社団法人　情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2005－FI－78 （1）
2005－DD－49（1）
2005／3／25

ラプラス変換型 GM の提案

李　国棟[†]　　山口　大輔[†]　　水谷　晃三[†]　　永井正武[†]

灰色理論による GM(Grey Model)は予測モデルとして既に確立している。これまで，GM は微分方程式による時間領域で解くことを前提としている。そのため，*n* 階微分方程式の場合は解を得ることは困難である。本論文はラプラス変換による GM の提案により，周波数領域で解く方法を提案する。本提案方法は，比較的容易に *n* 階微分方程式の解が得られることが特徴である。次に，伝統的な GM は 2 階以上の場合，初期値決めの不精確問題もあり，現実的にはデータマイニングにおいて適用上の問題となる。この初期値問題に対しては，３次スプライン補間関数による改善方法を提案する。数値処理の具体例を挙げ，本提案で新しい方法による計算精度は改善されていることを報告する。

New Proposals for GM According to Laplace Transform

Guodong Li[†]　　Daisuke Yamaguchi[†]　　Kozo Mizutani[†]　　Masatake Nagai[†]

This paper proposes the method for solving by the proposal of GM according to Laplace transform in frequency domain. It is features to comparatively obtain the solution of the *n* order differential equation in the easiness. Also, there is some traditional GM on non-precise problem of initial value conclusive factor in case of the over second order and it becomes realistically a problem in the application in data mining. For this initial value problem, the solution according to the cubic spline interpolation function is proposed. It is reported that the calculation accuracy by the new method heightens in this proposal.

１．はじめに

灰色理論[1]では，灰色とはある主題に対する既知情報と未知情報が混在している状態を表す。灰色の定義から，情報の白色とは完全既知，黒色とは完全未知と定義する。灰色理論は情報の灰色な状態を白色化にすることを目的とした基礎数理理論である。1982 に世に問うてから，理論研究だけでなく応用研究面も大きな進展を遂げている。特に，灰色予測モデル GM[1][2] (Grey Model)は定量的に予測や分析分野などに応用することができる。しかし，伝統的な GM では微分方程式による時間領域で解くことにしているため，微分方程式の解は特殊解と一般解を求めることになる。特に *n* 階微分方程式の解を得ることは困難である。

本論文はラプラス変換による GM の解を周波数領域で解く方法を提案する(以下 $\mathcal{L}$-GM と略記)。２階以上の場合はラプラス変換により，有理多項式の分母の項は $s = d/dt$ の多項式が得られ，実数根，複素根または重根を含むことになる。s の多項式が２次方程式の場合は因数分解法，３次の場合はカルダノ法[6]，４次の場合はオイラー法[6]，５次以上の場合はベアストウ（Bairstow）法[6]を用いて，与えられた多項式中の分母多項式の根を解く。分子多項式中の項の係数を求めるため，未定係数法[5]を用いて求める。本提案の方法では *n* 階微分方程式の解を同時に直接に解くことにより，特殊解と一般解を求めない利点を有する。

２階以上の微分方程式の場合では，GM の初期値決め問題と精度上の問題もあり，データマイニング上現実の適用上に問題となる。初期値問題に対応して，本論文では３次スプライン補間関数[8][11]により初期値を求める方法を提案する(以下 3sp $\mathcal{L}$-GM と略記)。

本論文は具体的に 3sp$\mathcal{L}$-GM(2,1)の例を挙げ，提案された新しいタイプの GM の精度は伝統的な GM よりも高まったことを報告する。

２．　ラプラス変換型 GM

２．１　ラプラス変換による $\mathcal{L}$-GM(1,1)[1][2][5] の誘導

時間領域と周波数領域における関数 $f(t)$ のラプラス変換[5]とその逆ラプラス変換は，

† 帝京大学大学院理工学研究科
† Graduate school of Science and Engineering, Teikyo University

$$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds \tag{2}$$

で定義される。$F(s)$ は複素周波数 s（$s=\sigma+j\omega$），$\sigma>0$ についての関数であり，右辺の積分はラプラス積分と呼ばれる。実際に 1 階の導関数をラプラス変換すると，$f(0)$（元の式に 0 を代入した値）を含む次の公式が得られる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0) \tag{3}$$

一般に，n 階の導関数のラプラス変換は以下のように得られる。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0) \tag{4}$$

上記のラプラス変換方法により，GM(1,1)微分方程式の解は求まる。この時の GM(1,1)を $\mathcal{L}$-GM(1,1)と定義する。

いま，原始数列 $x^{(0)}(i)$，$i=1,2,\cdots,n$ に対し，

$$\left.\begin{aligned}&x^{(0)}(i)=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}\\&x^{(1)}(i)=\sum_{j=1}^{i}x^{(0)}(j)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ただし，前提条件：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{(1)}(i)\in(e^{-\frac{2}{n+1}},e^{+\frac{2}{n+1}})\\&\sigma^{(1)}(i)=\frac{x^{(1)}(i-1)}{x^{(1)}(i)}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$(i\geq 3)$ が成立するとき，GM(1,1)に対応する伝統的な GM の式は微分方程式形式で次のように記述する。

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}(t)=b \tag{7}$$

ただし，a，b は係数である。

式(7)の解は, ラプラス変換により次のように得られる。

$$sx^{(1)}(s)-x^{(1)}(0)+ax^{(1)}(s)=b/s$$

$$\therefore x^{(1)}(s)=\frac{b}{s(s+a)}+\frac{x^{(1)}(0)}{s+a}=\frac{x^{(1)}(0)-\frac{b}{a}}{s+a}+\frac{b}{a}\times\frac{1}{s} \tag{8}$$

式(8)により, 逆ラプラス変換を行なうと, 直ちに次の連続系形式の解が得られる。

$$x^{(1)}(t)=\left[x^{(1)}(0)-\frac{b}{a}\right]e^{-at}+\frac{b}{a}\quad, t\geq 0 \tag{9}$$

