

粒性、表面張力、自由表面を有する流体のグラフィックシミュレーション

清弘智昭

(山梨大学工学部)

安居院 猛

(東京工業大学工学部)

1. はじめに

インクジェットにおける液滴形成過程の理論的な解析は、主として圧電素子の変形により排除された液体の体積と、その液体の持つ慣性を用いておこなわれている⁽¹⁾⁽²⁾。この手法は実験結果と比較的良好一致を見ているが、一方でノズルやインク供給部などの形状がインク滴形成におよぼす影響を知ることが困難である。ここでは、流体の直接数値解法の1つであるMAC(Marker and Cell)法を用いて、オンデマンドインクジェットの液滴形成過程のシミュレーションをおこなった。

MAC法はおもに水理現象の解析のために開発された手法であり、とくに自由表面を持つ流体の挙動を調べるのに有効である。またMAC法は、マーカー粒子と呼ばれる仮想粒子によって、流体の挙動を直接可視化できるなどの特長を持っている。MAC法はマーカー粒子の存在によって自由表面の存在を知る初期の方式⁽³⁾に対して表面の形状を方程式から求めるもの⁽⁴⁾、任意の可動境界に適用可能な方式⁽⁵⁾、2層流体境界面のRayleigh-Taylor型不安定問題の成長過程の解析に用いたもの⁽⁶⁾などがある。一方、オンデマンドインクジェットでは、表面張力を持つ自由表面、圧力インパルスを加えるための圧電セル部分など各種の要素がからみ合っている。ここでは、これらの要素を含むシステムのMAC法による解析を試みた。MAC法は流体の挙動を直接可視化できるため、従来、実験などでは直接観察が難しい圧力チェンバ内の流体の挙動を調べることも可能である。これによりノズルや圧力チェンバの形状の液滴形成に与える影響などを知る

ことが可能になる。

2. インクジェットヘッド

インクジェットは、インクを微細な液滴にして飛翔させ記録する装置である。ここで解析しようとするインクジェットヘッドの断面図を図1に示す。イン

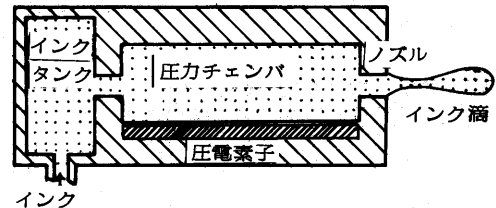


図1 インクジェットヘッドの断面図

クはインク溜めを通して圧力チェンバに導かれている。圧電素子に電圧を加えると圧電素子は上方に動き、圧力チェンバ内で圧電素子の動きに対応した圧力波が発生する。圧力波は圧力チェンバ内を伝わり、右端のノズルからインクを噴出させる。噴出したインクは表面張力により細くくびれてちぎれ、インク滴となって飛翔して紙に記録される。

このヘッドは3次元構造であるが、3次元の解析は計算点が増加し解析が困難である。ここではヘッドの断面構造に着目し2次元モデルにより解析を進めることにする。これは図1で奥行き方向を無限大にしたシステムに相当するが実際の装置においても奥行きは断面に対して10倍以上の深さを持っているので、2次元モデル化は妥当であると考えられる。

ヘッドの計算では、断面空間を格子状に区切り、セルと呼ばれる各々の格子を1単位として計算を進める。計算セルはセルの置かれた空間的な位

置によって図2に示すように数種類に分類され、各々境界条件が異なる。自由表面と接するセルは自由表面セル(S)となり、同様にして固定壁境界セル(RB)圧電素子により駆動される可動境界セル(MB)、周辺すべて流体に囲まれている流体セル(F)、インクタンクのように充分大きな流体と接して、インクの流入・流出をおこなう、流出入セル(IOB)がある。計算にあたっては各セルについて各々計算法を変えなければならない。以下に各セルの計算法について述べる。

