

異方性反射モデルに関する検討

高木淳⁺ 横井茂樹⁺⁺ 鶴岡信治⁺ 木村文隆⁺ 三宅康二⁺
 (⁺三重大学工学部 ⁺⁺名古屋大学工学部)

1. まえがき

不透明な物体上での光の反射は一般に2種類に分けられる。一つは拡散反射(内部反射)でもう一つは鏡面反射(表皮反射)である。このうち、鏡面反射については、Phong⁽¹⁾, Blinn⁽²⁾などがモデル化しているが、いずれも反射光の強度分布は正反射方向を中心とする等方的なものであった。つまり物体表面のざらつきは一定であることを前提としている。これに対して、物体表面に一定方向の細かいきずがある場合は、反射光はそのきずに影響され、表面には特有の明暗の模様がつく。例えばステレオなどのつまみ、金属製のドワの把手のような、同心円状のブラシきずによって仕上げられた表面、あるいはレコード盤の表面などでは、放射状の明暗のパターンが見られ、我々の日常の中でもよく目にするものである。これらの模様の生成は従来のような等方的な反射モデルで扱うことはできないので、新しいモデル、つまり反射光が方向に依存する強度分布をもつ異方性のモデルが必要である。この問題については製品科学研究所の太平が鏡面反射光自体を偏平な楕円体(つまり異方性)の強度分布でモデル化する方法を考案し、新しい材質感表現に成功している。⁽³⁾

しかしこのモデルには基本的な問題点が存在し、ある条件では不自然な表示を与えることがある。本文では物体表面の構造を考慮に入れて改良した新しいモデルを提案し、太平のモデルと比較、検討し、その妥当性を確かめる。

2. 太平のモデル

先に発表された太平のモデルについて説明する。図1のようにブラシ仕上

げされた表面(以下簡単のために"ブラシ表面"と呼ぶ) D_1 を考える。 D_1 内にある点 P に照射された光の反射光の強度分布を考える際、まず点 P から光源へ向かうベクトルを L とし、 L に対する正反射ベクトルを R とする。(正反射ベクトルとは表面の法線に対して L とちょうど対称な方向のベクトルである。) 平面 D_1 に対する単位法線ベク

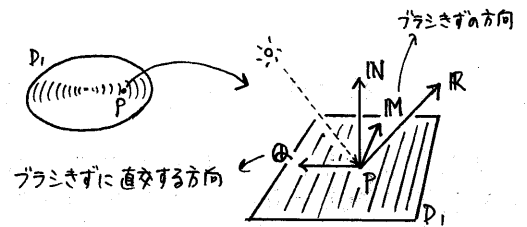


図1. 太平のモデルの説明図

トルを N とすれば、 R は N, L を用いて、

$$R = 2(N \cdot L)N - L \quad (1)$$

と表わされる。また、点 P においてブラシきずの方向を M 、ブラシきずに直交する方向を Q とすると、

$$M = Q \times N \quad (\text{外積}) \quad (2)$$

なる関係がある。

ここで、 $R = W$ とし次のように U, V ベクトルを定める。

$$V = W \times M \quad (3)$$

$$U = V \times W \quad (4)$$

点 P において、 U, V, W 方向に u 軸、 v 軸、 w 軸をとる。

反射光の強度分布は、この u, v, w -

直交座標系で表わされる楕円体

$$\frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2} + \frac{(w-r)^2}{r^2} = 1 \quad (5)$$

($p \neq q, p, q < r$)