離散系形式に変形すると，次式のように得られる。

$$\hat{x}^{(1)}(i)=\left[x^{(0)}(0)-\frac{b}{a}\right]e^{-ai}+\frac{b}{a},\ i=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

ただし，　$\hat{x}^{(1)}(0)=x^{(1)}(0)=x^{(0)}(0)$ (11)

ラプラス変換により，伝統的な GM(1,1)と同一の解が得られる。したがって，求めたい係数 $\hat{a}$ の値の算出は次式の最小二乗法アルゴリズムで求まる。

$$\hat{a}=[a,b]^T=\left[A^TA\right]^{-1}A^TX_n \tag{12}$$

ただし，$X_n=\left[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\right]^T$ (13)

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(x^{(1)}(0)+x^{(1)}(1)) & 1\\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\therefore\ \hat{x}^{(0)}(i)=\hat{x}^{(1)}(i)-\hat{x}^{(1)}(i-1),\ i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

$i>n$ の時，式(15)の計算値は予測値となる。

２．２ $\mathcal{L}$-GM(n,m)の誘導

GM(n,m)微分方程式の場合の解は，ラプラス変換により比較的容易に求まる。この時，ラプラス変換手法で得られる GM(n,m)を，$\mathcal{L}$-GM(n,m)と定義する。

与えられる原始数列 $x_k^{(0)}(i)$ について，その一次累加数列 $x_k^{(1)}(i)$ 及び $x_k^{(1)}(i)$ の多次累減数列 $a^{(j)}x_k^{(1)}(i)$ を以下のように定義する。

$$\left.\begin{aligned}&a^{(j)}(x_k^{(1)},i)=a^{(j-1)}(x_k^{(1)},i)-a^{(j-1)}x_k^{(1)}(i-1)\\&\quad\vdots\\&a^{(0)}(x_k^{(1)},i)=x_k^{(1)}(i)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ただし，$i=1,2,\cdots,N; j=1,2,\cdots,n; k=1,2,\cdots,m$

これらの式を行列形式で表現すると，

$$A=\begin{bmatrix}-a^{(n-1)}(x_1^{(1)},1) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)},1) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)},1)\\ -a^{(n-1)}(x_1^{(1)},2) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)},2) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)},2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -a^{(n-1)}(x_1^{(1)},N) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)},N) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)},N)\end{bmatrix} \tag{17}$$

となり，式中の $a^{(n-1)}(x_1^{(1)},1),\cdots,a^{(n-1)}(x_1^{(1)},N)$ は，n−1 階累減数列である。同様に B，X_n は既知のように，次のとおりの式である。

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(0)+x_1^{(1)}(1)) & x_2^{(1)}(1) & \cdots & x_m^{(1)}(1)\\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(1)+x_1^{(1)}(2)) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_m^{(1)}(2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(N-1)+x_1^{(1)}(N)) & x_2^{(1)}(N) & \cdots & x_m^{(1)}(N)\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$X_n=\left[a^{(n)}(x_1^{(n)},1),a^{(n)}(x_1^{(n)},2),\cdots,a^{(n)}(x_1^{(n)},N)\right]^T \tag{19}$$

式(18)の $x_1^{(1)}(i)$ は原始数列 $x_1^{(0)}(i)$ の1次累加生成数列であり, 式(19)の $a^{(n)}(x_1^{(n)},i)$, $(i=1,2,\cdots,N)$ は n次累減生成した数列である。

ここで，GM(n,m)のn階微分方程式の一般式を次に記述する。

$$\frac{d^nx_1^{(1)}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x_1^{(1)}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx_1^{(1)}=b_1x_2^{(1)}+b_2x_3^{(1)}+\cdots+b_{m-1}x_m^{(1)} \tag{20}$$

求めたい係数 $\hat{a}$ の計算は次式で求まる。

$$\hat{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n\vdots b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}]^T=\left[[A\vdots B]^T[A\vdots B]\right]^{-1}[A\vdots B]^TX_n \tag{21}$$

ラプラス変換の適用により，$\mathcal{L}$−GM(n,m)の解を求めるアルゴリズムを以下に示す。

ステップ１：$\mathcal{L}$−GM(n,m)のラプラス変換結果式を求める。

ラプラス変換により，式(20)を次式のように書き換える。

$$\sum_{l=0}^{n} a_{n-l}\left[s^l x_1^{(1)}(s)-\sum_{r=0}^{l-1} s^{l-r-1} x_1^{(1)(r)}(0)\right]=\frac{\sum_{k=2}^{m} b_{k-1} x_k^{(1)}}{s} \quad (22)$$

ただし，$a_{n-l}\big|_{l=n}=a_0=1$ とする。上式を変形すると，その一般式は

$$x_1^{(1)}(s)=\frac{\sum_{l=0}^{n}\left[a_{n-l}\sum_{r=0}^{l-1} s^{l-r-1} x_1^{(1)(r)}(0)\right]+\sum_{k=2}^{m} b_{k-1} x_k^{(1)}}{(s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)s}=\sum_{c=0}^{n}\frac{K_c}{s-\lambda_c} \quad (23)$$

と得られる。ただし，λ_c は特性根であり，$\lambda_0=0$ のとき，$K_0=\sum_{k=2}^{m} b_{k-1} x_k^{(1)}$ とする。

ステップ２： $x_1^{(1)}(s)$ の分母多項式の特性根を求める。

<A> ３次方程式の場合はカルダノ法の適用により，特性根を求める。

$x_1^{(1)}(s)$ の分母の特性根 λ_c $(c=1,2,3)$ を求めることになる。カルダノ法により求まる[6]。

<B> ４次方程式の場合はオイラー法の適用により，特性根を求める。

$x_1^{(1)}(s)$ の分母の特性根 λ_c $(c=1,2,3,4)$ を求めることになる。オイラー法により求まる[6]。

<C> ５次方程式以上の場合はベアストウ法の適用により，特性根を求める。

$x_1^{(1)}(s)$ の分母の特性根 $\lambda_c (c=1,2,\cdots,n; n\geq 5)$ を求めることになる。この場合はベアストウ法により求まる[5]。この場合，$\lambda_0=0$ の根は既にわかっているので，ここでは詳細な計算を省略する。GM(n,m) の係数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ は実係数となる。