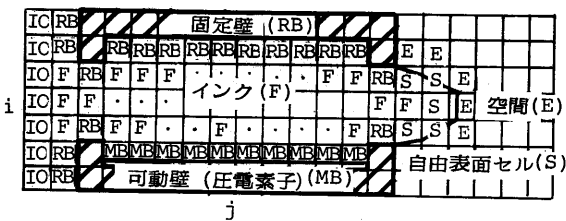


図2 計算セル

3. MAC法のアルゴリズム

MAC法は非圧縮性流体に対する時間従属な Euler 方程式を解く問題で、特に自由表面を有する流れの解析に対して有効な方法である。MAC法では直接、流速成分と圧力を従属変数として、各時間ステップごとの計算を進める。このとき求める速度と圧力は、セル単位で連続方程式を満たす必要があるが、これに対しては反復式を用いて値の調整をおこなう。このとき反復式はセルへの流体の流入量が増加すると圧力が増加するようにとる。

MAC法のもう一つの特徴は、マーカと呼ばれるディスプレイのための粒子を用いることである。マーカ粒子は流体の任意の部分におかれた仮想粒子であり、各粒子は時間ステップごとにマーカを囲むセルの流速成分の内挿値にしたがって移動する。したがって、

マーカ粒子の軌跡をたどることにより流体の動きを観察することが可能になる。

自由表面に働く表面張力を求めるためには自由表面の形状を知る必要がある。ここでは自由表面の形状の決定は先に述べたマーカ粒子は用いず、表面形状を追跡するための表面マーカを別に用意した、表面マーカを順次結ぶことにより自由表面の形状が得られる。さらにセル単位で計算をおこなう都合上、求めた自由表面とセルの端との交点を求め、その点を順次結ぶことにより得られたセグメントを導入し、このセグメントについて表面張力を求め、その結果を用いて速度、圧力成分を求める。

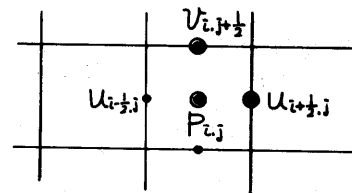
4. 有限差分式

基本となる方程式は Navier-Stokes の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

である。ここで ν は動粘性係数、 X, Y は外力であり、ここでは $X=0, Y=0$ とする。計算セルを空間上に図2のようにとり、 u, v, p それぞれの計算格子点を図3のように定めると(1)(2)式の前進差分式は次のようになる。



● セル i, j で求める値

図3 速度・圧力成分の配置

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) \quad (3)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \eta_{i+\frac{1}{2},j}^m = & u_{i+\frac{1}{2},j} - \delta t \left\{ \frac{(u_{i,j}^m)^2 - (u_{i+1,j}^m)^2}{\delta x} \right. \\ & + \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m)(v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m) - (u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)(v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)}{\delta y} \\ & + \nu \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^m + u_{i+\frac{1}{2},j}^m - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^m}{\delta x^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^m + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^m - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^m}{\delta y^2} \right) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^m = & v_{i,j+\frac{1}{2}} + \delta t \left\{ \frac{(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)(v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)}{\delta x} \right. \\ & - \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)(v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m)}{\delta x} \\ & + \frac{(v_{i,j}^m)^2 - (v_{i,j-1}^m)^2}{\delta y} \\ & + \nu \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{\delta x^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^m + v_{i,j+\frac{1}{2}}^m - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^m}{\delta y^2} \right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

P はインク密度、 δx 、 δy はそれぞれセルの x 、 y 方向の大きさ、 ν はインクの動粘性係数である。また格子点上にない u 、 v の値は、隣接した格子点の値を用いて次のようにあらわす。

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j}^m &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j}^m + u_{i-\frac{1}{2},j}^m) \\ u_{i+1,j}^m &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{3}{2},j}^m + u_{i+\frac{1}{2},j}^m) \\ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j}^m + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^m) \\ u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j}^m + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^m) \\ v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2}(v_{i,j+\frac{1}{2}}^m + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^m) \\ v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^m &= \frac{1}{2}(v_{i,j-\frac{1}{2}}^m + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^m) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

圧力 $P_{i,j}$ は(3)、(4)式によって得られる速度成分 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 、 $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ が連続方程式を満足するように決定する必要がある。

$$(\nabla \cdot \nabla^{n+1})_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\delta y} = 0 \quad (8)$$

圧力を求める方法には(3)(4)式を x 、 y で偏微分して得られたPoisson方程式を用いるものなどがあるが⁽³⁾、ここでは次の反復式を用いて P と u 、 v を同

