グラフィクスとCAD 23－3
（1986. 10. 4）

1次元1近傍のセル・オートマトンによる平面模様の生成

坂元宗和，高木幹雄
東京大学　生産技術研究所

1次元1近傍のセル・オートマトンは1個のセルに対して自己の状態を決定する仕組であるから，それが作り出すパターンはずらし繰返しによるパターンと同じである．ずらし量が大きいと前列のパターンとの結びつきがまったく変ってしまい，驚くほど違ったモチーフができる．この関係は同じ初期値から新しいパターンを導くのに使える．またこのオートマトンは生成されたパターンから初期値が復元できるので，模様制作に必要な初期値を通常の方法で描いたモチーフから作ることができるし，ランダムな初期値を評価関数で選抜してもよい．以上の手法を利用して模様を試作し，実用性を確認した．

Pattern Generation Using a 1-D, 1-Neighbor Cellular Automaton

Munekazu SAKAMOTO, Mikio TAKAGI
Institute of Industrial Science / University of Tokyo
7-22-1, Roppongi, Minato-ku, Tokyo 106, Japan

The mechanism of 1-D, 1-neighbor cellular automata is essentially the same as "shifting repetition." Because of digital representation shifting a few cells breaks the old combinations of black cells between the subsequent two lines, and constructs a remarkably different devices. Not only shifting, but modification of initial data, and the change of function give a rich variety of patterns. The authors analyze the properties of the generation, propose some techniques, and have designed some patterns using them. Ther result proves the idea to be practical and fertile.

1　生成原理

1次元1近傍のセル・オートマトンというのは，単位時間ごとに状態が変化する要素からなる配列を考えたとき，時刻t，位置iのセルの状態$C^{t}(i)$が次のように定まる仕組みをいう．ただし，tは時刻を識別する添字であって，ベキ指数ではない．

$$C^{t}(i) = F\langle C^{t-1}(i-d)\rangle$$

関数Fは状態を状態に対応させる写像であるから，状態集合Sの元の数を#Sとすれば，関数Fの種類の数#Fは

$$\#F = \#S^{\#S}$$

である．本論では特に2状態のセル・オートマトンを扱うから，関数は4種類ある．参照されるセルが0のときと1のときにセルがどういう状態をとるかを並記して関数を記せば，

F = { 00, 01, 10, 00 }

である．

このセル・オートマトンに初期値として状態の配列を与えれば，次々に新しい状態が決定できる．状態をもつセルを白または黒の正方形に対応させ，もとの配列を横方向に，時間変化を縦方向にとれば，平面模様になる．実際，これはもとになる不規則な縞模様を縞を横断する方向に細く切り，一定の量dずつずらしたものにすぎない．従って，単位幅のだんだら模様をずらし繰返しによって展開したものである．

ただ，このままの定義では配列の幅が有限であることにより次第に斜にずれて行ってしまう．これを左右に複製すれば平面を覆うことができるが，便宜のために定義を次のように変える．

$$C^{t}(i) = F\langle C^{t-1}(i-d \bmod w)\rangle$$

こうすれば，i-d が1からwまでの範囲に収まるので都合がよい．

今後，セル・オートマトンの種類を表わすには，

w|d;F

と書くことにする．初期値とともに指定する場合には，次のようにする．

$$w{:}\,(C^{0}(i))_{i}\,|d;F$$

すると，w|d;00は初期値が何であっても，常に0ばかりの配列，w|d;11は初期値が何であっても，常に1ばかりの配列を作り出す．これは平面模様としては無地の模様にすぎないから，w|d;01を使い，初期値を全0または全1にすれば実現できる．よって，この2つの関数は考慮の外に置いても差支えない．

2　平面模様の構造

2．1　ユニットとテセレーション

生成される平面模様を詳細に観察するために，状態0，1の代りに初期値の位置を使ってみると，例えば，14|5;01 では次のようになる．

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H	I
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	A	B	C	D
N	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
I	J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H