式(23)により，

$$F(s)=s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n \quad (24)$$

とおけば，sについてのn次方程式となるので，重根も含めて全部でn個の根をもつ。実係数であることから，複素根は必ず共役のものが対になって存在する。よって，複素根 $\lambda=\alpha+j\beta$ が存在すれば，必ず $\lambda=\alpha-j\beta$ も存在する。逆に共役複素根のみ存在すれば方程式は必ず実係数となる。すなわち，$\alpha\pm j\beta$ が $F(s)$ の根ならば，$F(s)$ は，

$$(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)=s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 \quad (25)$$

という因数をもつ。

いま，２つの実数をp，qとおき，このp，qを用いて次式が得られるとする。

$$F(s)=(s^2+ps+q)g(s)+rs+l \quad (26)$$

$$g(s)=s^{n-2}+b_1 s^{n-3}+\cdots+b_{n-3}s+b_{n-2} \quad (27)$$

ここで，剰余項 $rs+l$ が0になるようなp，qが求めることができれば，$F(s)$ は因数分解ができたことになる。因数 $s^2+ps+q=0$ 根は，$\mathcal{L}$-GM(2,1)の解を求める式により解くことで求まる（付録に示す）。すなわち，$F(s)=0$ の２つの根が得られることになる。同時に，$g(s)$ の各係数 b_i が求められるから，次は $F(s)$ より２次低い $g(s)=0$ を解く問題になる。

同様の計算を行えば順次全ての根が得られる。ベアストウ法は微分操作を用いずに，根の算出ができる点で大きな特徴と言える。

また，式(26)を式(27)代入して展開し，式(24)と等べき係数間の関係を漸化式で表すと

$$b_i=a_i-pb_{i-1}-qb_{i-2}, i=1,2,\cdots,n \quad (28)$$

と書ける。ただし，$b_{-1}=0$，$b_0=1$ とする。

さらに剰余項の係数 r,l と a_i,b_i,p,q の関係は次式で表される。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} r&=a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3} \\ l&=a_n-qb_{n-2} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$r=0,l=0$ となるように pとq を繰り返し計算して求まる。

ステップ３： 未定係数法の適用により，$x_1^{(1)}(s)$ の分子の係数を求める。

$F(s)$ の全ての根を求めた後，各根の実数部と虚数部を比較する。実数部と虚数部が相等しいとき，２つの根は相等しいとする。相等しくないとき，２つの根は相等しくないものとする。式(23)の係数計算については，未定係数法の適用により求まる。

(1) 重根のない場合

係数 K_c は下式により求まる。

$$K_c=[(s-\lambda_c)x_1^{(1)}(s)]\big|_{s=\lambda_c}, c=0,1,\cdots,n \quad (30)$$

上式を逆変換して，離散化すると次のように得られる。

$$x_1^{(1)}(i)=\sum_{c=0}^{n} K_c e^{\lambda_c i}, (i=0,1,\cdots,N) \quad (31)$$

(2) 重根のある場合

重根の部分と重根でない部分にわけ，λ_1 という根がp重根としたとき

$$\hat{x}_1^{(1)}(s)=\frac{k_0}{s}+\frac{k_{1p}}{(s-\lambda_1)^p}+\cdots+\frac{k_{11}}{s-\lambda_1}+\sum_{c=2}^{n-p}\frac{K_c}{s-\lambda_c} \quad (32)$$

となる。重根の部分の係数は，

$$K_{1r}=\frac{1}{(p-r)!}\left[\frac{d^{p-r}}{ds^{p-r}}(s-\lambda_1)^p x^{(1)}(s)\right]\bigg|_{s=\lambda_1}, k=0,1,\cdots,p \quad (33)$$

と得られる。ラプラス逆変換して，離散系形式に表現すると，

$$\hat{x}_1^{(1)}(i)=\left[\sum_{r=1}^{p}\frac{K_{1r}}{(r-1)!}i^{r-1}\right]e^{\lambda_1 i}+\sum_{c=p+1}^{n}K_c e^{\lambda_c i}+\sum_{k=2}^{m}b_{k-1}x_k^{(1)}(i)$$

$$i=0,1,\cdots,N; k=1,2,\cdots,m \quad (34)$$

と得られる。$\mathcal{L}$-GM(n,m)方程式の解は上記の式(34)のように得られる。

そこで，本論文は特に有効と思われる $\mathcal{L}$-GM(1, m)，$\mathcal{L}$-GM(2,1) と$\mathcal{L}$-GM(2, m)の場合だけについて，それぞれの計算結果を付録に示す。

３．3sp補間関数による初期値の決め方

３．１ 3sp補間関数定義[7]

もし関数 $S(x)$ が区間 $[a,b]$ で以下の条件を満足すれ

ば， $S(x)$ は区間 $[a,b]$ で $f(x)$ の３次スプライン関数とよぶ。

(1) $S(x)$，$S'(x)$，$S''(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であり，$S(x)\in C^2[a,b]$ である。

(2) サブ区間 $[x_{i-1},x_i]$ $i=1,2,\cdots,n$ は３次多項式であり，その区間内で，$a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ である。

(3) 節点である関数値 $f(x_i)=y_i$，$i=0,1,\cdots,n$ にて，$S(x)$ は $S(x_i)=y_i$，$i=0,1,\cdots,n$ である。

