限り，議論の土台として RCA_0 を仮定する．また，本章の最後に「逆数学」の主要結果をまとめる．

まず，有理数を自然数でコード化し，有理数（のコード）全体の集合を Q で表す．Q 上の四則演算は適当に定義されているとし，記法の簡便さのためそれらを自然数の演算と同じ記号で表す．しかし，たとえば三つの有理数 $-1, 1/2, -1/2$ の自然数コードがそれぞれ 7, 11, 17 であるときに 7+11 を 17 と解するか 18 と解するかは文脈次第である．この種の混乱は普通生じえないが一応の注意を要する．

有理数列 $\{q_n\}$ が $\forall n \forall i(|q_n - q_{n+i}| \leq 2^{-n})$ を満たすとき，われわれはそれを実数と呼び，$\{q_n\} \in R$ と書く．Q は2階算術における集合であるが，R は集合に関する述語であって 2 階算術の意味では集合にならないことに注意する．さて，

実数上の等号，不等号をそれぞれ次のように定義する：

$\{p_n\}=\{q_n\}$ iff $\forall n(|p_n-q_n|\leq 2^{-n+1})$,

$\{p_n\}<\{q_n\}$ iff $\exists n(q_n-p_n>2^{-n+1})$.

すると，二つの実数 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ について，$\{p_n\}=\{q_n\}$ か $\{p_n\}<\{q_n\}$ か $\{q_n\}<\{p_n\}$ のいずれか一つが成立することが RCA_0 で示せる．また，和積演算は次のように定義される：

$\{p_n\}+\{q_n\}=\{p_{n+1}+q_{n+1}\}$,

$\{p_n\}\cdot\{q_n\}=\{p_{n+m}\cdot q_{n+m}\}$.

ここで，m は $\max(|p_0|,|q_0|)+1\leq 2^{m-1}$ となる最小の自然数とする．すると $(R,+,\cdot,<,=)$ がアルキメデス順序体になることも RCA_0 で証明される．普通の数学では上の R を同値関係＝で割って実数体を定義するが，R の各元は集合であるから同値類をとるような操作はここではできず，同値関係をそのまま等号とみなしておく．

定理 3.1[5),6)]．上限の存在に関する Weierstrass の定理は ACA_0 と同値である．

証明の概略 ACA_0 で Weierstrass の定理を証明するのは普通の数学と変わらないから省略する．逆に，Weierstrass の定理から ACA_0 が出ることを示す．そのためには，定理から (Σ_1^0-CA) を導けばよい．簡単のために non-standard な数はないと考えると，Σ_1^0 集合は再帰的可算 (r.e.) 集合と同じであり，(有限集合の場合を除いて) 再帰単射の値域として表せる．そこで，任意の再帰単射 f に対し，$c_n=\Sigma_{0\leq i\leq n}2^{-f(i)}$ とおいて有界な増加有理数列 $\{c_n\}$ を定義すれば，Weierstrass の定理から $\lim c_n$ が存在する．すると，f の地域は $\lim c_n$ から再帰的に求まるので，その存在は RCA_0 でいえる．こうして Weierstrass の定理から ACA_0 が得られる．non-standard な数を含んだ一般の場合についても上の議論を形式的に行うことで証明できる． □

有理端点 p, q (p<q) をもつ開区間の自然数コードを (p, q) で表す．R の開集合はそのようなコードの集合として定義（コード化）される．閉集合はその補集合となる開集合のコードを使って取り扱うことができる．

定理 3.2[5),6)] Heine-Borel の定理は WKL_0 と同値である．

証明のアイデア WKL_0 が Cantor 空間 $\{0,1\}^N$ のコンパクト性と同値であることは容易に分かる．Cantor 空間から閉区間 [0,1] の上へは $f\mapsto\Sigma_{i\geq 0}f(i)\cdot 2^{-i-1}$ で定義される連続関数があるから，Heine-Borel の定理は Cantor 空間のコンパクト性，つまり WKL_0 から導かれる．逆に，Cantor 空間は [0,1] の閉部分集合 $\{\Sigma_{i\geq 0}f(i)\cdot 3^{-i-1}: f\in\{0,2\}^N\}$ (the ternary set) と同相であるから，Heine-Borel の定理は Cantor 空間のコンパクト性を含意し，よって WKL_0 を導く．(以上のアイデアに基づいて証明を書き下そうとすると，たとえば Cantor 空間やその上の連続関数を 2 階算術の上でどう表現したらいいかが問題になる．しかし，そういう概念を証明の中で直接言及する必要はない．Cantor 空間については，Seq (有限列の集合) の話で済ますことができる.) □

連続関数 $f: X(\subseteq R)\rightarrow R$ は，有理数の 4 つ組の集合 $\{(p,q,r,s): \forall x(p<x<q\rightarrow r\leq f(x)\leq s)\}$ でコード化する．f のコードと $x\in\mathrm{dom}\,f$ から f(x) の値を再帰的に (RCA_0 で) 求めることができる．いま $f(x)\neq 0$ と仮定し，実数値 f(x) を表す有理数列を $\{p_n\}$ とする．このとき，十分大きな n について $p_n<-2^{-n}$ か $2^{-n}<p_n$ の一方が成立し，それによって $f(x)<0$ か $f(x)>0$ かが判定できる．この性質を利用して次の定理が証明できる．

