グラフィクスとCAD 23－6
（1986. 10. 4）

# 4次元空間における
# モデルの構築とその表示

宮副幸子　鶴野玲治　長江貞彦　福永節夫
大阪府立大学　総合科学研究科

近年、4次元空間を思考する必要性が、科学のいろいろな分野において徐々に出てきている。そこで、4次元空間における物体を視覚的に表現し、さまざまな現象の説明に利用しようとするものである。今回は4次元立方体（超立方体）、5胞体（5つの4面体から形成されているもの）のサーフェイス・モデルおよび4次元空間における光学異性体とクラインの壷のアニメーション表示を行った。3次元空間では光学異性体として区別されているものが4次元空間では同形になることや、クラインの壷が3次元空間では交わるが、4次元空間では交わらずに表現できることなどを示している。これらのアニメーション表示は4次元空間を思考し理解するにあたり、役に立つものであると考える。

# Modeling and it's Displaying in 4-Dimensional Space

Sachiko MIYAZOE , Reiji TSURUNO , Sadahiko NAGAE , Setsuo FUKUNAGA

Osaka Prefectural University ,4-806 Mozu-Umemachi, Sakai City, Osaka Japan.

Recently, we are coming to face the necessity of considering the four dimensional (4-D) space in some fields of science. The visual expression by using the techinques of computer graphics may be effective to explain the phenomena in 4-D space. This paper describes methods of some animate expressions in

(i) surface models such as super-cuve, and so on.

(ii) wire-flame models such as optical isomer, and so on.

This paper also descrives two examples; one is the optical objects being different in 3-D space but equivalent in 4-D space, and the other is the surface of Klein's bottle crossing in 3-D space, but not crossing in 4-D space.

It is found to be useful that this study can help the easier understanding of 4-D space.

## 1）はじめに

近年、科学のいろいろな分野において、4次元空間を思考する必要性がでてきている。そこで、4次元空間における物体を視覚的に表現することは、その思考の援助となりさまざまな現象の説明に役立つことは確かである。

一般に、3次元空間において4次元物体の全体を時間軸の支援なしに観察することは困難である。しかし、3次元物体を2次元平面に投象してきたのと同様に、4次元物体を3次元空間に投象することは可能である。そこで本来ならばホログラフィ（立体写真）に4次元物体を投象させるのが理想的と言えるが、ここでは手軽で迅速という点に主眼を置き、いったん3次元空間に投象させたものをさらにCRT上に投象させ、それをアニメーション表示し疑似3次元を表現する。この研究は、超立方体（4次元立方体）、5胞体（5個の正四面体で形成されたもの）、超球（4次元球）、及び4次元空間における3次元物体のワイヤーフレームモデルによるアニメーション表示に始まった.[1][2] そこで本報ではこれらの発展として、超立方体，5胞体のサーフェイスモデル、及び4次元空間における光学異性体[2]とクラインのボトルのアニメーション表示を行う。

## 2）4次元空間

一般に、0次元の点が移動して1次元の線ができ、線が移動して2次元の面ができ、面が移動して3次元の体ができるというように次元の概念が説明できる。これと同様に、3次元の体を第4の軸方向に移動させると、4次元物体である超体ができる。この考え方をもとに4次元物体のデータを作成した.

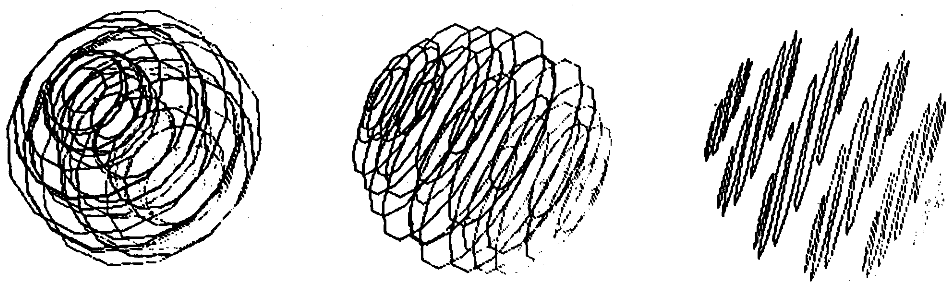
また，ここでいう4次元とは、4本の軸が直交する4次元ユークリッド空間を考えている。その4次元空間において物体を動かすという意味で、4次元空間における回転を考えた。X軸、Y軸、Z軸、U軸からなる4次元空間には、XY平面、YZ平面、ZX平面、XU平面、YU平面、ZU平面の6つの平面がある。これらの平面それぞれにおける2次元の回転マトリックスの積が、4次元空間における回転マトリックスとなる。