でモデル化される。

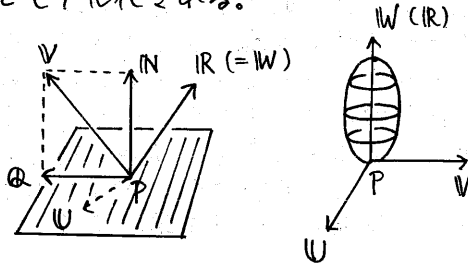


図2 楕円体モデル

すなわち、点Pからある方向 λ を向く反射光の強度分布は、点Pを通り λ 方向の直線と上の楕円体と交わる点までの長さに比例するとするものである。

実際に視線方向ベクトル λ の方向への強度を求めて反射光強度が求められる。

3. 微小面のモデル

3.1 微小面の割合のモデル化

次に本研究で新しく提案する「微小面のモデル」について説明する。これは Blinn⁽²⁾によって考えられた微小面のモデルに異方性をもたせることにより導かれる。

ブラシ仕上げされた表面を顕微鏡で見ると、ブラシきずは基本的には同心円の構造を持っているが、完全なものではなく図3のようにかなり乱れたものになっている。そこでブラシ表面上の小領域が非常に小さい多数の微小面の集合から成りたてであり、表面上のブラシきずの方向に垂直な方向を向く微小面の割合は多くなり、ブラシきずの方向に平行な方向を向く微小面の割合は少なくなると思えるのが自然である。



図3 ブラシ表面の顕微鏡写真(約180倍)

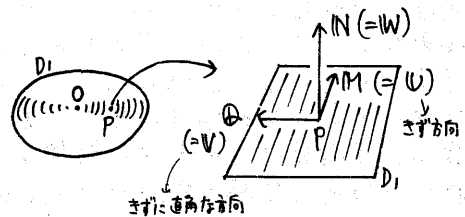


図4 微小面のモデルの説明図

ここで、ある点Pにおいて各方向を向く微小面の割合を次のようにモデル化する。まず図4のように、点Pに接してきずの方向に垂直な方向に偏平な楕円体を考える。中心Oから点Pに向かうベクトルを V 、スピ平面 D_1 内にあり V に垂直なベクトルを U 、 U と V に垂直なベクトルを $W (= N)$ とし、 U, V, W 方向にそれぞれ u, v, w 軸をとり、この楕円体を

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{(w-c)^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

($0 < a \leq b \leq c$)

とおく。ここで U, V, W は単位ベクトルとする。

点Pにおいてある方向 λ を向く微小面の個数は点Pから λ 方向へ向かう直線と上の楕円体と交わる長さ $PQ (= \ell)$ に比例するとする。このようにすると見はきず方向よりきずに垂直な方向に

近づくほど大きくなるという性質を持ち、上で示した微小面の個数の割合を ρ で表わせば自然な形で微小面の分布に異方性を与えることができるモデルとなる。

3.2 輝度(色)計算法

ある方向からくる光がブラシ表面上の点Pで反射して目に届く系を考える。光源Lから視線Eにはいる光は、LとEの単位二等分線H'の方向を向く微小面のみによって反射されたものでありその光の量はH'方向を向く微小面の個数に比例するので、Hと楕円体(b)が交わる長さ $l = \varphi(H)$ に比例することになる。よって、ある視線方向から見たときの点Pの色Cは次のように表わされる。

$$C = (d + a \cos \theta) (C_d + k \varphi(H) C_s) \quad (7)$$

ここで、第1項は Phong のモデルによる拡散反射成分を示し(本文での考察には直接関係がない)、

d は背景光による拡散反射の割合
($d \ll a$)

a は拡散反射の係数

θ は入射光と表面の法線との角度

C_d は拡散反射に関する物体の色

を表わす。第2項が(異方性)鏡面反射成分であり、

k は一定係数

$\varphi(H)$ はHと楕円体が交わる長さ

C_s は鏡面反射の色

を表わす。なお金属の場合は拡散反射の成分を持たず、第2項のみで表わされる。プラスチックの場合は、 C_d はプラスチックの色を示し、 C_s は白色となる。

ここで、実際に $l = \varphi(H)$ の計算式を導いておく。 u, v, w - 座標系でHを表わしたとき、 $H = (h_u, h_v, h_w)$ にな

るとすると、当然

$$\begin{aligned} h_u &= (H \cdot U) \\ h_v &= (H \cdot V) \\ h_w &= (H \cdot W) \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ。