定理 3.3[29)] 中間値の定理は RCA_0 で証明可能．

証明の概略 dom f が [0,1] を含むような連続関数 f が与えられて，$f(0)<0<f(1)$ が成立しているとする．このとき，$f(x)=0$ となる $x\in[0,1]$ の存在をいいたい．まず，すべての有理数 $q\in[0,1]$ に対して $f(q)\neq 0$ と仮定してよい．そうでなければ，定理は成立している．あとは，2 分法 (dichotomy argument) を用いればよいが，このとき各有理点 q で $f(q)\neq 0$ となっているから，$f(q)<0$ か $f(q)>0$ かが有限的に判定できることがミソである． □

この定理の系として，どんな連続関数 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$ も不動点をもつことが RCA_0 で証明できる．(中間値の定理を $x-f(x)$ に適用する.) しかし，これが 2 次元以上に単純に拡張できないという経験的事実は次の定理によって裏付けられる．

定理 3.4[26)] Brouwer の不動点定理（どんな連続関数 $f:[0,1]^2\rightarrow[0,1]^2$ も不動点をもつこと）は WKL_0 と同値である．

証明の概略 WKL_0 における Brouwer の不動点定理の証明は，一般のものと変わらない．逆を示すために，WKL_0 を否定すると，[0,1] はコンパクトでなくなるから，[0,1] の被覆となる有理開区間の集合 $\{I_i\}$ で，その有限部分はどれも [0, 1] の被覆にならないようなものが存在する．この $\{I_i\}$ を使えば，$[0,1]^2$ から $[0,1]^2$ の境界 B への retraction (B 上で不変な連続関数) f を構成できる（文献26)を参照)．そのような f が存在すれば，Bを 90° 回転させる操作をその後に付け加えることで，不動点をもたない連続関数が得られる．　□

Brouwer の定理を無限次元空間 $[0,1]^N$ $(\subseteq R^N)$ に拡張したものが Tychonoff-Schauder の不動点定理で，やはり WKL_0 で証明できる．これを用いて常微分方程式の局所解の存在に関する Cauchy-Peano の定理も WKL_0 で証明される．また，Markov-角谷の不動点定理を応用すると可分 Banach 空間の Hahn-Banach の定理も WKL_0 で証明できる．これらの結果の詳細については文献 26) を見られたい．

最後に「逆数学」の主要結果をまとめておく．より詳しいリストと参考文献については，文献 35) または 36) をご覧いただきたい．

定理群 1. 次の定理はすべて RCA_0 で証明可能である．

(1) 区間縮小法の原理
(2) 中間値の定理
(3) 縮小写像に関する Banach の不動点定理
(4) 完備可分距離空間における Baire の定理
(5) 代数学の基本定理
(6) 無矛盾で完全な理論はモデルをもつ

定理群 2. 次のどの定理も RCA_0 上で WKL_0 と同値になる．

(1) Heine-Borel の被覆定理
(2) 連続関数 $f:[0,1]\to R$ は最大値をもつ
(3) 連続関数 $f:[0,1]\to R$ は一様連続である
(4) Brouwer の不動点定理
(5) 微分方程式についての Cauchy-Peano の定理
(6) Weierstrass の多項式近似定理
(7) 可分 Banach 空間の Hahn-Banach の定理
(8) 可算な可換環は素イデアルをもつ
(9) Gödel-Henkin の完全性定理

定理群 3. 次のどの定理も RCA_0 上で ACA_0 と同値になる．

(1) Bolzano-Weierstrass の定理
(2) Cauchy 列は収束する
(3) Arzela-Ascoli の補題
(4) 可算ベクトル空間は基底をもつ
(5) 加算な可換環は極大イデアルをもつ
(6) 有限分岐木に関する一般の König の補題
(7) Ramsey の定理 R(k), k≧3 (**5.** を参照)

定理群 4. 次のどの定理も RCA_0 上で ATR_0 と同値になる．

(1) 二つの可算整列順序は比較可能
(2) Luzin の解析集合の分離定理
(3) 非可算な閉集合は完全集合を含む
(4) 可算被約 Abel p 群に対する Ulm 因子列の存在
(5) 開ゲームの決定性 (Gale-Stewart の定理)
(6) 開分割の Ramsey 性

定理群 5. 次のどの定理も RCA_0 上で $\Pi_1^1\text{-}CA_0$ と同値になる．

(1) 閉集合は完全集合と可算集合の和で表せる (Cantor-Bendixson の定理)
(2) 補解析同値関係についての Silver の定理
(3) 可算 Abel 群は加除群と被約群の直積になる
(4) 開集合から Boole 演算で定義されるゲームの決定性
(5) G_δ 分割の Ramsey 性