関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で，節点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 及び節点関数値を仮定する。$f(x)$ の３次スプライン関数 $S(x)$ を求めるために，次の式を満足する必要がある。

$$S(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,n \tag{35}$$

このような $S(x)$ は区間 $[a,b]$ で，分段スプライン多項式とよぶ。

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & x\in[x_0,x_1] \\ S_2(x), & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_n(x), & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases} \tag{36}$$

が成立するならば，$S_k(x)$ はサブ区間 $[x_{k-1},x_k]$ での２点での３次分段スプライン多項式と呼ぶ。かつ

$S_k(x_i)=y_i$，$i=k-1,k;k=1,2,\cdots,n$。

$S(x)\in C^2[a,b]$ のため，次式が得られる。

$$\lim_{x\to x_i^+} S^{(p)}(x)=\lim_{x\to x_i^-} S^{(p)}(x),\ p=0,1,2;i=1,2,\cdots,n-1 \tag{37}$$

ただし，p は導関数の階数である。

$f(x)$ は区間 $[a,b]$ での関数値 y_i 及び導関数値 y'_i，$i=0,1,\cdots,n$ である。$x_{i-1}\le x\le x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，かつ $h_i=x_i-x_{i-1}$ とおくと，求めたい３次スプラインの多項式は次式で与えられる。

$$S(x)=\left[\frac{3}{h_i^2}(x_i-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_i-x)^3\right]y_{i-1}+\left[\frac{3}{h_i^2}(x-x_{i-1})^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_{i-1})^3\right]y_i$$
$$+h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x_i-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_i-x)^3\right]y'_{i-1}-h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x-x_{i-1})^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_{i-1})^3\right]y'_i \tag{38}$$

実際の問題において，スプライン関数の端点は存在する。それに対して，境界条件よって３種類に分類される。その中の一つとして，

$$\left.\begin{aligned} S''(x_0)=f''_0 \\ S''(x_n)=f''_n \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

が成立し,かつ $f''_0=f''_n=0$ であれば，このようなスプライン関数は，自然スプライン関数と呼ぶ。

３．２ $\mathcal{L}$-GM(*n*,*m*)初期値の決め方

$\mathcal{L}$-GM(*n*,*m*), $n\ge 2$ 場合は初期値 $\left.x^{(1)^{(r)}}(t)\right|_{t=0}$，$r=1,2,\cdots,n-1$ を求める必要がある。r は $x^{(1)}(0)$ 導関数の階数である。

伝統的なGMの方法に従えば，$t=1$ の $x^{(1)}(1)$ 値と $t=0$ 時の $x^{(1)}(0)$ 値の間の差を，$t=0$ 時の $x^{(1)^{(1)}}(0)$ とする。すなわち,

$$\left.x(t)^{(1)^{(r)}}\right|_{t=0}=x^{(1)^{(r-1)}}(1)-x^{(1)^{(r-1)}}(0)=x^{(0)^{(r-1)}}(1) \tag{40}$$

となる。これは,不合理である。

提案方法では，直接自然３次スプライン関数による $t=0$ 時の $x^{(1)^{(1)}}(0)$ を求める。合理的であることが特徴である。X_n の最初の一個目のデータを採用する。ただし，$r=1$ 時の導関数を求めるが，$r>1$ の場合は導関数を0とする。

３次スプライン関数による3sp$\mathcal{L}$-GM(2,1)の係数 $\hat{a}_3$ の値の求め方を述べる[8]。基本式は，式(41)である。式(41)において，行列*A*の求め方を下記する。$t=0$ 時の初期値 $x^{(1)^{(1)}}(0)$ は行列*A*の1個目データである。

$$\hat{a}_3=[a_1,a_2,b]^T=\left[[A\vdots B]^T[A\vdots B]\right]^{-1}[A\vdots B]^TX_n \tag{41}$$

ただし,

$$A=\begin{bmatrix}-a^{(1)}(x^{(1)},0)\\-a^{(1)}(x^{(1)},1)\\\vdots\\-a^{(1)}(x^{(1)},n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x'^{(1)}(0)\\-x'^{(1)}(1)\\\vdots\\-x'^{(1)}(n)\end{bmatrix}=-Y' \tag{42}$$

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(1)}(0) & 1\\-x^{(1)}(1) & 1\\\vdots & \vdots\\-x^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix} \tag{43}$$

$$Y'=[B_0^*,B_1^*,B_2^*][1,y'_0,y'_n]^T=B^*Y^* \tag{44}$$

$$B_0^*=A_3^{-1}B_0,\ B_1^*=A_3^{-1}B_1,\ B_2^*=A_3^{-1}B_2$$

$$y'_0=x_1'^{(1)}(0),y'_1=x_1'^{(1)}(1)$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&2&1/2&\ddots&&0&\vdots\\0&1/2&2&1/2&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&1/2&2&1/2&0\\\vdots&0&&\ddots&1/2&2&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&0&1\end{bmatrix} \tag{45}$$

$$B_0=[0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},0]^T \tag{46}$$

$$\beta_i=\frac{3}{2}\left[x^{(1)}(i+1)-x^{(1)}(i-1)\right],\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$B_1=[0,-1/2,0,\cdots,1]^T \tag{47}$$

$$B_2=[0,\cdots,0,-1/2,1]^T \tag{48}$$

$$X_n=Y'' \tag{49}$$

$$\begin{aligned}Y''&=CB^*Y^*+D\\&=G_0+y'_0G_1+y'_nG_2\\&=[G_0,G_1,G_2]\,[1,y'_0,y'_n]^T\end{aligned} \tag{50}$$

$$G_0=CB_0^*+D,G_1=CB_1^*,G_2=CB_2^*$$

$$y'_0 = x'^{(1)}(0), y'_1 = x'^{(1)}(1)$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6[x^{(1)}(1) - x^{(1)}(0)] \\ 3[x^{(1)}(2) - x^{(1)}(0)] \\ 3[x^{(1)}(3) - x^{(1)}(1)] \\ \vdots \\ 3[x^{(1)}(n) - x^{(1)}(n-2)] \\ -6[x^{(1)}(n) - x^{(1)}(n-1)] \end{bmatrix} \tag{52}$$

