

カーディナルスプラインを用いた 自由曲面のモデリング手法

栗山 繁, 河合利幸, 大村皓一
大阪大学 工学部 電子工学科

3次元画像生成において、数多くの自由曲面のモデリング手法が提案されている。その中でもB-スプラインによる補間法は形状の局所的な変形操作に適していることから広く用いられているが、生成される曲面は与えられたコントロール点を含まない。与えられた点を含む曲面を生成するには、3次スプラインによる補間法が用いられるが、B-スプラインのような局所的な台をもたないため、曲面データの部分的な変更に対しても、全データ数に比例した回数の計算が必要となる。この性質は、対話的なモデリングシステムにおいては、データの数が増大するに従って大きな障害となる。

この問題を解決するために、我々は、補間関数としてカーディナルスプラインに着目し、これをB-スプラインで構成し、自由曲面のモデリングに適用する手法を考案した。

Free Form Surface Modeling with Cardinal Spline

Shigeru KURIYAMA, Toshiyuki KAWAI, Koichi OMURA
OSAKA University, Faculty of Engineering, Department of Electronic Engineering
2-1, Yamadaoka, Suita, Osaka, 565 Japan

A great number of approaches have been proposed to the free form surface modeling in 3D image generation. Among them, B-spline is believed to be suitable for the local modification but the surfaces do not contain given control points. The cubic spline is applied to eliminate this property. But not having local support such as B-spline, the cost of calculation is proportional to the total number of the data even if the local modifications were made. It is undesirable for the interactive modeling system.

In this paper, we introduce cardinal spline composed of B-spline, which is applied to the free form surface modeling.

1. はじめに

3次元空間における形状モデルを計算機内に構築し、光学的シミュレーションにより映像化するコンピュータグラフィックスの分野において、数多くのモデリング手法が提案されている⁽¹⁾。

サーフェイスモデルの中で、その表現能力の高さから広く用いられている自由曲面モデルは、3次元空間座標で与えられるコントロール点を関数で補間して曲面式を生成する。このとき用いられる補間関数の代表的なものとして、スプライン関数⁽²⁾がある。

B-スプラインによる補間法は、形状の局所的な変形操作に対する柔軟性に富み広く用いられているが、生成される曲面は与えられたコントロール点を含まない。与えられた点を含む曲面を生成するためには、3次スプラインによる補間法が用いられるが、B-スプラインのような局所的な台をもたないため、コントロール点の部分的な変更に対しても、曲面全体のコントロール点の個数に比例した回数数の計算が必要となる。この性質は、多くのコントロール点から構成される形状の対話的な変形操作を行うときには、大きな障害となる。

以上の問題点をふまえて、我々は、与えられたコントロール点を含む曲面を生成する補間関数としてカーディナルスプラインに着目し、これをB-スプラインの基底で構成することにより局所的な変形操作に伴う計算負荷を軽減することを考えた。本文では、この補間関数をモデリングに適用する手法について述べる。

2. 新たな基底関数の構成法

2.1 位置づけ

一定の基底関数 $B_i(x)$ で、 n 個のコントロール点 P_i を補間して生成される空間曲線 $Q(x)$ は、

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i * B_i(x) \quad (1)$$

変数 x が $(0 \leq x \leq n-1)$ の区間で定義され、その値が i のとき $Q(x)$ が P_i と等しくなるようにするには、 $B_i(x)$ が次の条件を満たせばよい。

$$B_i(j) = \delta_{i,j} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (2)$$

(但し、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカー(Kronecker)のデルタを表わす。)

式(2)のような性質をもつ補間関数の一つに標本化関数(sampling function)がある。

$$F_i(x) = \sin(\pi(x-i)) / \{\pi(x-i)\} \quad (3)$$

しかし、 $F_i(x)$ は定義域が無限幅であることや有限次数の多項式で展開できないことなどから、一般に曲面のモデリングには適していない。

有限次数の多項式で式(2)の性質をもつものとして、ラグランジュの補間係数(Lagrange interpolation coefficient)がある。

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} (x-j) / \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} (i-j) \quad (4)$$