時に求めている⁽⁵⁾。

$$P_{i,j}^{(k+1)} = P_{i,j}^{(k)} - \delta t (\nabla \cdot \nabla^{n+1})_{i,j}^{(k)} \quad (9)$$

ここで $P^{(k+1)}$ は圧力の $k+1$ 反復値、 δt は緩和パラメータである。

以上の(3)、(4)、(8)、(9)式を用いた反復回数 k における手順は次のようになる。

(I) (3)、(4)式より $(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1})^{(k)}$ 、 $(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1})^{(k)}$ を求める。

(II) $(\nabla \cdot \nabla)^{n+1}$ の値を計算する。

(III) 反復式(9)に代入して $P_{i,j}$ の $k+1$ 反復値を求める。

反復値 $P^{(k+1)}$ が次式を満足するまで、

(I)~(III)の反復を繰り返す。

$$\frac{|P_{i,j}^{(k+1)} - P_{i,j}^{(k)}|}{P_{i,j}^{(k)}} < \varepsilon \quad (10)$$

ここで ε は収束誤差であり、本研究では $\varepsilon = 0.00005$ としている。

この反復法が収束するためには次の条件を満足する必要がある。すなわち、(3)、(4)式を(9)に代入して、von Neumannの解析法を用いると、 $\delta x = \delta y$ のとき

$$\delta t \leq \frac{\rho \delta^2}{4 \delta t} \quad (11)$$

が得られる。 δt は(11)式を満足する範囲内でなるべく大きな値を取るようにし、より早い収束が得られるようにする。

5. 表面張力が働く自由表面

5.1 表面マーカとセグメント

ノズルから噴出したインクは、外部物体などにより形状や速度に対する拘束を受けない自由表面を形成する。この自由表面に対する境界条件は、流体表面における表面張力と流体の圧力との釣り合いと、自由表面のある境界セルにおける連続方程式から導かれる。

表面張力は流体の自由表面の形状により決定される。表面の形状を知るために、表面マーカと表面セグメントを

導入する。表面マーカーは、流体の運動を表すマーカーと同様に、マーカーを囲むセルの流速成分の内挿値を用いて移動する。表面マーカーを結ぶ曲線が自由表面となる。この曲線は、自由表面の形状は詳細に表わすことができるが要求される圧力分布と境界の形状、速度などと関係づけることは困難である。そのため、ここでは表面セグメントを導入する。表面セグメントは図4に示すように、連続する表面マーカーを直線で結び、その直線とセルの縁との交点をすべて求め、その交点を結んだ直線である。表面セグメントは計算しているセルと1対1対応し、セルは自由表面セルと呼ばれる。速度、圧力などの成分は表面セグメントの中央に取る。この時、各成分は表面セグメントと直交する。

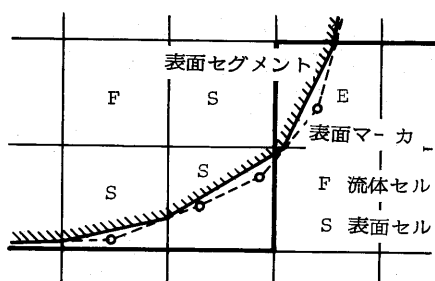


図4 表面マーカーと表面セグメント

5.2 表面張力

r_i を表面を表わす位置ベクトル、 r を任意のベクトルとすると表面張力は、 $\gamma(r)$ を表面の曲率、 T を表面張力係数としたとき次式で与えられる。