繰返し模様の要素として要求される条件はAからNまでの位置が全部揃い，かつ連結しているということだけであるから，次のものでもよい．

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H	I
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	A	B	C	D
N	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
I	J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H

また，次のものでもよい．

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H	I
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	A	B	C	D
N	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
I	J	K	L	M	N	A	B	C	D	E	F	G	H

このように同一の生成結果であっても，色々な形を要素として認めることができる．また，どの要素によっても平面は隙間や重りなく覆われている．このとき，平面を要素の形に分解したものと見て，分解の仕方をテセレーションといい，要素をユニットという．本論においてはユニットの形は正方形をいくつか連結した形，すなわち，ポリオミノになり，それを構成する正方形の数は初期値配列の長さとなる．

さらに重要なのは，どの要素によってもユニット間の相対位置の関係が同一であるという性質である．つまり，右へd，下へ1ずらせば，必ず隣りのユニットに重なる．この関係は初期値のいかんに関係しない．ベクトルで表わせば，（d，1）であり，これをずらしベクトルと呼ぶ．

2．2　基準格子

移動してユニットが一致するベクトルは，ずらしベクトルだけでなく，便宜のために導入した（－w，0）がある．これを回帰ベクトルと呼ぶ．この2つは独立であるから，すべての移動一致点は，ずらしベクトルと回帰ベクトルの整係数和

$$n(d,1) + m(-w,0)$$

で書くことができるが，視覚的な印象から言えば，最も強い印象を与えるのは至近の移動一致点である．これは必ずしもずらしベクトルではない．

例えば，50|8;01 の平面模様では

$$|(8,1)| = \sqrt{(8^2+1^2)} = \sqrt{65}$$

$$|6(8,1)+(-50,0)| = |(-2,6)| = \sqrt{40}$$

となって，後者の方が基準点に近い．一般に，

$d<\sqrt{[w-1]}$ なら，（d，1）が至近であるが

$d>\sqrt{[w-1]}$ なら，他にもっと近いものがある．

$d=\sqrt{[w-1]}$ のときは至近の点は（d，1）と，それに等しいもう一つの点がある．

これらの点を格子点と見て，格子を書けば，模様の構造が分りやすい．至近格子点へのベクトルを b_1，その長さを r_1 とすれば，r_1 が $\sqrt{[w-1]}$ 比べて短いということは，目立つユニットが細長いことを意味するから，模様がそれだけ帯状になるということである．

同様に２番目に近い格子点，３番目に近い格子点を考えることができるが，このときは b_1 のスカラー倍でないものとする．このようなベクトルをそれぞれ b_2，b_3 とすれば，まず b_1 によって平面は帯に分割され，さらに b_2 によって，平行四辺形に分割されるが，その面積はセルのw倍となる．最後に b_3 によって，三角形に分割される．

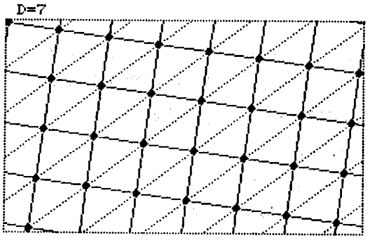
さて，$r_1=r_2$ で，さらに両ベクトルのなす角が直角ならば，正方格子ができる．これは

$$w = d^2+1$$

のときに起る．つまり，

$$d(d,1)=(d^2,d)\equiv(d^2-w,d)=(-1,d)$$

であるから，(d,1) と(-1,d)は長さが同じで，かつ直交している．50|7はこの例である．



また，オートマトンw|d;F に対して

$$de - nw = -1$$

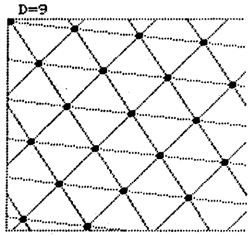
となるeがあるならば，w|d;F とw|e;F の構造は合同である．なぜならw|d;F には，ずらしベクトル(d,1)とこれに独立な移動一致ベクトル