4．実験と評価

GM による予測の実例を与え，その予測精度を比較する。比較するのはラプラス変換 GM による $\mathcal{L}$ -GM, 3sp $\mathcal{L}$ -GM の２つとする。伝統的な GM は $\mathcal{L}$-GM と同じ予測式であるので，比較対象外とする。

表 1[9]は, 2000 年から 2004 年におけるある町の工業生産額のデータである。2005 年の工業生産額を予測する。この例では，$\mathcal{L}$-GM(2,1)を適用する。

２つの予測モデルの算出結果は下記のようになる。ただし，$i = 0,1,\cdots,n$ である。

$\mathcal{L}$-GM(2,1)：

$$\hat{x}^{(1)}(i) = 92.108e^{-0.034i} + 2.932e^{-30.514i} - 89.327$$

表 1　原始データ[9]

年度	2000	2001	2002	2003	2004	2005
工業生産額	2.874	3.278	3.337	3.390	3.679	?

表 2　精度対比

モデル	誤差評価 $\sum_{i=1}^{5} \varepsilon^2(i)$
$\mathcal{L}$-GM(2,1)	0.033
3sp$\mathcal{L}$-GM(2,1)	0.018

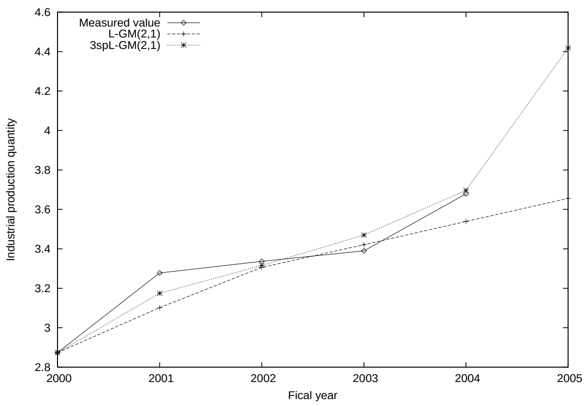

図 1　工業生産額の予測結果

3sp$\mathcal{L}$-GM(2,1)：

$$\hat{x}^{(1)}(i) = -3.056\times10^{-5} e^{2.022i} + 72.568e^{0.043i} - 69.694$$

図 1 に両モデルによる予測結果を示す。**表 2** は，データ点と各モデルの予測値との誤差を表している。$\mathcal{L}$-GM よりも 3sp $\mathcal{L}$ -GM の方がよい近似ができている。

5．実験結果に対する考察

本論文はラプラス変換により，GM の微分方程式を時間領域から周波数領域に変換して解析することで再体系化を行なった。n 階微分方程式の解をコンピュータ計算で容易に得られる特徴がある。

伝統的な GM の微分方程式では，２階以上の場合は初期値決めの不精確問題があり，データマイニング上現実の適用上問題となる。本論文は自然３次スプライン補間関数による初期値決めの不精確問題に対し合理的な改善を行なった。

本実験では $\mathcal{L}$-GM(2,1)と 3sp$\mathcal{L}$-GM の近似精度を比較している。両者は，パラメータの推定方法が異なる。伝統的な GM および $\mathcal{L}$-GM(2,1)は最小二乗法を用いているのに対し，3sp$\mathcal{L}$-GM は三次スプライン補間関数を用いている。

近似精度は表 2 より，3sp$\mathcal{L}$-GM(2,1)の方が良くなっている。これは，３次スプライン補間関数による導関数の算出により近似関数が滑らかになったためである。

３次スプライン補間関数で得られたパラメータ $\hat{a}$ を基に Taylor 逐次近似[8]を適用することができる。Taylor 逐次近似法によりパラメータ $\hat{a}$ をさらに近似することができる。本実験では誤差評価は 0.017 となり，3sp-$\mathcal{L}$GM(2,1)よりもよい近似ができている（**図 2**）。

6．むすび

本論文はラプラス変換による GM の再体系化を提案している。本提案は伝統的な GM で特殊解と一般解を同時に求めない利点を有する。しかも，n 階微分方程式

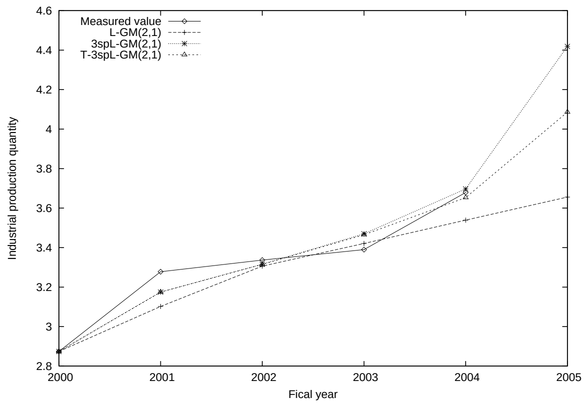

図 2　Taylor 逐次近似法を適用した予測結果

の解が容易に得られる。GM による解析方法を時間領域から周波数領域に移行することで実現することができている。

従来の初期値決め方での不精確の問題に対しての改善策としては，3sp ℒ-GMによる方法を提案している。3sp ℒ-GM 型予測モデルを提案し予測精度上の改善を行なっている。未知という不確定的な事象を予測する時，伝統的な GM と同等以上の効果を得ている。

本提案による新しいアルゴリズムは今後さまざまな分野[10〜13]，例えば環境，医療，生物，気候などでも利用可能である。特に，灰色制御理論において重要な役割を果たす。

参 考 文 献

[1] 鄧聚龍, 灰色控制系統(第二版)，華中理工学大学出版社, 中国，1985.

[2] 永井正武，山口大輔，灰色理論と工学応用方法，共立出版株式会社，2004.

[3] 王学萌，羅建軍，灰色系統予測意思決定モデル構築プログラム集，科学普及出版社，中国，1986.