$$f = T \sigma(r - r_i) \gamma(r) n \quad (12)$$

$$\sigma(r - r_i) = \begin{cases} 1 & r = r_i \\ 0 & r \neq r_i \end{cases}$$

n : 法線ベクトル

ここでは、表面の曲線は表面セグメントによる接線近似によって表わされる。表面セグメント上の表面張力の有

限差分形式は次式になる。

$$f_n = T \frac{t_n - t_{n-1}}{S_n} \quad (13)$$

ここで t_n は接線ベクトルである。

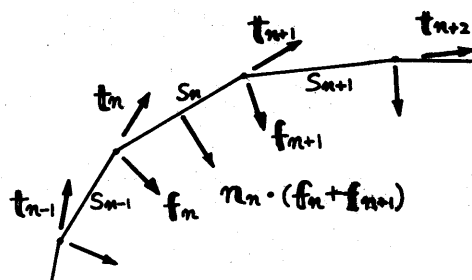


図5 接線ベクトル

また f_n は表面セグメント $n+1$ と n の間に加わる表面張力である。セグメント n に加わる表面張力 f_n は

$$f_n = n_n \cdot f_{n+1} \quad (14)$$

である。ここで n_n はセグメント n における法線ベクトルであり、セグメント n には、 n_{n-1} による表面張力も加わるので、最終的な表面張力は(15)式になる。

$$f_n = n_n \cdot (f_n + f_{n+1}) \quad (15)$$

5.3 表面セル

表面セルにおける境界条件は、連続方程式と、流体表面における表面張力と圧力の釣り合いから導びかれる。流体表面における圧力は、単位長さあたりの表面張力 f_n/S_n に等しくなければならない。この圧力は同じセグメント上では、位置に関わりなく等しい値を取る。表面セルにおける圧力は、図6に示すようにセルの圧力中心 $P_{i,j}$ からそれぞれ垂直、水平に伸ばした直線と流体表面までの距離、および隣接する流体の満たされたセルの圧力から補間法により求める。

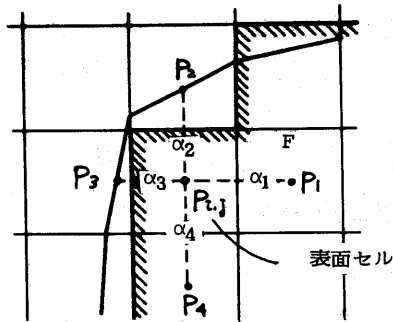


図6 圧力の補間

$\alpha_1 \sim \alpha_4$, $P_1 \sim P_4$ をそれぞれ図6のように定義する。ここで $\alpha_1 \sim \alpha_4$ は、求めたいセルに隣接したセルが空間セル(E)であるなら表面セグメントまでの距離、それ以外なら、圧力を計算するセルの中点までの距離である。また、 $P_1 \sim P_4$ は $\alpha_1 \sim \alpha_4$ に対応する点の圧力である。圧力 $P_1 \sim P_4$ に対してそれぞれTaylor展開をおこない、3次以上の項を無視すると次式が得られる。

$$P_1 = P_{i,j} + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} \alpha_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i,j} \alpha_1^2 \quad (16)$$

$$P_2 = P_{i,j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{i,j} \alpha_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{i,j} \alpha_2^2 \quad (17)$$

$$P_3 = P_{i,j} + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i,j} \alpha_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_{i,j} \alpha_3^2 \quad (18)$$

$$P_4 = P_{i,j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{i,j} \alpha_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_{i,j} \alpha_4^2 \quad (19)$$

(16), (17), (18), (19)式から $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)$ を求める。一方(1)(2)式を x, y で微分して加えて得られたPoisson方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = R_{i,j} \quad (20)$$

$$R = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

に代入すると $P_{i,j}$ が求まる。

$$P_{i,j} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{\alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3} \left\{ \frac{\alpha_3 P_1 + \alpha_1 P_3}{\alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_3)} + \frac{\alpha_2 P_4 + \alpha_4 P_2}{\alpha_2 \alpha_4 (\alpha_2 + \alpha_4)} \right\} - R_{i,j} \quad (21)$$

$P_{i,j}$ は式(20)の差分式である。

表面セルにおける圧力が求まり、次に速度 u, v を求める。自由表面セルにおける速度計算は境界の数, 境界の位置によって異なる。

(a) 空間との境界が1面するとき

①自由表面右

$v_{i,j+\frac{1}{2}}$ を式(4)から求めるとき、図7.1のように $v_{i+1,j+\frac{1}{2}}$ の値が未定である。自由表面は、接続方向の速度に対して何等の拘束も与えないとして次式の関係を得る。

$$v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (22)$$

式(21)を式(4)に代入して $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ が求まる。 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ は連続方程式(8)と $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ を用いて求める。

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\delta x}{\delta y} (v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \quad (23)$$