ところで、4次元空間を考えると現象の説明に都合のよいものに宇宙空間がある．宇宙空間は閉じていて、宇宙を直進しつづけるとまたもとの位置にもどってくるという説が現在のところ有力視されている。しかし、3次元空間だけで、この閉じている宇宙の形状を矛盾なく考えることは不可能であるが，4次元空間における超球のような形状であれば矛盾はおこらない．超球は次の式で定義される.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2 = R^2$$

この超球の表面は3次元であり、表面に沿って直進し続けるとまたもとの位置に戻ってくる。この超球を回転させ作図したものが図1-a,b,c および図2 である。

図１の形状がスムーズでないのは、超球の様子を見やすくするために分割数を少なくしているためである。図２は、図１-c と同じ回転角で分割数を多くしたものである。３次元の球が２次元の円の集まりとして表現できるのと同様に、超球も球の集まりとして表現している．この図は白黒なので少しわかりにくいが，３次元の球ごとに濃淡を付けている．カラーの図では球ごとに色分けしているので理解し易い．一般に４次元の球というと，なにか異様な形状をしているように思われがちであるが，たとえば球を３次元空間でいくら回転させて２次元に投象しても円であるように，４次元空間で超球を回転させて３次元に投象すれば球になるのと等価である．



a　　b　　c

図 1

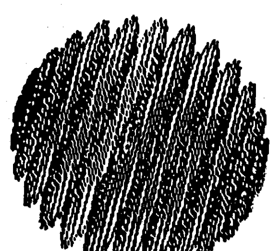
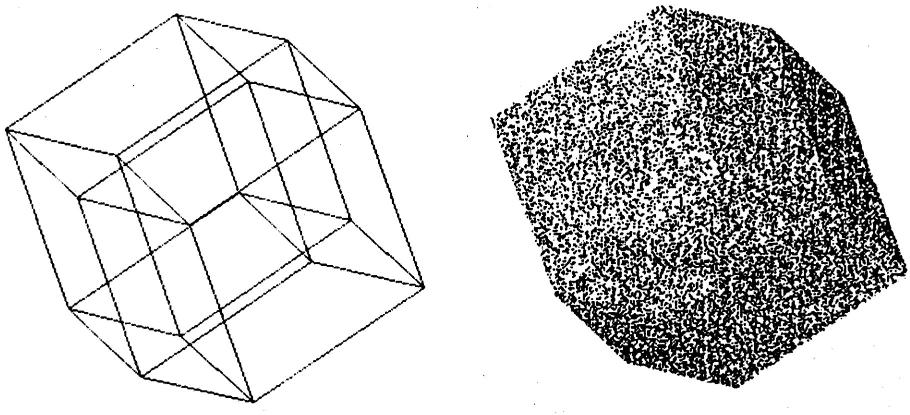