[4] 陳樹徳，実用企業経営百題，学林出版社，中国，1993.

[5] 細野敏夫，BASIC による高速ラプラス変換，共立出版株式社，1984.

[6] 長嶋秀世，数値計算法改訂 3 版，槇書店発行所，pp.150-165，2000.

[7] 孫家昶，插値関数と図形計算，Hermite 插値，科技出版社，pp.42-82，中国，1982.

[8] 李国棟，山口大輔，水谷晃三，永井正武，“灰色理論 GM における精度改善への新しい提案と評価，”情報処理学会研究報告，FI76-24，pp.177-184，Sept. 2004.

[9] 劉思峰，郭天榜，灰色系統理論及び応用，河南大学出版社，pp.126-133，中国，1991.

[10] 山口大輔，小林俊裕，水谷晃三，赤羽根隆広，永井正武，“消費者の感性を考慮した灰色理論型市場調査法の提案，”感性工学研究論文集，vol.4，no.2，pp.101-106，Aug. 2004.

[11] 李国棟，山口大輔，池本悟，赤羽根隆広，何紳論，永井正武，“灰色理論 GM による感性情報処理モデルの一提案”Proceedings of the 6th Annual Conference of JSKE 2004，F-85，p.258.

[12] 赤羽根隆広，山口大輔，李国棟，池本悟，水谷晃三，何紳論，永井正武，“MAS を適用した知的な感性モデルへの一提案”Proceedings of the 6th Annual Conference of JSKE，F-84，p.257，2004.

[13] 山口大輔，小林俊裕，水谷晃三，永井正武，“灰色理論による構造化モデルの提案(Proposal of System Modeling Method Based on Grey Theory)，”IPSJ SIG Technical Report，AL-96-4，pp.25-32，2004.

付録Ａ ℒ-GM(1,m) [1][2][5]

GM(1,m)の解は，ラプラス変換の適用により求まる。この時のGM(1,m)を，ℒ-GM(1,m)と定義する。

与えられる原始数列をXとおけば，

$$\left.\begin{aligned} &X=\left\{x_i^{(0)}(j)\middle| i\in I, I=1,2,\cdots,m; j=0,1,\cdots,n\right\}\\ &x_i^{(0)}(j)=\left[x_i^{(0)}(0),x_i^{(0)}(1),\cdots,x_i^{(0)}(n)\right]\\ &x_i^{(1)}(j)=\sum_0^j x_i^{(0)}(k)\end{aligned}\right\} \quad \text{A-1}$$

前提条件の式(7)が成立するとき，$x_1^{(1)}(j)$，$i=1$に対して，GM(1,m)の微分方程式を以下に記述する。

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}=\sum_{i=2}^{n}b_{i-1}x_i^{(1)} \quad \text{A-2}$$

式 A-2 の解はラプラス変換により，

$$sx_1^{(1)}(s)-x_1^{(1)}(0)+ax_1^{(1)}(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}$$

$$x_1^{(1)}(s)=\frac{\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}}{s(s+a)}+\frac{x_1^{(1)}(0)}{s+a}=\frac{\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)+\frac{x_1^{(1)}(0)}{s+a} \quad \text{A-3}$$

$$x_1^{(1)}(t)=\left[x_1^{(1)}(0)-\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}(t)\right]e^{-at}+\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}(t) \quad \text{A-4}$$

と得られる(連続系形式)。同様に離散系形式に変形すると，

$$\hat{x}_1^{(1)}(j)=\left[x_1^{(0)}(0)-\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}(j)\right]e^{-aj}+\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{m}b_{i-1}x_i^{(1)}(j)$$

$$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n \quad \text{A-5}$$

ただし，　$\hat{x}^{(1)}(0)=x^{(1)}(0)=x^{(0)}(0)$。

と得られる。

ラプラス変換によるGM(1,m)解の方程式が上述のように，全く同様の結果が得られる。したがって，係数の値$\hat{a}$の算出は，最小二乗法を利用して次のように得られる。

$$\hat{a}=\left[a,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}\right]^T=\left[A^TA\right]^{-1}A^TX_n \quad \text{A-6}$$

ただし，

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(0)+x_1^{(1)}(1)) & x_2^{(1)}(1) & \cdots & x_m^{(1)}(1)\\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(1)+x_1^{(1)}(2)) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_m^{(1)}(2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(n-1)+x_1^{(1)}(n)) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_m^{(1)}(n)\end{bmatrix}$$

$$X_n=[x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\cdots,x_1^{(0)}(n)]$$

$$\hat{x}_1^{(0)}(j)=\hat{x}_1^{(1)}(j)-\hat{x}_1^{(1)}(j-1),\ j=1,2,\cdots,n \quad \text{A-7}$$

$i>n$ の時，式A-6の計算値は予測値となる。

付録Ｂ $\mathcal{L}$-GM(2,1) [3][4][5]

GM(2,1)の解は，ラプラス変換により同様に求まる。この時のGM(2,1)を，$\mathcal{L}$-GM(2,1)と定義する。

与えられるGM(2,1)の微分方程式を以下に記述する。

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b \qquad \text{B-1}$$

ただし，a_1, a_2, b は係数である。これらの係数の値は，次式で算出できる。

$$\hat{a}=[a_1,a_2,b]^T=\left[[A \vdots B]^T[A \vdots B]\right]^{-1}[A \vdots B]^T X_n \qquad \text{B-2}$$

ただし，

$$A=\begin{bmatrix}-a^{(1)}(x^{(1)},1)\\ -a^{(1)}(x^{(1)},2)\\ \vdots \\ -a^{(1)}(x^{(1)},n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(1)\\ -x^{(0)}(2)\\ \vdots \\ -x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(x^{(1)}(0)+x^{(1)}(1)) & 1\\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1\\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}X_n&=\left[a^{(2)}(x^{(1)},1),a^{(2)}(x^{(1)},2),\cdots,a^{(2)}(x^{(1)},n)\right]^T\\ &=\left[x^{(0)}(1)-x^{(0)}(0),x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1)\right]^T\end{aligned}$$