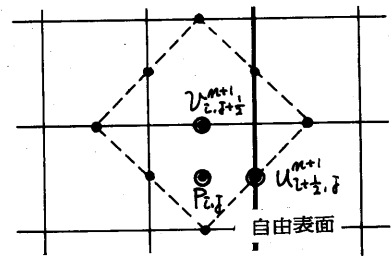


図7.1 境界が右の表面セル

②自由表面左

図7.2から $v_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ が未定であるから次式により求め、(3)(4)式により、 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$, $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ を求める。

$$v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (24)$$

(3)(4)は左方から計算を進めるので、 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ の値を求める必要がある。 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ は連続方程式より求める。

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + \frac{\delta x}{\delta y} (v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \quad (25)$$

図7.2において、斜線は流体のある側を、また各格子点を結ぶ直線のうち、破線は u に関する値の関連、一点鎖線は v に関する値を示している。

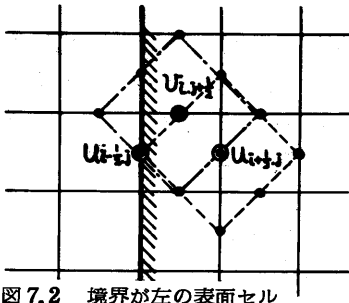


図 7.2 境界が左の表面セル

③ 自由表面上

$u_{i+1/2,j}^{n+1}$ を次式で求め、(3)式により、 $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ を求める。

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n \quad (26)$$

$v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ は連続方程式より求める。

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \frac{\delta y}{\delta x} (u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}) \quad (27)$$

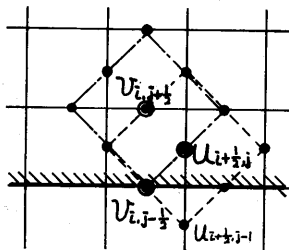
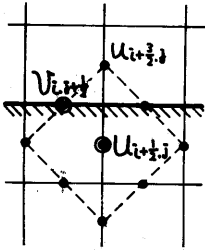


図 7.3 境界が上の表面セル 図 7.4 境界が下の表面セル

④ 自由表面下

$u_{i+1/2,j-1}^n$ を求め(3)式から $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ を求める。 $v_{i,j+1/2}^{n+1}$ を(4)式から求める。

$$u_{i+1/2,j-1}^n = u_{i+1/2,j}^n \quad (28)$$

(2)と同様にして $v_{i,j-1/2}^{n+1/2}$ を連続方程式より求める。

$$v_{i,j-1/2}^{n+1} = v_{i,j-1/2}^{n+1/2} + \frac{\delta y}{\delta x} (u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}) \quad (29)$$

(b) 空間との境界が2面のとき

① 自由表面左と上

$$u_{i+1/2,j+1}^n = u_{i+1/2,j}^n \quad (30)$$

の関係を用いて(3)式から $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ を求める。 $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ が未定なので連続方程式から $v_{i,j+1/2}^{n+1}$ を求めることはできない。ここでは、

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^{n+1/2}, \quad u_{i-1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^{n+1} \quad (31)$$

とする。

② 自由表面右と上

$u_{i+1/2,j}^{n+1/2}, v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ は直ちに次式より求める。

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i-1/2,j}^{n+1}, \quad v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j-1/2}^{n+1} \quad (32)$$

③ 自由表面左と下

$$u_{i+1/2,j-1}^n = u_{i+1/2,j}^n, \quad v_{i-1/2,j+1/2}^n = v_{i,j+1/2}^n \quad (33)$$

とにおいて(3),(4)式から $u_{i+1/2,j}^{n+1/2}, v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ を求める。

④ 自由表面右と下

$$v_{i+1/2,j-1/2}^n = v_{i,j+1/2}^n \quad (34)$$

とおき(4)式から $v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ を求める。

$$u_{i,j+1/2}^{n+1} = u_{i,j-1/2}^{n+1}, \quad v_{i-1/2,j}^{n+1} = v_{i+1/2,j}^{n+1} \quad (35)$$