4. ヘラクレスとヒドラの戦い

本章では組合せ的独立命題の一例として，「ヘラクレスとヒドラの戦い」というゲームをとりあげる．ヘラクレスはどんな戦略をとってもヒドラを退治できるのだが，その事実がペアノ算術 PA では論証できないというものである．原典のKirby-Paris[16] は，主に Goodstein の定理[10]の独立性について述べ，ヒドラのほうは同様にできるという書き方をしているので，ここでは直接後者を説明し，前者については原典（または竹内[34]）をご覧いただきたい．PA は ACA_0 と同じ1階算術の定理をもつので，PA から独立な命題は当然 ACA_0

からも独立である．他方，ACA_0 から独立な2階算術の命題をもとに1階算術の独立命題を創るという話題について次章で述べる．

まず，ヒドラは root をもった木である．少し用語の説明をしておくと，ここで木とは閉路を含まない連結グラフであり，その一つの頂点を root と定めることにより，各辺には root から外に向かう方向に向きが付いているものとする．すなわち，2頂点 u, v に隣接する辺が u から v への向きをもつのは，root から v を通らず u に至る道があるということで，このとき v を u の後者（または子）という．そして，後者をもたない頂点を端点（または葉）と呼ぶ．

ヒドラにおいて端点とそれに隣接する辺を合わせて head と呼ぶ．たとえば，**図-1** において，ヒドラは6つの head をもっている．このゲームは，ヘラクレスがヒドラの head を一つずつ切り落としていき，root だけにしてしまえば彼の勝ちというものである．ヒドラが何もしないなら，その頂点の個数から1を引いた回数のヘラクレスの攻撃によってヒドラは退治される．しかし，ヒドラは次のルールにしたがって成長するものとする．

> 切り落とされた head の付け根が root でない限り，その付け根（およびそこに入る辺）から先の部分がそれまでの攻撃の回数だけ増える．

このルールがいかに適用されるかは**図-2** の例を見ていただければ明白であろう．

さて，このように成長するヒドラをヘラクレスは退治できるだろうか？　答えは YES であり，しかもヘラクレスがどんなでたらめな攻撃をしてもいつか（有限時間内に）ヒドラは root だけになる．それをまず証明しよう．

定理 4.1[16]．ヘラクレスがどのような戦略をとっても有限時間内にヒドラは退治される．

証明　ヒドラの各状態に順序数（$<\varepsilon_0$）を割り当て，順序数の整列性を用いて無限の攻撃列がないことを示す．

まず，ヒドラのすべての端点に順序数0を割り当てる．頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がそれぞれ順序数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n)$ をもつとき，それらの頂点を子にもつ頂点には順序数 $\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\ldots+\omega^{\alpha_n}$ を割り当てる．このルールによって，各頂点にはちょうど一つの順序数（$<\varepsilon_0$）が割り当てられる．そして，root に割り当てられた順序数をヒドラの順序数と定義する．例：図-1 のヒドラの順序数は $\omega^{\omega^3+2}+1$ である（**図-3**）．

ヘラクレスの攻撃によってヒドラの順序数がどう変化するか，図-2 の例を使って考えてみよう．時刻3の変化を**図-4** に示す．ヘラクレスの攻撃によって head を切られると，ヒドラの順序数が小さくなるのは当然だが，その後ルールに従って成長しても順序数は攻撃前より小さい．なぜなら，

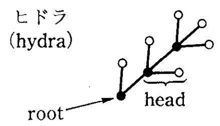


図-1

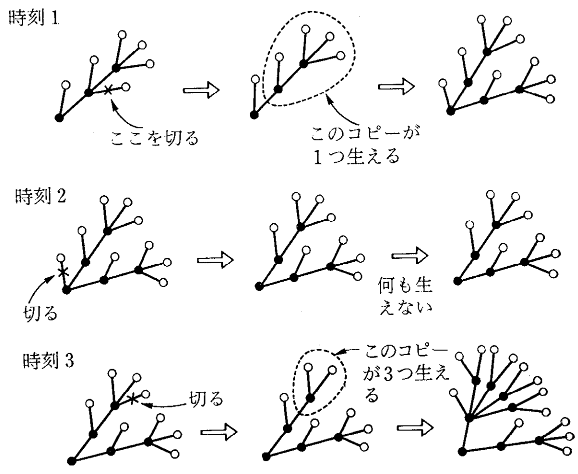


図-2

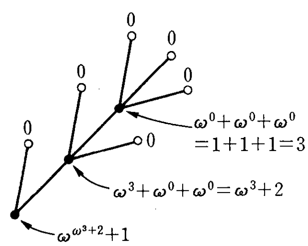


図-3

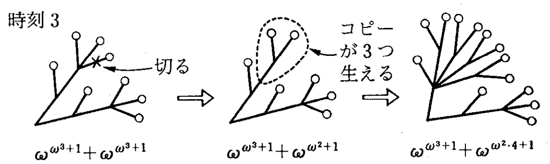


図-4

任意の自然数 n について，$\omega^{\alpha}\cdot n<\omega^{\alpha+1}$ が成り立つからである．そこで，順序数（$<\varepsilon_0$）の整列性を用いれば，攻撃は必ず有限で終了する．　□