図 2

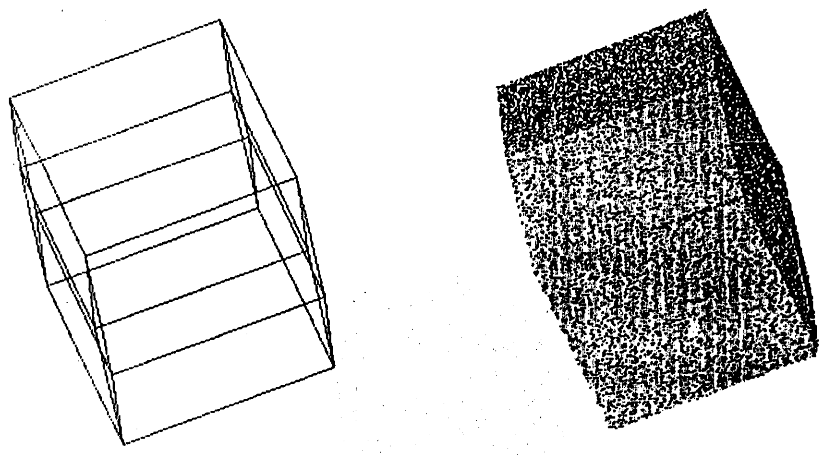
３）サーフェイスモデル

これまでの研究で，ワイヤーフレームモデルで超立方体，５胞体のアニメーション表示を行ったが，物体を構成している面の前後関係が判断しにくかった．そこで今回はこれらをサーフェイスモデルへと発展させた．その手法の説明を行う．初めに４次元物体を回転し，３次元空間に投象する．投象後は３次元物体として処理を行う．まず，面ごとの法線ベクトルを外積を用いて求めてシェーディングをかける．簡単のために，光は平行光線で視線方向と光の方向は一致しており，反射・屈折は考えていない．すなわち，真っ暗な場所に視線方向から一面に平行光線をあてた場合に限定している．つぎにＺバッファ法で陰面処理を行いながら



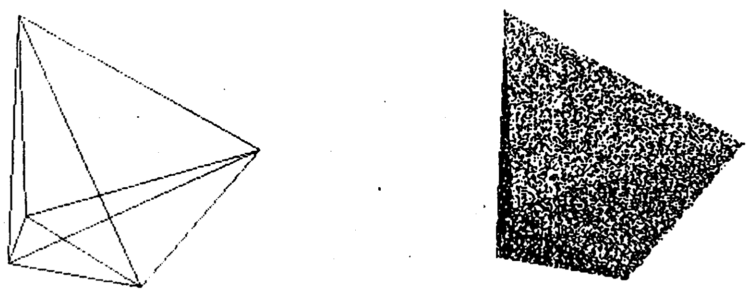
a　　b

図 3



a　　b

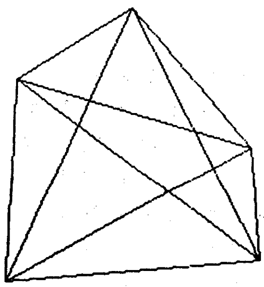
図 4



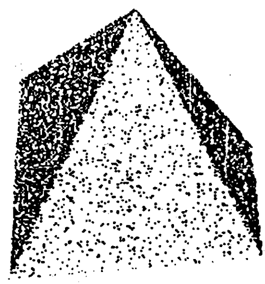
a　　b

図 5

作図させる．すなわち画面の各ピクセルごとに前後関係を判定しながら作図するもので，今回判定するピクセルのZの値が、以前に作図したピクセルのZの値よりも大きければ作図し、小さければ作図しないという方式をとっている．それでは実際に作図したものを図3、4に超立方体を図5,6に5胞体を示す．ワイヤーフレーム法と比較できるように同じ角度で作図したものを並べて示している．このサーフェイスモデルによりワイヤーフレームモデルだけでは理解しにくかった面の前後関係が解るようになった。次に，一部に半透明な感じをだしたものを図7,8に示す．以前に作図した面と今度作図する面が重なっている場合，以前に作図した面を消さずに上から作図を行う．面を構成している画素の密度を通常の1／3に減らすことにより，半透明な感じを出している．この図は立方体に例えていうと上面（蓋）と底面（底）を塗りつぶし側面を半透明で表現しているようなものである．同じように，超立方体は8個の立方体から形成されており，そのうちの2個が蓋と底になり，その2個の立方体を通常の手法で表し，後の6個の側面に当たる部分（側体）を半透明で表している．この手法によると超立方体を形成している立方体の様子をよく理解しやすい。