式B-1の解はラプラス変換により次のように得られる。

$$\left[s^2x^{(1)}(s)-sx^{(1)}(0)-x'^{(1)}(0)\right]+a_1\left[sx^{(1)}(s)-x^{(1)}(0)\right]+a_2x^{(1)}(s)=\frac{b}{s}$$

$$\therefore x^{(1)}(s)=\frac{s^2x^{(1)}(0)+[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]s+b}{(s^2+a_1s+a_2)s} \qquad \text{B-3}$$

因数分解法により，式B-3の分母は s の多項式の特性根は３つ得られる。１つは $\lambda_0=0$ とし，他の２つの特性根 $\lambda_{1;2}=(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2})/2$ と仮定すると，以下の３種類の解が得られる。

(1)　$a_1^2-4a_2>0$ の場合

$$x^{(1)}(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-\lambda_1}+\frac{C}{s-\lambda_2} \qquad \text{B-4}$$

とおくと，未定係数法により，

$$\begin{aligned}x^{(1)}(s)=&\frac{b}{\lambda_1\lambda_2}\frac{1}{s}+\frac{\lambda_1^2x^{(1)}(0)+[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]\lambda_1+b}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{1}{(s-\lambda_1)} \qquad \text{B-5}\\ &+\frac{\lambda_2^2x^{(1)}(0)+\left[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)\right]\lambda_2+b}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\frac{1}{(s-\lambda_2)}\end{aligned}$$

と得られ, これをラプラス逆変換により式B-1の離散系形式の解を得られる。

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(i)=&\frac{b}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{\lambda_1^2x^{(0)}(0)+[a_1x^{(0)}(0)+x'^{(0)}(0)]\lambda_1+b}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 i} \qquad \text{B-6}\\ &+\frac{\lambda_2^2x^{(0)}(0)+\left[a_1x^{(0)}(0)+x'^{(0)}(0)\right]\lambda_2+b}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}e^{\lambda_2 i}\end{aligned}$$

(2)　$a_1^2-4a_2=0$ の場合

$$x^{(1)}(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-\lambda_1}+\frac{C}{(s-\lambda_1)^2} \qquad \text{B-7}$$

とおくと，未定係数法により，

$$A=\frac{s^2x^{(1)}(0)+[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]s+b}{(s-\lambda_1)^2}\Big|_{s=0}=\frac{b}{\lambda_1^2} \qquad \text{B-8}$$

$$\begin{aligned}B&=\frac{d}{ds}\left\{\frac{s^2x^{(1)}(0)+\left[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)\right]s+b}{s}\right\}\Big|_{s=\lambda_1}\\ &=x^{(1)}(0)-\frac{b}{\lambda_1^2}\end{aligned} \qquad \text{B-9}$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{s^2x^{(1)}(0)+\left[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)\right]s+b}{s}\Big|_{s=\lambda_1}\\ &=\frac{\lambda_1^2x^{(1)}(0)+\left[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)\right]\lambda_1+b}{\lambda_1}\end{aligned} \qquad \text{B-10}$$

と得られ，これらの式をラプラス逆変換して，式B-1の離散系形式の解を次のように得られる。

$$\hat{x}^{(1)}(i)=\frac{b}{\lambda_1^2}+\left[x^{(0)}(0)-\frac{b}{\lambda_1^2}\right]e^{\lambda_1 i}+\frac{\lambda_1^2x^{(0)}(0)+\left[a_1x^{(0)}(0)+x'^{(0)}(0)\right]\lambda_1+b}{\lambda_1}ie^{\lambda_1 i} \qquad \text{B-11}$$

(3)　$a_1^2-4a_2<0$ の場合

特性根 $\lambda_{1;2}=\dfrac{-a_1\pm j\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2}=\alpha\pm j\beta$ とおけば，式B-5より，

$$\begin{aligned}x^{(1)}(s)&=\frac{s^2x^{(1)}(0)+[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]s+b}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}\\ &=\frac{s^2x^{(1)}(0)}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}+\frac{[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]s}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}+\frac{b}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}\end{aligned} \qquad \text{B-12}$$

となる。上式を別々にラプラス逆変換を行なうことで，それぞれの離散系形式の式が得られる。

〈A〉 第一項の部分分数の解

$$\frac{s^2x^{(1)}(0)}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}=\frac{(s-\alpha)x^{(1)}(0)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\alpha x^{(1)}(0)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \qquad \text{B-13}$$

$$\therefore \quad x^{(1)}(i)_A=x^{(1)}(0)e^{\alpha i}\cos\beta i+\frac{ax^{(1)}(0)}{\beta}e^{\alpha i}\sin\beta i \qquad \text{B-14}$$

〈B〉 第二項の部分分数の解

$$\frac{[a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)]s}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]}=\frac{a_1x^{(1)}(0)+x'^{(1)}(0)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \qquad \text{B-15}$$

$$\therefore \quad x^{(1)}(i)_B = \frac{a_1 x^{(1)}(0) + x'^{(1)}(0)}{\beta} e^{\alpha i} \sin \beta i \qquad \text{B-16}$$

<C> 第三項の部分分数の解

$$\frac{b}{s[(s-\alpha)^2+\beta^2]} = \frac{b}{s(s-\alpha-j\beta)(s-\alpha+j\beta)} \qquad \text{B-17}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-\alpha-j\beta} + \frac{C}{s-\alpha+j\beta}$$

$$\frac{A}{s} = \frac{b}{\alpha^2+\beta^2}\frac{1}{s}$$

$$\frac{B}{s-\alpha-j\beta} + \frac{C}{s-\alpha+j\beta} = \frac{b/(2j\beta(\alpha+j\beta))}{(s-\alpha-j\beta)} + \frac{-b/(2j\beta(\alpha-j\beta))}{(s-\alpha+j\beta)}$$