⑤ 自由表面が上と下、あるいは左と右のとき

上下が自由表面の場合は流体が柱状に伸びて移動している状態である。柱の表面における速度のうち、柱と垂直な方向の速度成分については次式より求める。

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i-1/2,j+1/2}^{n+1}, \quad v_{i,j-1/2}^{n+1} = -v_{i,j+1/2}^{n+1} \quad (36)$$

また $u_{i+1/2,j}^{n+1}$ については連続方程式より求める。

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i-1/2,j}^{n+1} - \frac{2\delta x}{\delta y} v_{i,j+1/2}^{n+1} \quad (37)$$

左右に自由表面が来るときも同様にして求める。

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j-1}^{n+1} \quad (38)$$

$$u_{i-1/2,j}^{n+1} = -u_{i+1/2,j}^{n+1} \quad (39)$$

$$v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j-1/2}^{n+1} - \frac{2\delta y}{\delta x} u_{i+1/2,j}^{n+1} \quad (40)$$

(c) 空間が3面のとき

3面が空間に面する場合は上下、左右が空間に面する場合と同様に取扱う。ただし流体に右で接するセル

と上で接するセルの場合には、 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 、 $v_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ はそれぞれ $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 、 $v_{i+\frac{1}{2},j}$ を用いる。残りの成分は連続方程式により導く。上で流体に接するセルの場合次式のようになる。

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+1} \quad (41)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\delta y}{\delta x} v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$$

他の場合も同様にして求める。

(d) 空間が4面のとき

セルのまわりがすべて空間であるならば、そのセルは孤立した液滴をなしていることを意味している。したがって重力の影響を無視すれば、そのセルの速度は保存される。

6. 固定壁境界セル

固定壁との境界セルにおいて(3)(4)で速度成分を求める場合、壁外の速度が必要である。粘性流体の場合壁と水平な向きに速度成分は壁上で0にならなければならない。これから、壁に平行な速度成分で、壁の外側のセルの速度は図6に示すように大きさが同じで、方向が逆になる。また壁に直交する成分も壁上で0になるが、壁の外側のセルにおいても計算上連続方程式が成立しなければならないので、これから速度

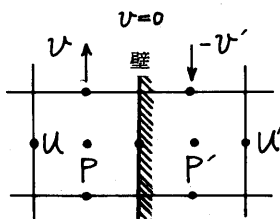


図8 固定壁の境界条件

の方向は壁の内と外で変化しないものとする。

(3)(4)式では壁の外側の速度 P' も必要である。図8に示す。垂直な

壁の場合(3)式に上で求めた速度を代入して次式を求める。

$$P' = P \pm \nu \frac{2u}{\delta x} \quad (42)$$

符号は右が壁のとき正、左が壁のとき負である。水平な壁に対しては同様にして次式が得られる。

$$P' = P \pm \nu \frac{2v}{\delta y} \quad (43)$$

壁が上のとき正、下のとき負である。以上で求めた u 、 v 、 P を用いて流体セルと同様の手順を用いて u^{n+1} 、 v^{n+1} 、 P^{n+1} を決定する。

7. 可動壁境界

可動壁境界セルにおける基本概念は可動性の速度と、流体の速度成分のうち可動壁に垂直でかつ可動壁上の値が等しくなければならないことである。これより反復式(39)を得る。

$$P_{i,j}^{(k+1)} = P_{i,j}^{(k)} - \frac{\delta \tau'}{\delta} (\nabla_p^{(k)} - \nabla_b) \cdot n \quad (44)$$

ここで添字 k は反復回数、 $\delta \tau'$ は緩和パラメータ、 $\delta = \delta x = \delta y$ 、 ∇_p は流体の可動壁上にありかつ垂直な速度成分、 ∇_b は可動壁の移動速度、 n は法線ベクトルである。(40)式は、セルに流入する流体より可動壁の移動により押しつけた体積の方が大きい時圧力が上昇、逆の時下降することを意味している。

可動壁境界における反復手順は次のようになる。

(I) (3)(4)式に必要なセル外の点を求める。このとき壁上の接線方向の速度成分が0の条件、および連続方程式を用いる。

(II) (3)(4)式で速度を求める。

(III) 内挿法により ∇_p を求める。

(IV) (48)式により $P_{i,j}^{n+1}$ を計算する。

(V) $|P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}| / P_{i,j}^{n+1} < \epsilon$ になるまで