このH'方向の直線と楕円体とが交わる長さを求めると、簡単な計算により、

$$l = \varphi(H) = \frac{|2(h_w/c)|}{\left(\frac{h_u}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_v}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_w}{c}\right)^2} \sqrt{h_u^2 + h_v^2 + h_w^2} \quad (9)$$

となる。但し、 (h_u, h_v, h_w) は式(8)による。

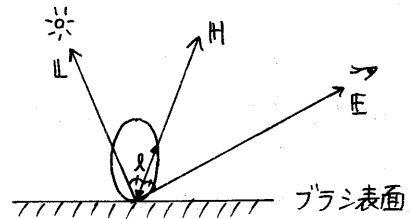


図5 微小面のモデルの系

4. 2つのモデルの比較・検討

ここでは先に述べた微小面のモデルと大平のモデルとの違いについて理論的に検討してみる。

4.1 微小面のモデルによる反射の強度分布

ブラシ平面上の1点で入射された光の強度分布が方向によりどのように変化するか調べてみる。

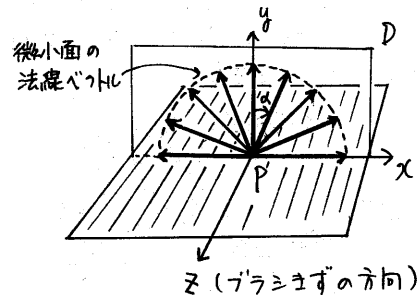


図6 微小面の法線ベクトル

図6のようにブラシ平面を注目点Pを中心として、 x, y, z -直交座標に設定する。簡単のためにブラシきずは完全に一定方向を向いていると仮定すると、点Pにおける微小面の法線ベクトルは x 軸と y 軸を含む平面内のみにあり、点Pを中心として放射状に広がっていると考えられる。この法線ベクトルは、平面の法線ベクトル N との間の角度を表わすパラメータ α を用いて、

$$N' = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \quad (10)$$

とおける。次に点Pから光源へ向かうベクトル L を、

$$L = (l_x, l_y, l_z) \quad (11)$$

とすれば、式(1)より反射ベクトル R は、

$$\begin{aligned} R &= 2(N' \cdot L)N' - L \\ &= (2P\sin\alpha - l_x, 2P\cos\alpha - l_y, -l_z) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$$P = l_x \sin\alpha + l_y \cos\alpha$$

である。今、 $R = (X, Y, Z)$ として、パラメータを消去すると、

$$X^2 + Y^2 = l_x^2 + l_y^2, \quad Z = -l_z \quad (13)$$

となり、 R は円周を動くことになり、図7のように点Pを頂点として、底面を平面 $Z = -l_z$ に置く円すい上の一部を動くことになる。

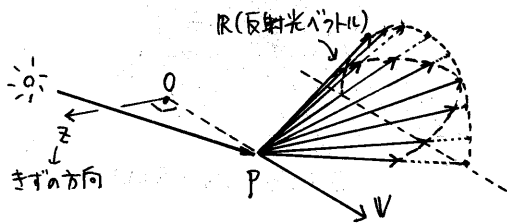


図7 反射ベクトル R の分布

実際のブラシ表面を考えると、点Pでの微小面の方向と個数は式(6)で示した楕円体で決まるような散らばりを持つので、それによってできる反射ベクトルは図7の分布を中心に拡がり、ブラシ表面での反射光の強度分布は、湾曲した曲面を中心として拡がりをもつ強度分布を持つという結果が得られる。従って、反射光の強度分布自体を楕円体として表現した大平のモデルとは本質的に異なるものであることがわかる。