上の証明は本質的に ε_0 までの順序数の整列性を用いている．このことから，ペアノ算術の無矛盾性を証明したゲンツェンの方法を連想される方も多いと思う．ペアノ算術でペアノ算術の無矛盾性は証明できないというのがゲーデルの第2不完全性定理だから，ゲンツェンの方法はペアノ算術内では実行できないのだが，上の定理もやはりペアノ算術では証明できない．（関連の話題として文献 13) を参照．）

では，独立性証明の概要を述べる．まず，上の定理を1階算術の言葉で表現しておく必要がある．ヒドラは有限のグラフだから自然数でコーディングするのは簡単である．問題なのは「どのような戦略をとっても」というところである．戦略はヒドラの head を選ぶ関数だから，コードで考えれば自然数から自然数への関数になる．しかし，1階算術では関数上を動く変数が扱えないので，Kirby-Paris[16] は「任意の再帰的戦略」と表現して，戦略自体も自然数でコード化できるものに限っている．実際には，最も効率の悪い，つまり攻撃回数が一番多くなるような（再帰的）戦略 MAX があるので，その戦略についての主張としてもよい[20]．

さて，定理 4.1 の証明では，順序数を定義しないで使っているが，独立性の証明にはその正確な定義が必要である．一般に，順序数には，何かの後者 ($\beta+1$) になるものと，極限 ($\lim_{n\to\infty}\alpha_n$) になるものがある．極限順序数を議論する場合には，それを極限とする増加列 $\alpha_0<\alpha_1<\ldots$（基本列）をあらかじめ定める必要があるが，ここではそれは適当に与えられているとしよう．詳しくは，文献 34) などを参照．

次に，各順序数 α について，自然数から自然数への関数 f_α を以下のように定義する．

$$f_0(n)=n+1,$$
$$f_{\alpha+1}(n)=\overbrace{f_\alpha f_\alpha\ldots f_\alpha}^{n+1}(n),$$
$$f_{\lim_k \alpha_k}(n)=f_{\alpha_n}(n).$$

この関数族の特徴は，α が大きくなればなるほど f_α の増加度が大きくなることで，この族を fast growing hierarchy と呼ぶ．

次の補題は，fast growing hierarchy と証明可能性を関連付ける基本命題である．

補題 4.2 (Kreisel, Wainer). 再帰的関係 R (x, y) について，$\forall x\exists y\, R(x,y)$ がペアノ算術で証明できるなら，ある順序数 $\alpha<\varepsilon_0$ と自然数 n が存在して，$\forall x\exists y<f_\alpha(x)+n\ R(x,y)$ が成り立つ．

この証明は，ゲンツェンの無矛盾性証明を厳密に分析することで得られる．Buchholz-Wainer[3] に，分かりやすい証明がある．

さて，head を一つしかもたない長さ x（頂点の個数 x+1）のヒドラに対し，最悪の戦略 MAX を用いたときのゲーム終了までの攻撃数を $y=g(x)$ とすると，$g(x)$ はどの $f_\alpha(\alpha<\varepsilon_0)$ よりも増加度が大きいことが示せる[20]．したがって，上の補題により，戦略 MAX でヒドラが退治できることはペアノ算術で証明できないのである．以上から，次の結論を得る．

定理 4.3[16]．ヘラクレスがどんな再帰的戦略をとっても有限時間内にヒドラが退治されるという事実は，ペアノ算術で証明できない．

5. 組合せ的独立命題

前章ではペアノ算術 PA の独立命題の1例を扱ったが，この章では2階算術の話題として，ACA_0 から独立な Ramsey の定理，ATR_0 から独立な Kruskal の定理などを紹介する．無限形の Ramsey の定理が ACA_0 から独立であるという Jockush の結果[12]は，Paris-Harrington の定理[23]の発見につながる先駆的仕事として有名であるが，ここでは後者の系として扱う．

まず，集合 X に対し，$[X]^k=\{Y\subseteq X : Y$ はちょうど k 個の要素をもつ$\}$ とおく．

Paris-Harrington の原理 PH. 任意の自然数 k, l, m に対し，次の条件を満たす自然数 n が存在する：$X=\{1,2,\ldots,n\}$ として，$[X]^k$ を l 個の互いに素な集合 $C_1, C_2, \ldots, C_l$ に分割したとき，X の部分集合Yで要素の個数が m以上かつ min (Y) 以上のものが存在し，$[Y]^k$ はある C_i の部分集合になる．

上の命題の波線部分を消去したのが有限形の Ramsey の定理である．有限形の Ramsey の定理にはいくつかの証明が知られているが，次の無限形からコンパクト性あるいは König の補題を使って導くのがエレガントであり，その証明は容易

に PH の証明にも応用できる[23].

Ramsey の定理（**無限形**）．k, l を任意の自然数とし，$N=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ として，$[N]^k$ を l 個の互いに素な集合 $C_1, C_2, \ldots, C_l$ に分割したとき，N の無限部分集合 Y が存在し，$[Y]^k$ はある C_i の部分集合になる．

無限形の証明は k についての帰納法で行われる．いま，この定理を k をパラメタとした 2 階算術の式 R(k) で表すと，R(0) および $R(k) \rightarrow R(k+1)$ は ACA_0 でも成り立つ．ところが，それらから $\forall x R(x)$ を推論できるほど強い帰納法を ACA_0 はもっていない．しかし，任意の具体的な自然数 n について R(n) は ACA_0 で証明でき，さらに $n \geqq 3$ のとき両者は同値である．R(2) は WKL_0 で証明できないことが分かっているが，ACA_0 と同値になるかどうかは有名な未解決問題で，「2-3 問題」などと呼ばれている[14].