しかし、 $L_i(x)$ は多項式の次数が n の値に依存していることや、式の値が両端近くで大きく振動していることなどが問題となる。

スプライン関数のなかで式(2)の性質をもつものに、カーディナルスプライン(cardinal spline)がある。

$$C_i(j) = \delta_{i,j} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (5)$$

有限区間で定義された n 個の節点をもつ m 次のスプライン $C_i(x)$ は $m+n+1$ 個の自由なパラメータをもつが、式(5)の n 個の条件だけではパラメータの値は定まらない。残りの $m+1$ 個の条件式は、 $C_i(x)$ の両端の節点において、その高階導関数の値を 0 にすることにより得られる。

$C_i(x)$ の次数が奇数 $m = 2k-1$ のときは、

$$C_i^{(r)}(0) = C_i^{(r)}(n-1) = 0 \quad (r = k, k+1, \dots, 2k-1) \quad (6)$$

と書ける。

カーディナルスプラインは点の数 n に関係なく、その次数を任意に選べるところに利点があるが、式(5)のように節点の座標値を零点に選ぶ場合、式(6)を同時に満たす係数 c_i の値は一般的には存在しない。しかし、曲面のモデリングにおいては基底関数の節点を零点に選ぶ方が計算の簡略化にとって望ましい。そこで、B-スプラインが任意のスプライン関数の基底として用いられることから^{(2)・(3)}、式(5)で与えられるカーディナルスプラインを無限区間で定義し、式(6)の条件を無視できるものとみなして、B-スプラインで構成し、それを基底関数として曲面のモデリングに用いることにする。B-スプラインを基底として用いれば、4章で示すように基底関数の張力の操作をも容易に行うことができる。

2.2 B-スプラインによる構成法

節点が等間隔に取られた、 m 階 ($m-1$ 次) i 番目のB-スプラインの基底 $N_{i,m}(x)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} N_{i,m}(x) &= 1 && \text{if } i \leq x \leq i+1 \\ &= 0 && \text{otherwise} \end{aligned}$$

$$N_{i,m}(x) = \overline{N}_{i,m}(x) \otimes N_{i,m}(x) \otimes \dots \otimes N_{i,m}(x) \quad (7)$$

但し、 \otimes は畳込み積分(convolution integral)を表わす。

$x=0$ で1の値をとる無限区間で定義されたカーディナルスプラインを、B-スプラインで補間したものを $S_{0,m}(x)$ とすると、式(5)より、

$$S_{0,m}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i N_{i,m}(x) \quad (8)$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i N_{i,m}(j) = \delta_{0,j} \quad (j = -\infty, \dots, \infty) \quad (9)$$

で与えられる。

式(8)、(9)で与えられるスプライン関数 $S_{0,m}(x)$ は次数を無限大 ($m \rightarrow \infty$) にすると、標準化関数 $F_0(x)$ に収束する。また、次数を無限大にとったラグランジュの補間係数とも一致することになる⁽³⁾。

式(9)で与えられる c_i の要素は i の値の増大と共に0に収束する。ゆえに、式(8)で与えられる $S_{0,m}(x)$ を曲面のモデリングに用いるときには、局所的な台をもつようにある有限区間 ($-n \leq x \leq n$) で打切る。このとき c_n の値は、関数の定義域を有限区間で打切るために生じる誤差を評価するのに用いられる。以上のことから、 m 階 k 番目の基底関数は式(9)で与えられる c_i を用いて、式(8)をあらため次式のように定義される。

$$\begin{aligned} S_{k,m}(x) &= \sum_{i=-n}^n c_i N_{i,m}(x-k) && (-n \leq x \leq n) \\ S_{k,m}(x) &= 0 && (x < -n, n < x) \end{aligned} \quad (10)$$

以後、式(5)、(6)で定義されるカーディナルスプラインとの混同を避けるため、式(9)、(10)で構成されるスプライン関数を、サンプリングスプライン (S-スプライン) と呼ぶことにする。