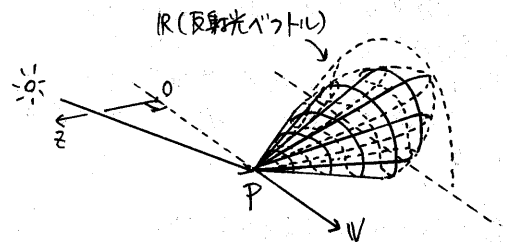


図8 ブラシ表面における実際の反射光の分布

4.2 ブラシ仕上げされた円柱を用いての比較

底面が同心円状、側面が軸に垂直にブラシ仕上げされた図9のような円柱を、2つのモデルを用いて表示してみると、大平のモデルでは、底面と側面でのハイライトの位置がずれたり、片方が現われなかったりする場合が生じ、実物の感じと異なり正しい表示を与えない。(図10) 一方、微小面のモデルではハイライトの位置が一致する。

この現象について理論的に調べてみる。

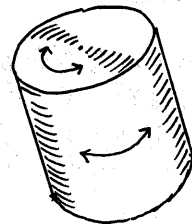
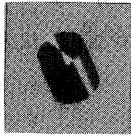
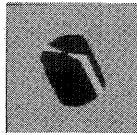


図9 円柱のブラシきず方向



(a) 大平のモデル

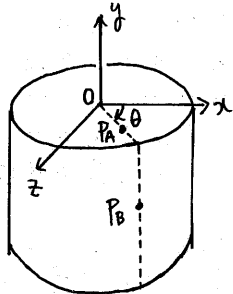


(b) 微小面のモデル

図10 2つのモデルによる円柱の表示

円柱に対し、右図のような座標系を考える。

すなわち、底面(上面)の中心に原点をおき、 x 軸、 z 軸を底面上にとり、 y 軸はそれに垂直にとる。



底面上に任意の点 P_A をとる。 \vec{OP}_A と \vec{x} の間のなす角を θ とする。また、 y 軸と \vec{OP}_A を含んだ平面 (x, y 平面に対して角度 θ 回転したもの) 上にある側面上の一点 P_B を考える。

この点 P_A と P_B における反射光強度について両者のモデルで考えてみる。

ここで、単位光線ベクトルを L 、単位視線ベクトルを V とし、その二等分方向の単位ベクトルを

$$H = (h_x, h_y, h_z) = \left(\frac{L+V}{\|L+V\|} \right) \quad (14)$$

とする。

4.2.1 微小面のモデルによる円柱のハイライトの中心位置の検討

1) 底面のハイライト

円柱の上底面でのハイライトの中心位置を求めてみる。

点 P_A における微小面の分布に関する座標系 u, v, w は図12のように v 軸は \vec{OP}_A の方向、 u 軸は底面上にあり v 軸に垂直な方向、 w は y 軸と同じ方向になる。したがって u, v, w 軸方向の単

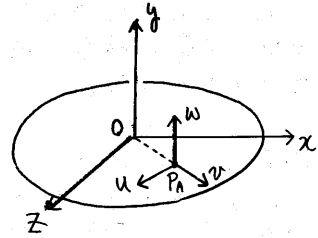


図12 底面での u, v, w 座標軸

位ベクトルを u, v, w とすると、

$$u = (-\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

$$v = (\cos\theta, 0, \sin\theta) \quad (15)$$

$$w = (0, 1, 0)$$

となるので、 H を u, v, w - 座標系で表わしたものを $H = (h_u, h_v, h_w)$ とすると、

$$h_u = (H \cdot u) = -h_x \sin\theta + h_z \cos\theta$$

$$h_v = (H \cdot v) = h_x \cos\theta + h_z \sin\theta \quad (16)$$

$$h_w = (H \cdot w) = h_y$$

ここで、 $h_x > 0, h_y > 0, h_z > 0$ とし、ても一般性は失われないから、この条件を仮定しておく。

この結果、式(9)の $\varphi(H)$ は、

$$\varphi(H) = \frac{2h_y/c}{\left(\frac{-h_x \sin\theta + h_z \cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_x \cos\theta + h_z \sin\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_y}{c}\right)^2} \quad (17)$$