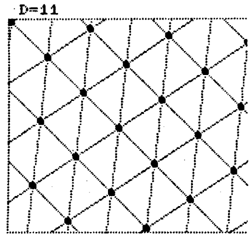
$$e(d,1)=(de,e)=(nw-1,e)\equiv(-1,e)$$

があるが，一方，w|e;F には，ずらしベクトル(e,1)があって，(-1,e)を９０°回転したものである．また，これに独立な移動一致ベクトル

$$-d(e,1)=(-de,-d)=(-nw+1,-d)\equiv(1,-d)$$

があるが，これは(d,1) を９０°回転したものにほかならないからである．50|9と50|11 はこの関係にある．





同様に，

$$de - nw = 1$$

のときも合同になるが，このときは９０°回転のほかに裏返しが必要である．

3　ずらし量の変化

ずらし量が０からwまで変えられることは自明であるが，その結果生成される模様はすべて違ったものであろうか．w|d;Fとw|w-d;Fについて考えてみよう．後者はw|-d;Fであり，参照セルの相対位置が左右逆になっただけのように見えるが，初期値自体はそのままであるから，左右対称ではない．これを定義に戻して考えると，

$$C^t(i) = F< C^{t-1}(i+d)>$$

となる．この関係は

$$F^{-1}< C^t(i)> = C^{t-1}(i+d)$$

でもあるが，関数が０１または１０のときは逆関数は原関数に同じであるから，結局

$$C^{t-1}(i) = F< C^t(i-d)>$$

を表わす．これは

$$C^t(i) = F< C^{t-1}(i-d)>$$

を時間的に逆行して表示した平面模様を作る．従って，生成される模様は上下対称になる．このように同一ではないが，合同なものを以後次のように表記する．

$$w|-d;F \equiv w|d;F$$

よって，合同でない模様を作りうるずらし量dは０からINT(w/2)までであることが分る．

さて，w|0;01を使えば，

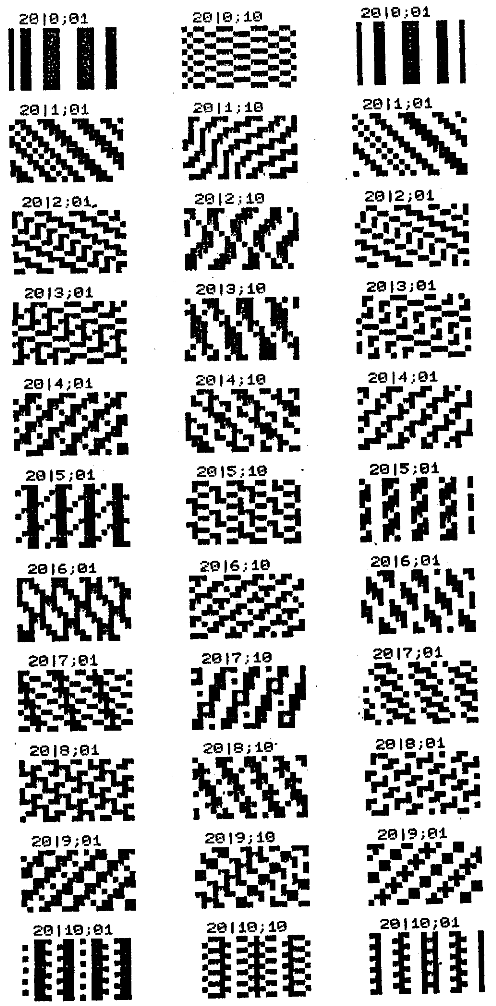
$$(C^t(i))_i = (C^{t-1}(i))_i = (C^0(i))_i$$

であるから，初期値が何であっても縦縞となる．w|1;01ならば斜方向の縞となる．dをさらに変えても縞ばかり

では面白みがないが，このときには縦方向に，参照した遠方のセルの状態との結び付きが生まれ，全体としてまったく新しいゲシュタルトが出現する．これが模様のモチーフとなる．