さて，有限形の Ramsey の定理には無限形を使わない証明もあって，そちらは直接ペアノ算術で実現できる．では，PH のほうはどうかというと，これから示すようにペアノ算術では証明できない．上の PH の命題において，自然数 k, l, m に対し，条件を満たす最小の自然数 n を与える関数を $H(k, l, m)$ とする．Ketonen-Solovay[15] は，この関数がほぼ f_{ε_0} と同じ増加度をもつことを示した．厳密には，次の関係が成り立つ：$x \geq 20$ として，

$$f_{\varepsilon_0}(x-3) < H(x+1, x, x) < f_{\varepsilon_0}(x-1).$$

したがって，**4.** と同じ論法で H が関数であることはペアノ算術で証明できず，よって次を得る．

定理 5.1[23]．PH はペアノ算術で証明できない．

なお，Paris-Harrington[23] のもとの証明は，PH からペアノ算術のモデルを作って無矛盾性を示し，第 2 不完全性定理によって PH の独立性を導くという論法になっている．PH のバリエーションの研究として文献14)，21)などがある．

Paris-Harrington の原理 PH がペアノ算術で証明できないなら，その保存的拡大である ACA_0 でも証明できない．一方，無限形の Ramsey の定理 $\forall x\ R(x)$ から PH を導くことは ACA_0 で十分できるから，$\forall x\ R(x)$ は ACA_0 で証明できないことになる．

系 5.2[12]．無限形の Ramsey の定理は ACA_0 で証明できない．

次に扱う Kruskal の定理は，項書き換え系の停止性を示すときなどに用いられる非常に強力で美しい定理である．よく教科書などで見る証明は Nash-Williams[22] によるもので，無限形の Ramsey の定理が使われている．しかし，そこで使われる Ramsey の定理は，上の表現を使えば R(2) であり，ACA_0 でも証明できる．

さて，Kruskal の定理を述べるのに必要な言葉を準備しよう．まず今後，木といえば root をもった木である．ある木において，root から頂点 v に至る道の途中に頂点 u があるとき，v は u の<u>子孫</u>（または u は v の<u>先祖</u>）という．そして，2 頂点 u, v に対し，両者に共通の先祖で root から一番遠い頂点を $u \wedge v$ と書く．

木 T から木 T′ への<u>埋め込み</u>とは，T の頂点の集合から木 T′ の頂点の集合への関数 f で $\wedge$ を保存するもの，つまり T の任意の 2 頂点 u, v に対し，$f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$ が成立するものである．埋め込みの例を**図-5** に示す．簡単に分かるように，埋め込み関数は必ず単射である．また，この埋め込みがトポロジカルな意味での埋め込みになっていることも注意しておく．最後に，木 T から木 T′ へ埋め込みが存在するとき $T \leqq T'$ と書き，木の間の 2 項関係 $\leqq$ を定義する．

Kruskal の定理[17]．どのような木の無限列 $T_1, T_2, T_3, \cdots$ にも $T_i \leqq T_j$ となる $i<j$ がある．

（すなわち，$\leqq$ は整列擬順序（WQO）である．）

Nash-Williams の証明[22]で，強い存在公理を必要とするのは，定理が成り立たないとしてある種の反例の集合を作るところだが，そこは Π_1^1 内包公理（Π_1^1-CA）があれば十分である[4].

さて，この定理が ATR_0 で証明できないことを示すために，順序数の新たな記法を導入する．まず，順序数から順序数への関係の列 φ_α（α は順序数）を以下のように定義する．

$$\varphi_0(\beta) = \omega^\beta$$

$$\varphi_\alpha(\beta) = \text{集合 } \{\beta' : \forall \alpha' < \alpha \varphi_{\alpha'}(\beta') = \beta'\} \text{ の } \beta$$

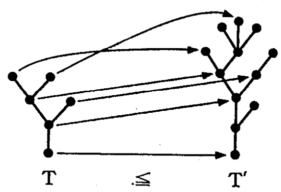


図-5

番目の要素 $(\alpha>0)$

たとえば，

$\varphi_1(0)=\varepsilon_0,\ \varphi_1(\varphi_1(0))=\varepsilon_{\varepsilon_0}$,

$\varphi_2(0)=\sup_{n<\omega}\varphi_1{}^n(0)=\varepsilon_{\varepsilon_{\cdot_\cdot}}$.

そして，順序数 Γ_0 を次のように定義する．

$\gamma_0=0,\ \gamma_{n+1}=\varphi_{\gamma_n}(0)$,

$\Gamma_0=\sup_{n<\omega}\gamma_n$.