となる。

点 P の位置を変えると θ が変化するのでこのとき $\varphi(H)$ も変わる。そこで θ による変化を調べるために $\varphi(H) = L(\theta)$ とおくと、 $L(\theta)$ が最大になるのは簡単な計算で(付録A参照)

$$\theta = \alpha, \pi + \alpha \quad (\text{ただし } \tan \alpha = \frac{h_z}{h_x})$$

$$(18)$$

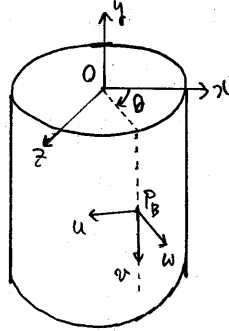
であることがわかる。

したがって、この角度のところにハイライトの中心(最も輝度が高いところ)があることがわかる。

2) 側面のハイライト

側面のハイライトの中心についても計算してみる。同じく図11の座標系を考える。

側面の u, v, w 軸は図13のようにとられる。すなわち、 v 軸は y 軸と同じ方向(向きは逆)、 w 軸は側面に垂直、 u 軸は x 軸と両方に垂直である。図13 側面での u, v, w 座標軸。



ここで、 u, v, w 軸方向の単位ベクトル u, v, w は、

$$\begin{aligned} u &= (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \\ v &= (0, -1, 0) \\ w &= (\cos\theta, 0, \sin\theta) \end{aligned} \quad (19)$$

で与えられ、 u, v, w -座標系の H ベクトル $H = (h_u, h_v, h_w)$ は、

$$\begin{aligned} h_u &= -h_x \sin\theta + h_z \cos\theta \\ h_v &= -h_y \\ h_w &= h_x \cos\theta + h_z \sin\theta \end{aligned} \quad (20)$$

となり、 $\varphi(H)$ は次式のようになる。

$$\varphi(H) = \frac{\frac{2}{c} (h_x \cos\theta + h_z \sin\theta)}{\left(\frac{-h_x \sin\theta + h_z \cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{h_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{h_x \cos\theta + h_z \sin\theta}{c}\right)^2} \quad (21)$$

同様にして (h_x, h_y, h_z) を一定とし

て θ を変化させると、 a, b の大小にかかわらず $\varphi(H) = M(\theta)$ が最大になるのは

$$\theta = \alpha \quad (\text{ただし } \tan\alpha = \frac{h_z}{h_x}) \quad (22)$$

のときである(付録⑩参照)。つまり側面の場合、ブラジ上げをしてもしなくてもこの位置にハイライトが現われる。

結局、 $\theta = \alpha$ の位置で底面と側面のハイライトの中心位置が一致する。(底面では、 $\theta = \alpha + \pi$ の位置でもハイライトの中心が生じることになるが、こちらの方の側面は視点から見えな