ずらし量dを変えて模様を生成した例を示そう．左側は関数０１による結果，中央は関数１０による結果，右側は関数０１であるが，その初期値は左側の初期値の白黒を反転したものである．定義から明らかであるが，関数１０による生成結果は，１段おきに交互に左側の該当の段と右側の段を組み合わせたものになっている．

INT(w/2)までで初期値との対応が一目瞭然なものはw|0;01, w|1;01, w|0;10の３つにすぎず，他の場合の対応を見てとるのは困難である．w|1;10は単純であるが，それなりに面白い柄である．



4　パネル

ここで，縦方向の周期を考えよう．ずらし繰返しをw回行なえば，

$$w(d,1) = (wd,w) \equiv (0,0)$$

であるから，w段生成すれば，配列の状態はもとに戻る．従って，横w，縦wの区画は平面模様の水平，垂直の繰返し単位となっている．これをパネルと呼ぶ．

パネルを貼り合わせれば，無限の平面ができる．このとき，縦の接目を１セルずらしてみると，平面模様としては合同であるが，初期値は１つ巡回した形になる．従って，初期値は都合のよい位置から記せばよい．

さて，縦方向にc＜wとなる周期cがあるとしよう．これは

$$c(d,1) + m(-w,0) \equiv (0,0)$$

ということである．すなわち，

$$c = \frac{w}{d} m \quad ,$$

右辺が整数であって，しかも最小となるのは

（w／dを既約にしたときの分母）＝m

のときである．従って

$$c = w \ / \ \mathrm{GCD}(w,d)$$

となる．

cはwの約数であるから，横幅w，縦の長さcの長方形はパネルを整分割した単位である．

パネルを大きくしたい場合には，初期値をn回繰返せばよい．このようにしても平面模様としては何ら変るところはない．初期値［C］のn回繰返しをn［C］と書けば，

nw:n(C)|d;F = w:(C)|d;F

である．これを倍幅操作と呼ぶ．

幅wの初期値がm回の繰返しからなるならば，逆の操作が可能である．この場合，初期値の繰返しの１単位を取ればよいが，位相によっては平面模様は変らないから，初期値［C］の最初のw／m個の状態を取ればよい．これを［C］／mと書けば，

w/m:(C)/m|d mod w/m;F = w:(C)|d;F

である．これを約幅操作と呼ぶ．

5　モチーフと連結対の数

モチーフがどういう形になるかは模様デザインにおいて重要な問題であるが，縦，横斜の連結対がいくつあるかという程度の大ざっぱな特性は自己相関関数によって求めることができる．例えば，黒セル同士の結び付きは初期値の０，１をそのまま計算すればよい．横方向の連結対の数は

$d=1$ のときに上下とも黒となる対であるから，

$$R(1)=\sum_{i=1}^{w} C(i)C(i-1)$$

ただし，$i-1<1$ のときはwを法とする正数の位置とみる環状自己相関を使う．同様に，縦のつながりは$R(d)$で左下，右下への結合は$R(d+1)$,$R(d-1)$ となる．