(I)~(IV)を繰り返す

8. 流入、流出境界

流体が流入したり流出したりする境界セルは、流の上流や下流の状態がわからないと一意に決定することはでき

ない。ここでは流入セル、流出セルは大きなインク溜めや空間に接しているため境界セルの近隣は安常状態であると仮定してセルの値を定めている。したがって流出入セルはその隣のセルと同じ値を取る。

9. MAC法の計算手順

MAC法の計算手順の流れ図を図9に示す。(3)(4)式の計算において $\bar{u}$ と $\bar{v}$ は時間の節約のため反復法のループの前で計算をおこな

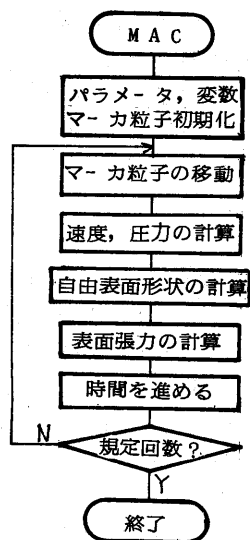


図9 MAC法流れ図

い反復ループの中での計算はおこなわない。 $\bar{u}$, $\bar{v}$ をループの中に入れて計算した値との比較においても、収束誤差 ϵ の範囲に収まるので問題は生じないと考えられる。

10. 計算結果

図10に計算結果を示す。セルの数は横75、縦18である。また各パ

ラメータを次に示す。

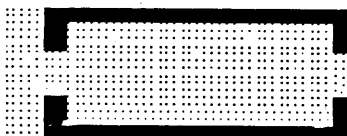
$$T = 64 \times 10^{-3} \text{ N/m}, \gamma = 2.35 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$P_0 = 7 \times 10^2 \text{ Pa}, P = 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

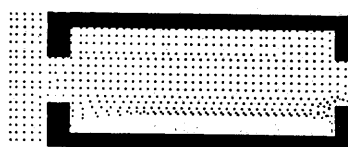
$$\delta x = \delta y = 25 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\text{ノズル径 } 100 \text{ } \mu\text{m}$$

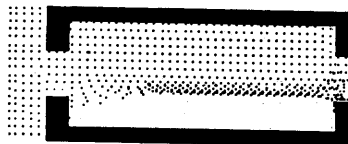
$$\text{前進時間周期 } 3 \text{ } \mu\text{s}$$



(a) $t = 0.0 \text{ } \mu\text{s}$



(b) $t = 21 \text{ } \mu\text{s}$



(c) $t = 33 \text{ } \mu\text{s}$

図10 計算結果

11. まとめ

オンデマンドインクジェット液滴形成機構の計算機シミュレーションの一手法について示した。MAC法を用いれば実験によって観測が困難であった圧力チェンバ内の流体の挙動などを知ることができる。一方、インク滴形成のシミュレーションにおいては、自由表面の形状は表面マーカーを順次結ぶことによりおこなっている。したがって液柱が分離すると表面マーカーの順序を入れ換ええない限りその先の計算を実行することはできない。これはス点追跡法などの外形認識をおこなう必要があると考えられる。

参考文献

- 1) J.B.BEASLEY: Model for Fluid Ejection and Refill in an Impulse Drive Jet, Photographic Sci. & Eng., Vol.21(1977), 2, pp.78-82.
- 2) E.STEMME and S.LARSSON: The Piezoelectric Capillary Injector, IEEE Trans. Electron Devices, Vol.ED-20(1973), 1, pp.14-19.
- 3) F.H.HARLOW and J.E.WELCH: Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Phy. of Fluids, Vol.8(1965) 12, pp.2182-2189.
- 4) R.K.CHAN and R.L.STREET: A Computer Study of Finite-Amplitude Water Waves, J. of Compt. Phy., Vol.6(1970), pp.68-94.
- 5) J.A.VIECELLI: A Computing Method for Incompressible Flows Bounded by Moving Walls, J. of Compt. Phy., Vol.8(1971), pp.119-143.
- 6) B.J.DALY and W.E.PRACH: Numerical Study of Density-Current Surges, Phy. of Fluid, Vol.11(1968), 1, pp.15-30.