い。なお、この $\theta = \alpha$ の位置は、ハイライトの中心位置は H ベクトルの u 軸と w 軸とを含む平面内にくるような場所である。

4.2.2 大平のモデルによるハイライト

次に大平のモデルによるハイライトの中心位置を考えてみる。円柱にとる x, y, z -座標系は今までと同じとする。底面、側面ともブラジきず方向のベクトル M は

$$M = (\sin\theta, 0, -\cos\theta) \quad (23)$$

である。次に光源ベクトル $L = (l_x, l_y, l_z)$ とすると底面での反射

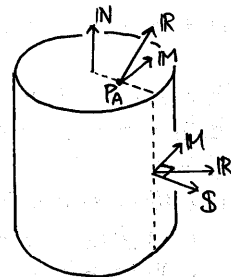


図14 大平のモデルによる R ベクトル

光Rは、

$$R = 2(N \cdot L)N - L$$

$$= (-l_x, l_y, -l_z) \quad (24)$$

で、側面での反射光Rは

$$R = 2(S \cdot L)S - L$$

$$= (g \cos \theta - l_x, -l_y, g \sin \theta - l_z) \quad (25)$$

ただし $g = l_x \cos \theta + l_z \sin \theta$

である。ただしSは \vec{OP}_A 方向の単位ベクトルとする。

ここで、ハイライトが最も強くなる位置は、視線ベクトルRが、RとV(=R×M)で張られる平面上にくるときである。しかし、底面と側面両方ともMは共通であるが、上で述べたようにRがまったく異なる。すなわち底面ではθに依存せず一定であるが、側面ではθによって変化する。またRのy成分が、底面では l_y 、側面では $-l_y$ であることを考えれば、RとVで張られる平面が一致することは、ほとんどあり得ないと考えられる。したがってハイライトの中心位置は底面と側面でずれる場合がある。

4.3 視線、光源が同じ側で浅い角度を持つときの比較

ブラシ仕上げ面に対し、光源が浅い角度で入射し、これを同じ側から同じく浅い角度で見たと仮定する。このような状態のときでも実際のブラシ仕上げ面を見ると、ハイライトパターンが見える。

1) 微小面のモデル

微小面のモデルでは、表面上の楕円体モデルとHベクトル(視線方向ベクトルと光源方向ベクトルの二等分線)とは交わりを持ったため反射光はある程度の強さを持ち、ハイライトパターン

が生成されることになる。(図15)

2) 大平のモデル

正反射方向のRベクトルを中心とする楕円体と視線とはまったく交差しないので、反射光強度は0となる。(図16)

上の理論においても、微小面のモデルが実際に適合していると考えられる。

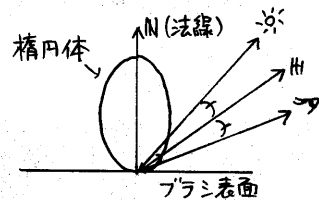


図15 微小面のモデル

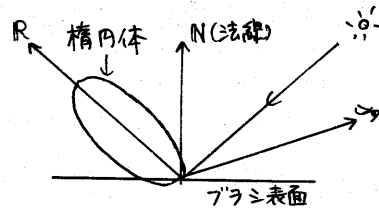


図16 大平のモデル

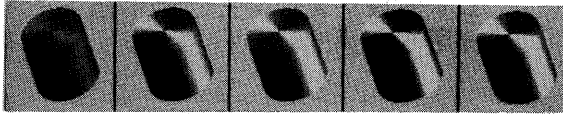
5. まとめ

本文では新しく異方性反射モデルを提案した。本モデルは物体表面の微細構造を微小面の楕円体分布によりモデル化したもので、物理的にも自然なものと考えられる。また、大平の異方性反射のモデルと本モデルとを、ブラシ仕上げさせた円柱に適用した結果においても、本モデルの妥当性が確かめられた。

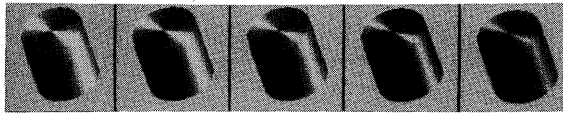
表示例(微小面のモデルによる)



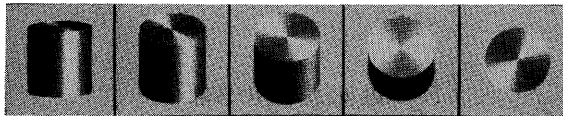
(a) $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ (左から順)
 $b = 5, c = 40$



(b) $b = 2, 4, 6, 8, 10$ (左から順)
 $\alpha = 1, c = 40$



(c) $c = 40, 60, 80, 100, 120$ (左から順)
 $\alpha = 1, b = 5$



(d) 回転によるハイライトの変化 ($\alpha = 1, b = 5, c = 60$)

図17 プラスティック (9)式における a, b, c の変化

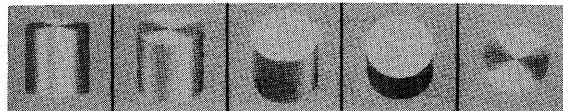


図18 金属 (例1)