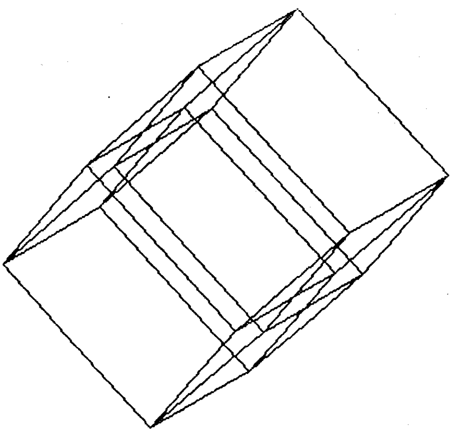


a

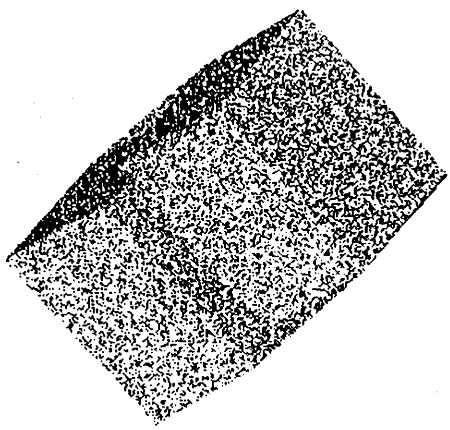


b

図 6



a



b

図 7

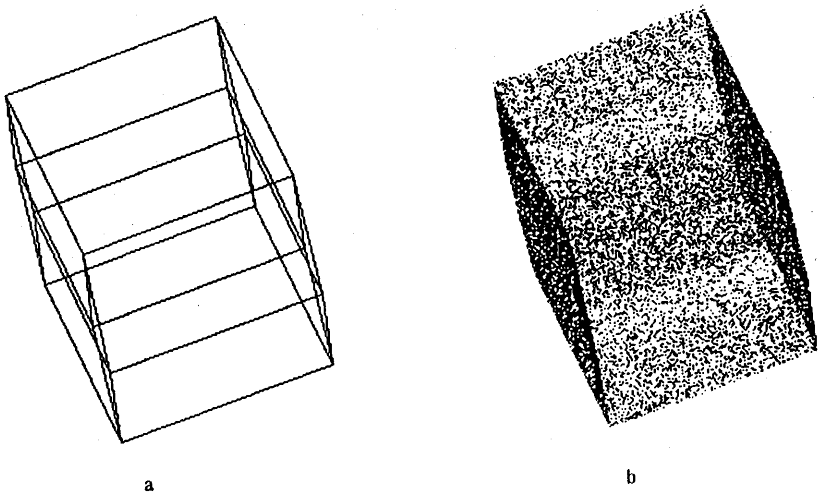



図 8

4）光学異性体

立体異性体の１つに科学的性質及び物理的性質はおなじであるが、旋光性の異なる現象を示す光学異性体というものがある。これは面対称で、簡単にいうと右手と左手のような関係にある。右手と左手をいくら３次元空間内で回転させても、同形になることはないのと同様に、光学異性体をいくら３次元空間内で回転させても同形になることはない。ところが、４次元空間内で光学異性体を回転させると同形になり異性体として区別されない。白黒なので少しわかりにくいが、図９にａからｆの順に４次元空間で回転している様子を示す。上の図と下の図は立面図と平面図である。横軸にｘ軸、縦軸にｙ軸、奥行きにｚ軸をとると図9-ａとｆはｙｚ平面について面対称になっている。また，図9-ｂ，ｃ，ｄ，ｅ の分子がａ，ｆのものより小さく見えるのは、第４の軸方向に大きさをもっているためである。

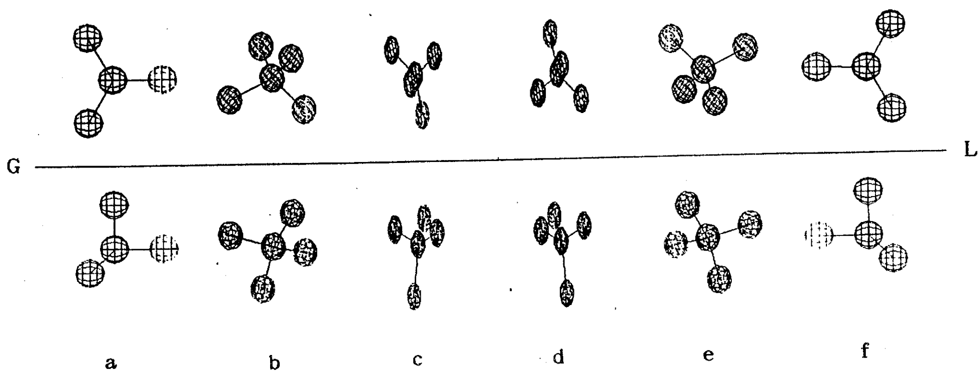
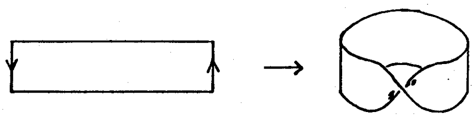