Γ_0 は，すべての $\alpha,\beta<\gamma$ に対し $\varphi_\alpha(\beta)<\gamma$ となる最小の順序数 $\gamma>0$ である．この順序数はものすごく大きいようだが，それでも $\{\alpha:\alpha<\Gamma_0\}$ は可算集合で，その順序型は RCA_0 でも定義できる．しかし，$\{\alpha:\alpha<\Gamma_0\}$ の整列性は（あるいは Γ_0 までの超限帰納法）によって体系 ATR_0 の無矛盾性がいえる[8] ので，ATR_0 でその整列性を示すことはできない．ところが，これから述べるように Kruskal の定理は $\{\alpha:\alpha<\Gamma_0\}$ の整列性を意味するので，ATR_0 ではこの定理は証明できないことになる．

木に順序数（$<\Gamma_0$）を割り当てる関数 h を**図-6**のように定義する．すると，次の二つの事実が証明できる．

1 $T\leqq T'$ ならば $h(T)\leqq h(T')$.

2 すべての $\alpha<\Gamma_0$ に対し，$\alpha=h(T)$ となる木 T が存在する．

いま，$\{\alpha_i:i\in N\}$ を Γ_0 より小さい順序数からなる無限下降列とする．各 i について，$\alpha_i=h(T_i)$ となる木 T_i を選ぶ．そして，$\{T_i\}$ に Kruskal の定理を適用すると，$T_i\leqq T_j$ となる $i<j$ が存在する．すると，$\alpha_i=h(T_i)\leqq h(T_j)=\alpha_j$ となり，$\{\alpha_i\}$ の下降性に反す．以上から次の結論を得る．

定理 5.3. Kruskal の定理は ATR_0 では証明できない．H. Friedman はさらに Kruskal の定理の有限形（1 階算術の命題）も発見しているがここでは省略する．このあたりの詳しい解説に文献 9) がある．また，Kruskal の定理に対する必要十分な公理は何かという問題が最近の Rathjen ら[24]によって解かれた．

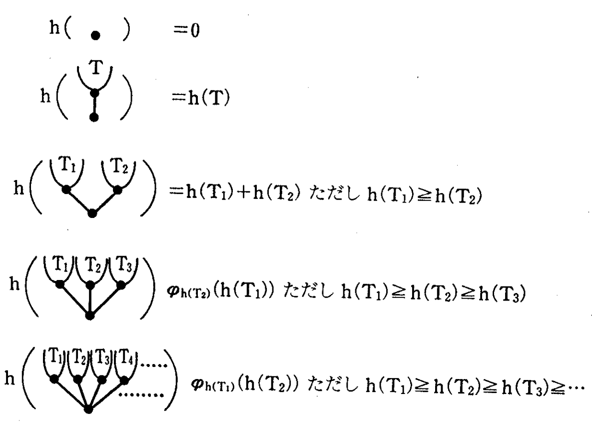


図-6

最後に Π_1^1-CA_0 で証明できない命題の例について述べる．H. Friedman ら[11),25)]は Kruskal の定理を拡張して Π_1^1-CA_0 から独立な命題をいろいろ発見しているが，ここでは Robertson-Seymore の定理[7]を紹介しておこう．グラフ G からいくつかの辺を除去，または縮約（短絡除去）してできるグラフ H を G の minor といい，$H\leqq G$ と書く．このとき，$\leqq$ が WQO であるという主張が Robertson-Seymore の定理である．Robertson-Seymore の定理は Π_1^1-CA_0 で証明できないことが分かっているが，それに対する必要十分な公理系の研究はまだない．

6. まとめ

「逆数学」周辺の主な結果を**図-7** にまとめてみた．この解説では 1 階算術の部分体系や集合論の諸体系についてはまったく触れなかったが，ここでの話はそれらの体系の研究とも連続的なつながりをもっている．たとえば，開ゲームの決定性に関する Gale-Stewart の定理が ATR_0 と同値になるというのは「逆数学」の結果だが，Borel ゲームの決定性（これも 2 階算術の命題である）が Z_2 やツェルメロの集合論で証明できないというのは集合論の話になる．ACA_0 と 1 階算術 PA の関係は本文でもたびたび言及しているが，WKL_0 と RCA_0 に相応する 1 階の体系には Primitive Recursive Arithmetic がある[37),38)]．また最近では，さらに弱いところで，自然数論の定理（たとえば，素数が無限に存在する）を証明するのにどんな公理が必要かという問題が計算量理論との関係で注目されている．

「逆数学」の結果に対し数学史や数学教育など各方面からの考察も可能だと思うが，それは筆者の手に余るので有志の方にお任せしたい．ただし，ヒルベルトのプログラムとの関係については文献35)，36)で述べたので，興味ある方はそちらをご覧願いたい．

次に，構成的数学（ロシア学派）[2] や計算

1階算術の命題	2階算術の体系	2階算術の命題
Con(ZFC) Con(Z_2)		Borelゲームの決定性
	Z_2	
Robertson-Seymourの定理(有限形) Con(Π_1^1-CA_0)		Robertson-Seymourの定理
	Π_1^1-CA_0 ⇔	**3.**の定理群5
Kruskalの定理(有限形) Con(ATR_0)		Kruskalの定理
	ATR_0 ⇔	**3.**の定理群4
Paris-Harringtonの原理,ヒドラ Con(ACA_0), Con(PA)		Ramseyの定理
	ACA_0 ⇔	**3.**の定理群3
		Hilbertの基底定理
Con(WKL_0), Con(RCA_0)		
	WKL_0 ⇔	**3.**の定理群2
(WKL_0とRCA_0は算術的に同等)		
	RCA_0	
		3.の定理群1

注:Con(T)は“Tは無矛盾”の意.