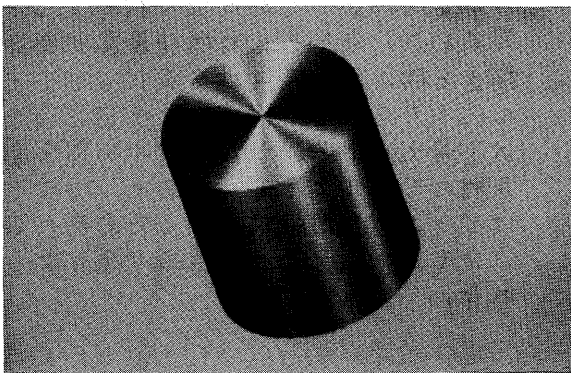


図19 金属 (例2)

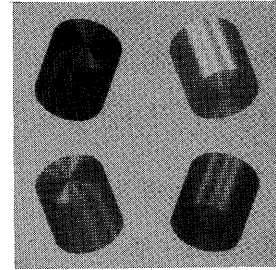


図20 金属 (例3)

謝辞

本研究に関し御協力いただいた
 有藤均氏、前田照彦氏に深く感謝
 します。

文献

- (1) Phong, B.T.: Illumination for computer generated images, C, ACM, 18.6 PP. 311-317 (1975)
- (2) Blinn, J.F.: Models of light reflection for computer synthesized pictures, Proc. SIGGRAPH '77 PP. 192-198 (1977)
- (3) 大平智弘: 異方性反射を考慮したSHADINGモデル, 信学技報 IE 82-80 (1983)

付録 微小面のモデルにおける、ハイライトの中心位置の計算

④ 底面のハイライト

ハイライトは(17)式の $\varphi(H)$ が最大になる位置を中心にして現われるから、 $L(\theta) = \varphi(H)$ を最大にすることを考える。そのためにまず、分母の θ を変数としてつ部分

$$f(\theta) = \left(\frac{-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta}{b} \right)^2 \quad (26)$$

を最小にすることを考える。(26)式を微分して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= 2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta) (h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta) \\ &= - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (h_1^2 + h_2^2) \sin \{ 2(\theta - \alpha) \} \end{aligned} \quad (27)$$

ここに、

$$\tan \alpha = \frac{h_2}{h_1} \quad (28)$$

となり増減表を書くと、 $a < b$ では、

θ	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2} + \alpha$...	$\pi + \alpha$...	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$...	2π
$f(\theta)$	/	-	0	+	0	-	0	+	0	-	/
$f(\theta)$	*	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\frac{\pi}{2} + \alpha)$	↘	$f(\pi + \alpha)$	↗	$f(\frac{3}{2}\pi + \alpha)$	↘	$f(2\pi)$

($a > b$ では増減が逆)

図21 $f(\theta)$ の増減表

となり $f(\theta)$ が最小のとき $L(\theta)$ は最大となるから、 $\theta = \alpha, \pi + \alpha$ でハイライトの中心となることがわかる。(図22) また、

$$L(\alpha) = L(\pi + \alpha) = \frac{2h_1 h_2 / c}{\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{b} \right)^2 + \left(\frac{h_1^2}{c} \right)^2} \quad (29)$$

となりハイライトの中心位置は a に依存しない。

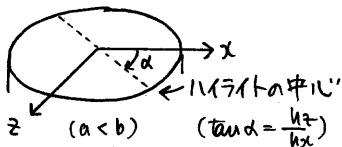


図22 底面でのハイライトの位置の中心

⑤ 側面でのハイライト

(21)式の $\varphi(H)$ を最大にする θ を求める。 $M(\theta) = \varphi(H)$ において、極値を求めるために微分して整理すると、

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = \frac{-\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin(\theta - \alpha) \cdot g(\theta)}{\left\{ \left(\frac{-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta}{c} \right)^2 \right\}^2} \quad (30)$$