図9

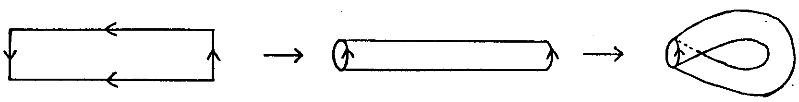
### 5）クラインの壺

クラインの壺やメービウスの帯などはトポロジーなどでよく耳にする言葉であるが，ここで念のため簡単に説明をしておく．まずメービウスの帯であるが，図10-aような形状を矢印が同じ向きになるように継ぎ合わせる．そうすれば帯をちょうど1回ひねってつなぎ合わせたような図10-bに示すようになる．つぎにクラインの壺を示す。これは図11-aのような形状を矢印の向きに従って継ぎ合わせたものである．実際にやってみるとわかるが3次元では交わらずに継ぎ合わせることが不可能である．ところが4次元空間ではこのクラインの壺を交わらずに作ることができる．これはメービウスの帯が2次元平面では交わらずに表現できないのに，3次元空間ではそれが可能になるのと同じことである．まず比較のためにクラインの壺の3次元イメージを図12,13に示す．また4次元空間で描かれたクラインの壺のワイヤフレームモデルを図14､15に、サーフェイスモデルとワイヤーフレームモデルを比較したものを図16､17に示す。4次元の場合、角度によって3次元イメージと同じ様な形状に見えたり、メービウスの帯を膨らませたように見えたりするのが特徴である．ただし、係数の与え方などによって多少形状が異なってくるが、クラインの壺の本質的な性質及び形状の特徴はかわらない。