2.3 係数 c_i の導出法

m 階 0 番目のB-スプラインの節点での値は、次式のように表わされる。(付録a参照)

$$\begin{aligned} V_j &= N_{0,m}(j) \\ &= 1 / (m-1)! * \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p {}_m C_p (j-p)^{m-1} \quad [1 \leq j \leq m-1] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{但し、} {}_m C_p = m! / [(m-p)! * p!]$$

係数 c_i は、 $S_{0,m}(x)$ が偶関数であることから $c_i = c_{-i}$ となる。

式(9), (11)の条件をxの正の範囲のみで考えると, $m = 2k$ のとき, ($2 \leq k$)

$$\sum_{i=-(k-1)}^{k-1} V_{k+i} \neq c_{-i} = 1 \quad (12)$$

$$\sum_{i=-(k-1)}^n V_{k+i} \neq c_{n-i} = 0 \quad [1 \leq n \leq k-2] \quad (3 \leq k) \quad (13)$$

$$\sum_{i=-(k-1)}^{k-1} V_{k+i} \neq c_{n-i} = 0 \quad [k-1 \leq n] \quad (14)$$

式(14)より, 係数 c_i は $m-2$ 階の漸化式で表わせるので $c_i = \kappa \xi^i$ とおくと,

$$\kappa (V_1 \xi^{n+k-1} + V_2 \xi^{n+k-2} + \dots + V_{2k-1} \xi^{n-(k-1)}) = 0 \quad (15)$$

$\kappa \neq 0, \xi \neq 0$ より,

$$\therefore V_1 \xi^{n-2} + V_2 \xi^{n-3} + \dots + V_{2k-1} = 0 \quad (16)$$

式(16)は, 絶対値が1未満の $k-1$ 個の負の実数解 ξ_0, \dots, ξ_{k-2} をもつ. (付録b参照)

ゆえに, ξ_0, \dots, ξ_{k-2} を用いて, c_i は次式のように表わされる.

$$c_i = c_{-i} = \sum_{n=0}^{k-2} \kappa_n (\xi_n)^i \quad (0 \leq i \leq \infty) \quad (17)$$

ただし, 定数 κ_n の値は式(12), (13)より導かれる $k-1$ 個の式から算出される.

式(17)は, ξ_n が重解をもつときは別の形式で与えられる. (付録c参照)

$m = 4$ (3次) の場合の c_i の値は,

$$c_i = c_{-i} = 3^{0.5} \neq (-2 + 3^{0.5})^i \quad (0 \leq i \leq \infty) \quad (18)$$

で与えられる.

$m = 2k+1$ のときは, V_j の値を,

$$V_j = N_{0,m}(j-0.5) \quad [1 \leq j \leq m] \quad (19)$$

で求めて (付録a参照), 式(12)~(17)より同様に導かれる. このとき, $S_{0,m}(x)$ の零点は節点より0.5だけずれる.

3. S-スプラインによるモデリング手法

2章で定義したS-スプラインの基底関数を用いて, 自由曲面をモデリングする手法を以下に述べる.

3.1 空間曲線

nu 個の一次配列の形式で与えられたコントロール点 $P_i = \{px_i, py_i, pz_i\}$, ($0 \leq i \leq nu-1$)を, 式(9), (10)で定義されるS-スプラインの基底関数 $S_{i,m}(u)$ で補間して生成される空間曲線は次式で与えられる.

$$Q_m(u) = \sum_{i=-n}^{nu-1+n} P_i \neq S_{i,m}(u) \quad (20)$$

自由端末条件のときは,

$$\begin{aligned} P_i(-n \leq i < 0) &= P_0 \\ P_i(nu \leq i < nu+n) &= P_{nu-1} \end{aligned} \quad (21)$$

周期的端末条件のときは,

$$\begin{aligned} P_i(-n \leq i < 0) &= P_{(i \bmod nu)} \\ P_i(nu \leq i < nu+n) &= P_{(i \bmod nu)} \end{aligned} \quad (22)$$

また, 空間曲線の端点($i = 0$ or $i = nu-1$)において接線ベクトルを P'_0, P'_{nu-1} で固定するには,

$$\begin{aligned} P_i(-n \leq i < 0) &= P_{-1} - P'_0 \\ P_i(nu \leq i < nu+n) &= P_{2*(nu-1)-1} + P'_{nu-1} \end{aligned} \quad (23)$$

とする.