ところで，

$$R(d)=\sum_{i=1}^{w} C(i)C(i-d)=\sum_{i=1}^{w} C(i+d)C(i)$$

$$=\sum_{i=1}^{w} C(i)C(i-(w-d))=R(w-d)$$

であるから，自己相関関数の値を0からINT(w/2)まで求めておけば，すべてのずらし量dについて縦，横，斜の連結数を知ることができる．

また，その値を使えば，隣接セルばかりでなく，一般に相対位置(x,y) のセルとの共起対の数$R(d;x,y)$も知ることができ，次の値となる．

$$R(d;x,y)=R(yd-x)$$

$R(d)=R(d;0,1)$ であることは上述したとおりである．

$R(0)$は定義より，1の総数であるから，他の位置での値はこれより大きくならない．もし同じ値があるとすれば，横方向に周期が存在することを意味する．

黒セル同士の結び付きではなく，黒と黒，白と白の結び付きを考え，これを$S(d)$とする．このときは次の式で計算すればよい．

$$S(d)=\sum_{i=1}^{w}((2C(i)-1)(2C(i-d)-1)+1)/2$$

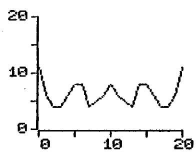
$$=2\sum_{i=1}^{w}C(i)C(i-d)$$

$$-\sum_{i=1}^{w}C(i)-\sum_{i=1}^{w}C(i-d)+w$$

$$=2R(d)-2R(0)+w$$

従って，この値も自己相関関数から求めることができる．

ずらし量の変化で使った初期値の自己相関関数を示す．



6 平面模様の制作

6．1 ランダムな初期値を評価関数で選抜する方法

これは乱数または何らかの方法で初期値を作り，出来上りの良さそうな模様に高得点を与える評価関数を利用してあらかじめ自動的に絞り込み，これを人間が判断して適切な修正を加え，模様（初期値，ずらし量）を得る方法である．

この場合，幅が狭すぎると複雑な模様なできないし，整数論的な理由によって望ましい格子が得られない場合があるので，適切な幅を選ぶ．関数０１を使うときは黒セルが２５％ほどのものが良いようである．ただし，修正の際，黒セルを補って形を作るのは，削って作るのよりは難しいので，多少多めの３０％ほどにした方がよい．この条件で初期値を作る．

評価関数の質が能率を左右することになるが，ここでは次の条件を使った．

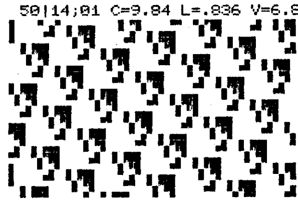
「$V(d)=L(d)^2C(d)$が大きいものを採用する」

ただし，$L(d)=r_1^2/r_2r_3$;

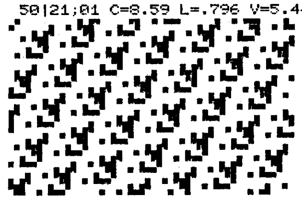
$$C(d)=2.5(4R(1)+4R(d)+R(d-1)+R(d+1))/R(0)$$

$L(d)$で格子の良さ，$C(d)$で黒セルの結合の良さを表わそうというつもりだが，条件が簡単すぎるためあまり当っていない．出鱈目な初期値の１，２番の評価のものを示す．

50|14;01 C=9.84 L=.836 V=6.87



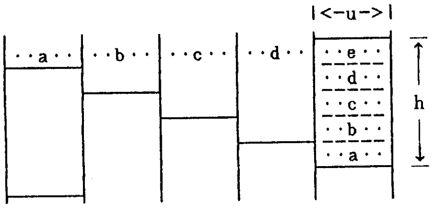
50|21;01 C=8.59 L=.796 V=5.44



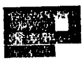
6．2 希望するモチーフを再現する方法

１次元１近傍のオートマトンでは関数０１を使えば，初期値と生成された模様が（初期値の位相を除いて）１対１に定まる．従って，モチーフと配列の仕方を決めて，その模様を再現する初期値とずらしベクトルを求めることができる．

まず，モチーフを含むユニットの形を考える必要があるが，最も簡単なのは長方形ユニットである．このとき初期値の１次元配列の中にユニットのすべての段の情報をもたなければならないから，ずらしベクトルを水平にすることはできない．初期値を求めるには各段に切離し，下から順につなげばよい．ずらしベクトルはユニットの幅をｕとすれば（ｕ，１）となる．



例として下のコーヒーカップをとると，



下の段から順にセルの状態を拾っていけばよいが，モチーフが接触しないように上下左右に余白をとる．すると初期値は

〔00000000 01111000 01111110 01111010 01111110 00000000〕

となる．

一般に１つ隣りのユニットへの移動一致ベクトルが〔u，v〕の場合でも，ｖとｈが互いに素であれば，各段を横並びになるように順につないでいけば，初期値が求められる．ｖとｈが互いに素でない場合は不可能なので，ｈを増減するなどの対策をしなければならない．たとえば，上の初期値の場合，ｈを７にする．