ここに、 α は(28)式の $\tan \alpha = \frac{h_2}{h_1}$ をみたすものであり、

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left(\frac{-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{h_1}{b} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) (h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ところが、(6)式で仮定したように、 $0 < a \leq b \leq c$ であり、

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{c^2} > 0 \text{ となり、}$$

$$g(\theta) > 0$$

となり、 $\frac{dM(\theta)}{d\theta} = 0$ となるのは、

$$\sin(\theta - \alpha) = 0 \text{ のときである。}$$

さらに注意すべきことは、側面の場合、側面の法線ベクトル N_0 と、 H ベクトルのなす角 θ_0 が 90° を超えるような面の部分

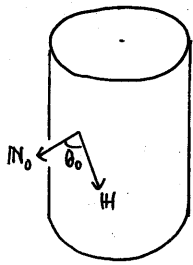
$$\alpha + \frac{\pi}{2} < \theta < \alpha + \frac{3}{2}\pi \quad (32)$$

では $M(\theta)$ は恒等的に0と考えるべきである。すなわち、

$$M(\theta) \equiv 0 \quad \left(\alpha + \frac{\pi}{2} < \theta < \alpha + \frac{3}{2}\pi \right) \quad (33)$$

なぜなら、式(32)の範囲では H 方向を向く微小面はないからである。(図23)

こゝより、 $M(\theta)$ の増減表は図24のようになり、側面のハイライトの中心位置も $\theta = \alpha$ のところである(図25)なおこの位置は a, b の大小関係に依存しない。



$90^\circ < \theta_0 < 270^\circ$ の範囲
では H 方向を向く微小
小面はない。

図 23 N_0 と H の関係

θ	0	...	α	...	$\alpha + \frac{\pi}{2}$...	$\alpha + \frac{3\pi}{2}$...	2π	
$M(\theta)$	+	0	-	0				+		
$H(\theta)$	*	\nearrow	$H(\alpha)$	\searrow	0				\nearrow	* $\theta=0$ 近く

図 24 $M(\theta)$ の増減表

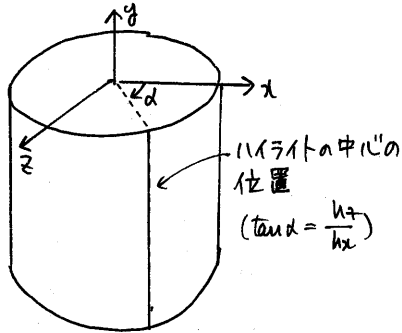


図 25 側面でのハイライトの中心の位置

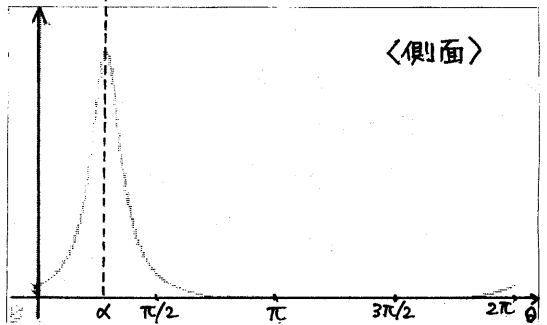
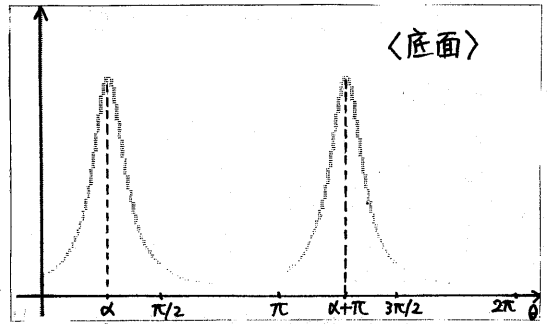


図 26 微小面のモデルによる円柱の底
面と側面での $\psi(H)$ の分布形の例
(図は、 $a=1, b=4, c=40$ のとき)