と得られることから，ラプラス逆変換により，式B-1の離散系形式の解は次式のよう得られる。

$$x^{(1)}(i)_C = \frac{b}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{b}{2j\beta(\alpha+j\beta)} e^{(\alpha+j\beta)i} + \frac{b}{-2j\beta(\alpha-j\beta)} e^{(\alpha-j\beta)i}$$

$$= \frac{b}{\alpha^2+\beta^2} + e^{\alpha i}\left[\frac{b}{2j\beta(\alpha+j\beta)} e^{j\beta i} + \frac{b}{-2j\beta(\alpha-j\beta)} e^{-j\beta i}\right]$$

$$= \frac{b}{\alpha^2+\beta^2} + e^{\alpha i}\left[\frac{-b/2}{\alpha^2+\beta^2}(e^{j\beta i}+e^{-j\beta i}) - \frac{b\alpha/2\beta}{\alpha^2+\beta^2} j(e^{j\beta i}-e^{-j\beta i})\right]$$

$$= \frac{b}{\alpha^2+\beta^2} + e^{\alpha i}\left(-\frac{b}{\alpha^2+\beta^2}\cos\beta i + \frac{b\alpha/\beta}{\alpha^2+\beta^2}\sin\beta i\right)$$

B-18

式B-12をラプラス逆変換にすると，式B-1の離散系形式の解も同様に得られる。この計算から，

$$\hat{x}^{(1)}(i) = x^{(1)}(i)_A + x^{(1)}(i)_B + x^{(1)}(i)_C = e^{\alpha i}\left[x^{(0)}(0) - \frac{b}{\alpha^2+\beta^2}\right]\cos\beta i$$

$$+ e^{\alpha i}\left[\frac{\alpha x^{(0)}(0) + a_1 x^{(0)}(0) + x'^{(0)}(0)}{\beta} + \frac{b\alpha/\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right]\sin\beta i + \frac{b}{\alpha^2+\beta^2}$$

B-19

と得られる。ただし，$\hat{x}^{(1)}(0) = x^{(1)}(0) = x^{(0)}(0)$ とする。

£ -GM(2,1)からは，初期値 $x^{(1)^{(r)}}(0)$ を求める必要がある。$x^{(1)^{(r)}}(0)$ は，$x^{(1)}(0)$ の r（$=1,2,\cdots,n$）階導関数である。本論文では３次スプライン関数による $r=1$ 時の導関数を求める。$r>1$ の場合は導関数を 0 とする。詳細は節 3.2 に述べている。

付録Ｃ　£-GM(2,m)

GM(2,m)の解は，ラプラス変換により同様に求まる。この時のGM(2,m)を，£-GM(2,m)と定義する。

GM(2, m)方程式の場合は，

$$\frac{d^2x_1^{(1)}}{dt^2} + a_1\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + a_2 x_1^{(1)} = \sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)} \qquad \text{C-1}$$

と記述する。ただし，係数 $\hat{a}$ の値は次式で得られる。

$$\hat{a} = [a_1, a_2 \vdots b_1, b_2, \cdots; b_{m-1}]^T = [[A \vdots B]^T [A \vdots B]]^{-1} [A \vdots B]^T X_n \qquad \text{C-2}$$

A，X_n はそれぞれ既知の公式であり，B は次式のとおりである。

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(0) + x_1^{(1)}(1)) & x_2^{(1)}(1) & \cdots & x_m^{(1)}(1) \\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(1) + x_1^{(1)}(2)) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_m^{(1)}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x_1^{(1)}(n-1) + x_1^{(1)}(n)) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_m^{(1)}(n) \end{bmatrix} \qquad \text{C-3}$$

式 C-1 の解はラプラス変換により，

$$[s^2 x_1^{(1)}(s) - s x_1^{(1)}(0) - x_1'^{(1)}(0)] + a_1[s x_1^{(1)}(s) - x_1^{(1)}(0)] + a_2 x_1^{(1)}(s)$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}}{s} \qquad \text{C-4}$$

と得られる。ゆえに，式 C-1 の離散系形式の解は下記の三種類が得られる。

(1)　$a_1^2 - 4a_2 > 0$ の場合

$$\hat{x}_1^{(1)}(j) = \frac{\lambda_1^2 x_1^{(0)}(0) + [a_1 x_1^{(0)}(0) + x_1'^{(0)}(0)]\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 j}$$

$$+ \frac{\lambda_2^2 x_1^{(0)}(0) + [a_1 x_1^{(0)}(0) + x_1'^{(0)}(0)]\lambda_2 + \sum_{i=2}^{n} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 j} + \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_1 \lambda_2}$$

(2)　$a_1^2 - 4a_2 = 0$ の場合

$$\hat{x}_1^{(1)}(j) = \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_1^2} + \left[x_1^{(0)}(0) - \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_1^2}\right] e^{\lambda_1 j}$$

$$+ \frac{\lambda_1^2 x_1^{(0)}(0) + [a_1 x_1^{(0)}(0) + x_1'^{(0)}(0)]\lambda_1 + \sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\lambda_1} i e^{\lambda_1 j}$$

(3)　$a_1^2 - 4a_2 < 0$ の場合

$$\hat{x}_1^{(1)}(j) = e^{\alpha j}\left[x_1^{(0)}(0) - \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\alpha^2 + \beta^2}\right]\cos\beta j + e^{\alpha j}$$

$$+ \left[\frac{\alpha x_1^{(0)}(0) + a_1 x_1^{(0)}(0) + x_1'^{(0)}(0)}{\beta} + \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)\alpha/\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right]\sin\beta j + \frac{\sum_{i=2}^{m} b_{i-1} x_i^{(1)}(j)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ただし，$x_1^{(0)}(0) = x_1^{(1)}(0)$，$x_1'^{(0)}(0) = x_1'^{(1)}(0)$ とする。