このときのずらしベクトルは，たとえば隣りのユニットへの移動一致ベクトルを〔u, v〕としたとき，

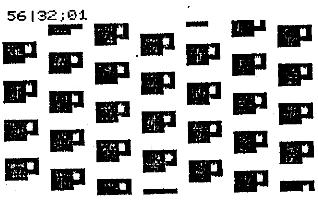
$$n(u,v) = (d,1) + (0,mh)$$

となればよい．これより，

$$d = nu$$

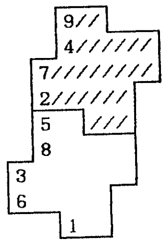
$$nv = 1+mh \equiv 1 \mod h$$

であるから，ｍを１から試して，ｎの最小解を求めれば，ｄが得られる．ここでは，ｖ＝２であるから，ｍは１でよく，ｎの最小解は４，ゆえにｄ＝３２である．



６．３　陰陽交代模様

白と黒を反転しても同じになる模様を陰陽交代模様という．この場合は図と地が交代するので，複雑な形のユニットになるが，基本的には，モチーフ再現の方法と同じ方法で作れる．次の陰陽交代模様のユニットは番号順に初期値を作ればよい．



移動一致ベクトルは（３，５）であるから，互いに素であって，再現可能である．上の順番は最下段から始めて隣接ユニットとの白黒の関係が満たされるように段を選んでいったものである．初期値は次のようになる．

〔0011110000011110011000011111000011〕

ずらし量ｄは次のようにして求める．さきほどの移動一致ベクトルと独立な移動一致ベクトル，たとえば〔2, −8〕を選ぶ．すると，

$$a(3,5) + b(2,-8) = (d,1)$$

となるはずだから，

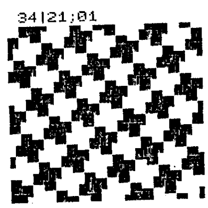
$$3a + 2b = d$$

$$5a - 8b = 1$$

が得られる．ここで，第２式の解a=5, b=3 を第１式に代入すれば，

$$d = 3\cdot 5 + 2\cdot 3 = 21$$

となる．



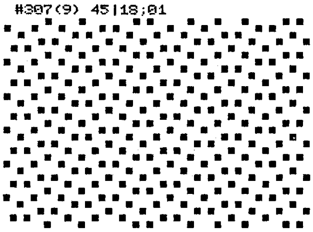
７　平面模様の試作例

ここで試作例を分類しながら，提示しよう．模様を分類するにはいろいろな方法がありうるが，伝統的名称に留意し，位相的な構造で分類する．パネルは平面模様の単位として十分大きいから，これをもとにすることにする．模様においては図と地の区別も重要であるが，一概に決めがたいので，便宜的に取扱った．