図-7

可能数学[1]との関係を少し述べておきたい.体系RCA_0は計算可能数学の形式化であると前に書いたが,構成的数学などでは自然数の存在は絶対的なものであるからその形式化はRCA_0+full inductionと考えたほうが適当かもしれない.結果的には,計算可能数学で証明できるものは大抵RCA_0でも証明できるのだが,後者では帰納法の使用が制限されているためにより一層細かい議論が必要になることが多い.

両者の立場の違いを端的に表しているのが組合せ的独立命題であろう.Wainerのfast growing hierarchyに現れる関数(たとえばf_{ε_0})はみんな再帰的関数だから,計算可能数学の立場でその存在が問題になることはない.したがって,ACA_0でも証明できないParis-Harringtonの命題が計算可能数学では成立する.

これに関連して,次のことを注意しておきたい.2階算術では,自然数から自然数への関数をそのグラフを表す集合によって定義する.このとき,ある関数は(集合として)存在しているが,それが関数であることが証明できないという現象が起こり得る.実際,**5.**のPHの命題において,自然数k, l, mに対し条件を満たす最小の自然数nを与える関数$H(k, l, m)$のグラフ,つまりk, l, m, nの関係はprimitive recursiveな集合であるから,その存在だけならRCA_0でも証明できるのである.ともあれ,再帰的関数のクラスが議論する体系によって異なるという問題意識は構成的数学などにはなく,「逆数学」における形式主義の立場を特徴付けている.

参考文献についてだが,文末のリストは「逆数学」のサーベイとしては不完全なものなので,次の文献とその中の文献表を併せてご覧いただきたい.4),20),29)～32),35),36).また,論文集18),27),33)には関連論文が多数収められている.

この文をまとめるにあたり,次の先生からの日頃のご助言が大変有益だったのでここに感謝の意を表します:Harrington教授,Simpson教授,倉田令二朗先生,八杉満利子先生,角田法也氏,また,この分野に関心をもっていただき,執筆を勧めてくださった井宮淳先生にも感謝いたします.

参　考　文　献

1) Aberth, O.: Computable Analysis, McGraw-Hill (1980).
2) Bridges, D. and Richman, F.: Varieties of Constructive Mathematics, London Math. Society Lec. Note Series 97 (1987).
3) Buchholz, W. and Wainer, S.: Provably Computable Functions and the Fast-Growing Hierarchy, in 33), pp. 179-198 (1987).
4) Drake, F.K.: On the Foundations of Mathematics in 1987, in Logic Colloquium '87, edited by H.D. Ebbinghaus et al., North-Holland, pp. 11-35 (1989).
5) Friedman, H.M.: Some Systems of Second Order Arithmetic and their Use, in Proc. of I.C.M. (Vancouver, 1974), Vol. 1, Canadian Math. Congress, pp. 235-242 (1975).
6) Friedman, H.M.: Systems of Second Order Arithmetic with Restricted Induction Ⅰ, Ⅱ (abstracts), J. Symb. Logic 41, pp. 557-559 (1976).
7) Friedman, H,M., Robertson, N. and Seymour, P.D.: The Metamathematics of the Graph Minor Theorem, in 33), pp. 229-261 (1987).
8) Friedman, H.M., McAloon, J. and Simpson, S.G.: A Finite Combinatorial Principle Which Is Equivalent to the 1-Consistency, in Patras Logic Symposion, edited by G. Metakides, North-Holland, pp. 197-230 (1982).
9) Gallier, J.H.: What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0?, Ann. Pure and Appl. Logik 53, pp. 199-260 (1991).
10) Goodstein, R.L.: On the Restricted Ordinal