a　　b

図１０



a　　b　　c

図１１

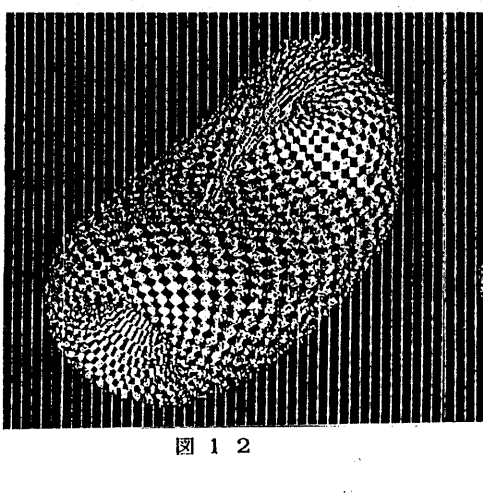


図１２

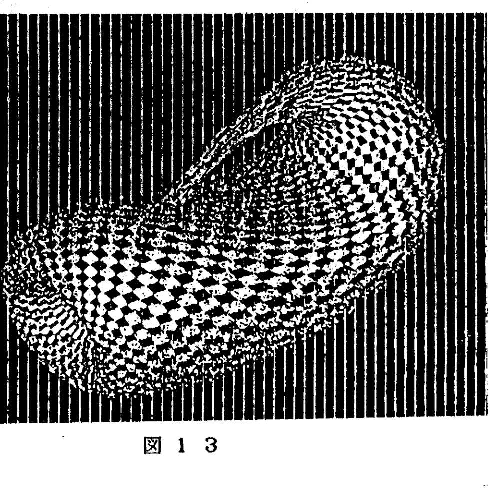


図１３

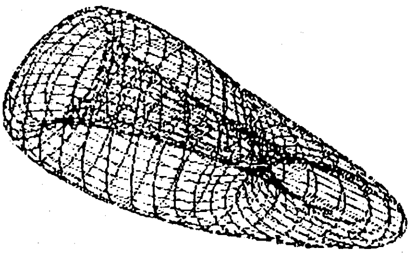


図１４

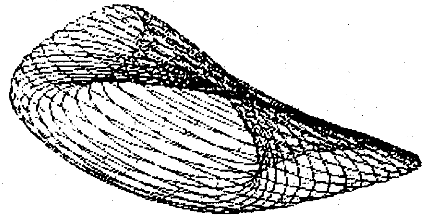
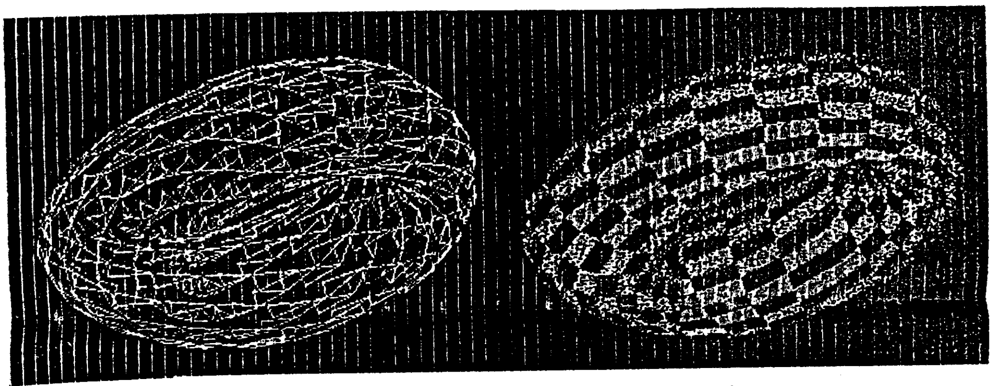
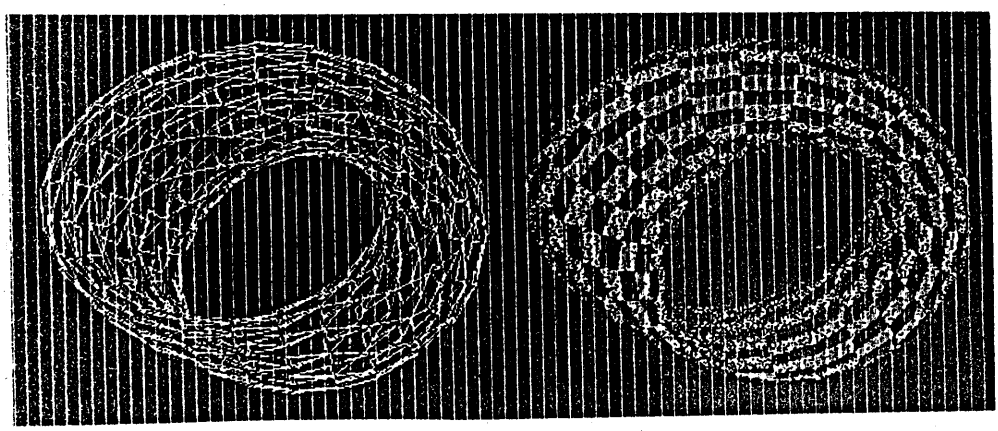


図１５



a　　　b

図１６



a　　　b

図１７

## 6）おわりに

ワイヤーフレームモデルからサーフェイスモデルに発展させたことにより面の前後関係や4次元空間における物体の形状などがより明確になった．またクラインの壷の，3次元モデルでは解らなかった特徴を表現できた．4次元空間を思考し理解する上で，これらの視覚的表現は有効で，これらの応用を今後の課題としたい。

## 参考文献


1）宮副、鶴野、宮本、長江、福永、4次元物体の表示、日本図学会　全国大会（九州大学）にて口頭発表済

2）宮副、鶴野、宮本、長江、福永、4次元物体の表示、日本図学会「図学研究」（投稿中）

3）C.Kosniowski 著 加藤十吉　編訳：トポロジー入門，東京大学出版会，1983

4）都筑卓司：トポロジー入門、日科技連出版社　1974

5）化学ハンドブック編集委員会　編：
8・6　立体化学、p568-590
12・2・3 アミノ酸、p927-929 化学ハンドブック 1978

6）H.P.Manning:Geometry of Four Dimensions,Dover 1965

7）山口富士夫：コンピュータディスプレイによる図形処理工学、日刊工業、1981

8）宮崎興二：4次元図学，　図形科学ハンドブック，p227-239，1980

9）宮崎興二：正120胞体の神秘，数学セミナー，8-'81，p70-75，1981