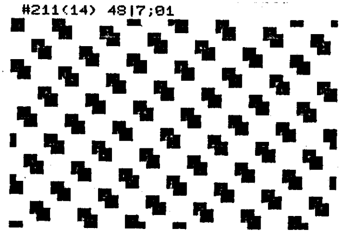
1）《無地》：図ばかり，あるいは，地ばかりのもの

2）《小紋》：図をたどって，パネルの縁に行くことができないもの

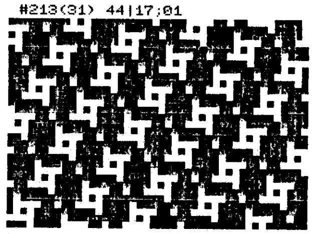
#307(9) 45|18;01



#211(14) 48|7;01

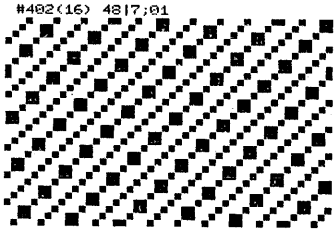


#213(31) 44|17;01

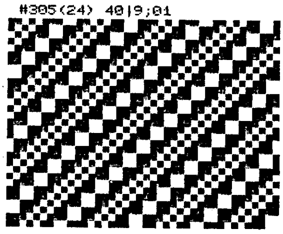


3）《縞》　：図をたどって，パネルの２つの縁に行くことができるもの

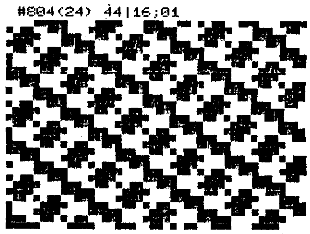
#402(16) 48|7;01



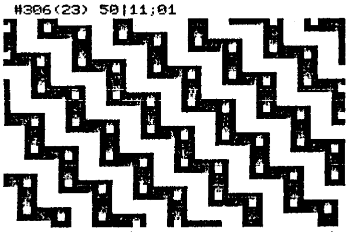
#305(24) 40|9;01



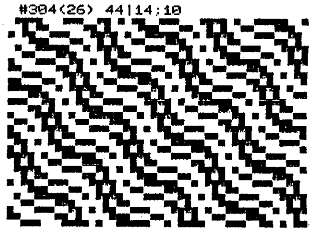
#804(24) 44|16;01



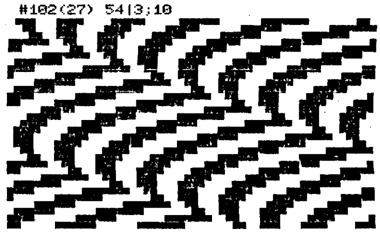
#306(23) 50|11;01



#304(26) 44|14;10

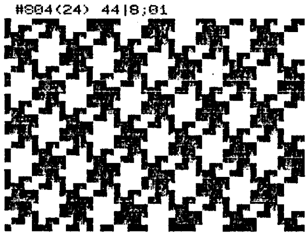


#102(27) 54|3;10

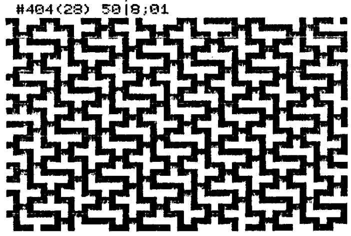


4）《格子》：図をたどって，パネルの４つの縁に行くことができるもの

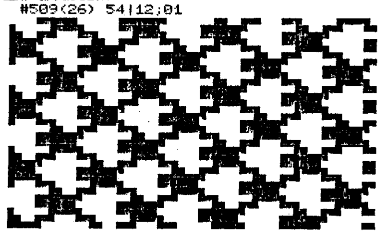
#804(24) 44|8;01



#404(28) 50|8;01



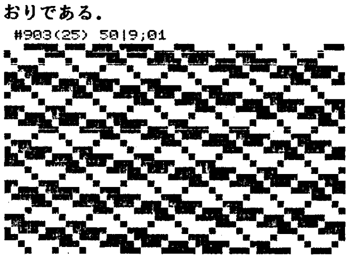
#509(26) 54|12;01



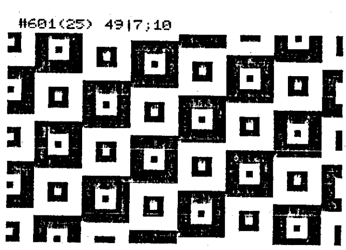
5）《陰陽交代》：これは位相的な定義ではないが，関数１０は常に陰陽交代模様を生成し，本方法の特徴となっている．縞の最後の２点はこの方法によるものである．関数０１でも作れることは上述のとおりである．