Theorem, J. Symb. Logic 9, pp. 33-41 (1944).
11) Gordeev, L.: Generalizations of the Kruskal-Friedman Theorems, J. Symb. Logic, pp. 157-181 (1990).
12) Jockush Jr., C.G.: Ramsey's Theorem and Recursion Theory, J. Symb. Logic 37, pp. 268-280 (1972).
13) Jervell, H.R.: Gentzen Games, Zeitschr. f. Math. Logik und Grund. d. Math. 31, pp. 431-439 (1985).
14) Kanamori, A. and McAloon, K.: On Gödel Incompleteness and Finite Combinatorics, Ann. Pure Appl. Logic 33, pp. 23-41 (1987).
15) Ketonen, J. and Solovay, R.: Rapidly Growing Ramsey Functions, Ann. of Math. 113, pp. 267-314 (1981).
16) Kirby, L. and Paris, J.: Accessible Independence Results for Peano Arithmetic, Bulletin of London Math. Soc. 14, pp. 285-293 (1982).
17) Kruskal, J.: Well-Quasi-Ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's Conjecture, Trans. of A.M.S. 95, pp. 210-225 (1960).
18) Harrington, L., Moley, M., Ščedrov, A. and Simpson, S. (editors): Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics, North-Holland (1985).
19) Hilbert, D. and Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik, Vols, I, II, Springer (1934, 1939).
20) Loebl, M. and Nešetřil, J.: Fast and Slow Growing (a combinatorial study of unprovability), in Surveys in Combinatorics 1991, edited by Keedwell, London Math. Lecture Note Series 166, pp. 119-160 (1991).
21) Loebl, M. and Nešetřil, J.: An Unprovable Ramsey-Type Theorem, Proc. of A.M.S. 116, pp. 819-824 (1992).
22) Nash-Williams, C. St. J.A.: On Well-Quasi-Ordering Finite Trees, Proc. Cambridge Phil. Soc. 59, pp. 833-835 (1963).
23) Paris, J. and Harrington, L.: A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic, edited by J. Barwise, North-Holland, pp. 1133-1142 (1977).
24) Rathjen, M. and Weiermann, A.: Proof-Theoretic Investigations on Kruskal's Theorem. Ann. Pure and Appl. Logic 60, pp. 49-88 (1993).
25) Schütte, K. and Simpson, S.G.: Ein in der Reinen Zahlentheorie Unbeweisbarer Satz über Endliche Folgen von Natürlichen Zahnen, Archiv für Math. Logic und Grundlagenforschung 25, pp. 75-89 (1985).
26) Shioji, N. and Tanaka, K.: Fixed Point Theory in Weak Second-Order Arithmetic, Ann. Pure and Appl. Logic 47, pp. 167-188 (1990).
27) Sieg, W. (editor): Logic and Computation, Contemporary Math. Vol. 106, A.M.S. (1990).
28) Simpson, S.G.: Subsystems of Second Order Arithmetic, forthcoming.
29) Simpson, S.G.: Reverse Mathematics, in Recursion Theory, Proc. of Symposia in Pure Math. Vol. 42, edited by A. Nerode and R.A. Shore, A.M.S., pp. 461-471 (1985).
30) Simpson, S.G.: Nonprovability of Certain Combinatorial Properties of Finite Trees, in 33), pp. 87-117 (1987).
31) Simpson, S.G.: Friedman's Research of Subsystems of Second Order Arithmetic, in 18), pp. 137-159 (1985).
32) Simpson, S.G.: Subsystems of Z_2 and Reverse Mathematics, appendix to 34, pp. 432-446 (1986).
33) Simpson, S.G. (editor): Logic and Combinatorics, Contemporary Math. Vol. 65, A.M.S. (1987).
34) Takeuti, G.: Proof Theory, second edition, North-Holland (1987).
35) Tanaka, K.: Reverse Mathematics and Subsystems of Second-Order Arithmetics, Sugaku Expositions, Vol. 5, A.M.S., pp. 213-234 (1992).
36) 田中一之：'逆・数学' と2階算術の証明論, 数学, 第 42 巻, pp. 244-260 (1990).
37) 田中一之：2 階算術の諸体系—モデル論的手法による分析, 京大数理研講究録 771, pp. 118-156 (1991).
38) 田中一之：2 階算術の諸体系—モデル論的手法による分析その2, 京大数理研講究録 847, pp. 94-106 (1993).

付記 (1993.11.5)：ヒドラのゲームを拡張して Π_1^1-CA_0 から独立な命題を創る話が次の論文にある.

Buchholz, W: An Independent Result for Π_1^1-CA+BI, Ann. Pure and Appl. Logic 33, pp. 131-155 (1987).

また，逆数学現象に当てはまらない新しいタイプの結果として次の論文を注目したい.

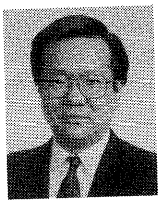
Friedman, H.M., Simpson, S.G and Yu, X: Periodic Points and Subsystems of Second-Order Arithmetic, ibid 62, pp. 51-64 (1993).

最後に，文献19)の抄訳が遂に出版された.

吉田夏彦，渕野昌共訳：数学の基礎，シュプリンガー (1993).

付記 (1994.3.10) その後も本稿と関連する結果が次々発表されているが，とくに長谷川立氏の研究 (Well-Orderings of Algebra and Kruskal's Theorem, to appear) は興味深い.

(平成5年9月20日受付)



田中 一之

1955年東京生．1978年東京工業大学理学部情報科学科卒業．1980年同大学院修士課程修了．東工大では，宝来（高橋）正子先生のもとで形式言語，オートマトン，計算論などを学び，また哲学者の石本新先生から様相論理や自然言語の形式的意味論について指導を受けた．その後，カリフォルニア大学バークレイ校数学科に留学，Harrington 教授のもとで数学基礎論，とくに記述集合論と算術周辺のメタ数学を学んだ．1986年，バークレイで Ph. D. を取得．東京工業大学理学部助手，東北大学教養部助教授を経て，現在東北大学理学部数学科助教授．最近の研究テーマは，2階算術のモデル論と高階の計算論．Amer. Math. Society, Assoc. for Symb. Logic 及び日本数学会会員．