#1002(17) 34|13;01

#903(25) 50|9;01

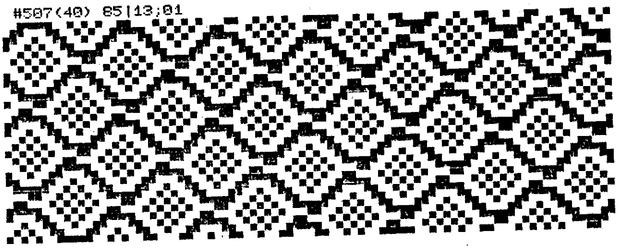


#601(25) 49|7;10

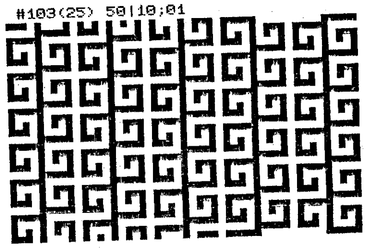


6）《対転》：さらに本方法に著しいのは，同じ初期値，ずらし量で作られる関数０１と１０の模様の関係である．これを対転と呼ぶ．上が関数０１によるもの，下が関数１０によるものである．互いの関係は１段おきに白黒を反転させるだけであるが，模様としてはまったく異なっており，一見しただけでは関係が分るものではない．

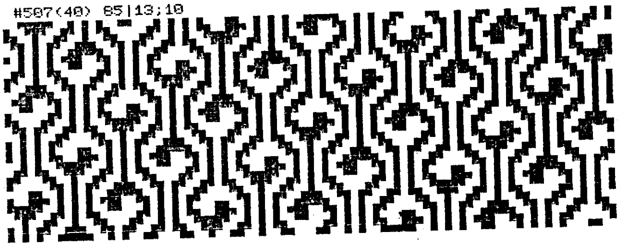
#507(40) 85|13;01



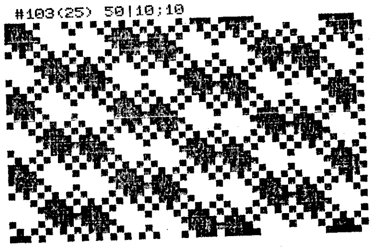
#103(25) 50|10;01



#507(40) 85|13;10



#103(25) 50|10;10



まとめ

以上に述べたとおり，１次元１近傍のセル・オートマトンによる模様生成は十分に実際的であることが明らかになった．生成の仕組みは極めて簡単であるから，グラフィック・ディスプレイ装置での実現はもちろんのこと，織機，編機などの製造機械への適用も容易と思われる．また，この手法に適したメモリ・アーキテクチャも考えられる．

デザインした平面模様がプリント生地，包装紙や壁紙，化粧タイルに使えることは言うまでもないが，セルの形を正方形にする必要はまったくなく，丸でも三角でも星形でも何でもよい．色についても同様で２色に限る必然性はなく，適宜，色を付ければ，ずらし繰返しの原理によって色の付いたモチーフが再生される．さらに言うならば，モチーフを自然の鳥獣草木等々に見たてて，より描写的な形に置き換えてもよい．要するに，創造力を刺激するような使い方が最も適切な使い方である．

参考文献

[1] Stephen Wolfram: Statistical mechanics of cellular automata; Reviews of Modern Physics,55,3(July 1983)pp601-

[2] ――:Cellular automata as models of complexity; Nature,311,4(Oct 1984) pp124-

[3] ――:科学と数学のソフトウェア；サイエンス（１９８４．１１）１２４ペー

[4] 相沢洋二：セル・オートマトンの周辺；数理科学（１９８５．９）６４ペー

[5] 高木幹雄，坂元宗和：セルラ・オートマトンが生成する三角形パターンのサイズ分布；ＴＶ全大１６－７（１９８６）

[6] Archibald H. Christie: Pattern Design/ An Introduction to the Study of Formal Ornament; Dover (1969, original 1910)

[7] 清水要：クリエーティブパターン［デザインスタディシステム9］；美術出版社（１９６７）

[8] 海野弘：装飾空間論／かたちの始源への旅；美術出版社（１９７３）

[9] 佐口七朗：パターンデザイン；ダヴィッド社（１９７７）

[10] 伏見康治，安野光雅，中村義作：美の幾何学／天のたくらみ，人のたくみ［中公新書５５４］；中央公論社（１９７９）