3.2 自由曲面

$nu \times nv$ 個の二次配列の形式で与えられたコントロール点 $P_{i,j} = \{px_{i,j}, py_{i,j}, pz_{i,j}\}$, ($0 \leq i \leq nu-1, 0 \leq j \leq nv-1$)を補間して生成される自由曲面は次式で与えられる.

$$Q_m(u, v) = \sum_{j=-n}^{n} \sum_{i=-n}^{n} P_{i,j} * S_{i,m}(u) S_{j,m}(v) \quad (24)$$

$PU_j(u) = \sum_{i=-n}^{n} P_{i,j} * S_{i,m}(u)$ と定義すると、 $PU_j(u)$ は空間曲線の式となる。ゆえに式(24)を、

$$Q_m(u, v) = \sum_{j=-n}^{n} PU_j(u) * S_{j,m}(v) \quad (25)$$

のように書き換えると、式(25)により生成される自由曲面は、空間曲線により陽に表現されているとみなせるので、次数の異なる基底関数を用いたり異なる点集合で生成された曲線群を補間して、局所的な角張りや分岐した形状の表現が容易に行える。

4. ベータスプライン(Beta-spline)の適用

S-スプラインの次数は任意に設定でき、次数がn次のとき生成される曲面は C^{n-1} 級の連続性をもつ。しかし、次数を3以上に設定しても実際に生成される形状にはさほど影響を与えないので、コンピュータの計算負荷を抑えるためにも、その次数は3次ぐらいに選ぶのが適当と思われる。このとき生成される双3次曲面は C^2 級となるが、形状のモデリングにおいては幾何的な2次の連続性(G^2 級)を考慮して曲面式の定義をおこなう方が、曲面の変形操作に柔軟性を与えることができる。

ここでは、Barskyらによって提案されたベータスプライン⁽⁴⁾を基にしてS-スプラインの基底関数を構成する手法について述べる。この手法では、基底関数の張力を調整することにより曲面の張りぐあいを変えることができる。

4.1 ベータスプラインの定義式

ベータスプラインとは、各セグメント間での関数のパラメトリックな連続性の条件を、幾何的な連続性の条件に拡張したものである。

i番目のセグメント多項式を Q_i 、その1次導関数を Q_i' 、2次導関数を Q_i'' とすると、

$$\begin{aligned} Q_{i-1}(u_i) &= Q_i(u_i) \\ \beta_1 Q_{i-1}'(u_i) &= Q_i'(u_i) \\ \beta_1^2 Q_{i-1}''(u_i) + \beta_2 Q_{i-1}'(u_i) &= Q_i''(u_i) \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)は、幾何的な2次の連続性をもつ条件式となる。(G²級)

β_2 は生成される曲線(曲面)の張力を変化させるパラメータで、その影響を直感的に把握しやすい。また、 β_2 の値を変えても基底関数の対称性は保存されるという特徴がある。そこで、 β_1 の値を1に固定した場合のベータ2スプライン(Beta2-spline)⁽⁵⁾を用いてS-スプラインの基底関数を構成する。

4.2 ベータ2スプラインによるS-スプラインの構成

S-スプラインの基底関数はベータ2スプラインのi番目の基底関数を $B_i(x, \beta_2)$ とすると式(9)、(10)を参照して、次式のように構成される。

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_i(j, \beta_2) = \delta_{0,j} \quad (j = -\infty, \dots, \infty) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} S_{k,m}(x, \beta_2) &= \sum_{i=-n}^n c_i B_i(x-k, \beta_2) \quad (-n \leq x \leq n) \\ S_{k,m}(x, \beta_2) &= 0 \quad (x < -n, n < x) \end{aligned} \quad (28)$$

β_2 の値が0のとき、 $B_i(x, 0)$ は3次のB-スプラインの基底関数 $N_{i,3}(x)$ に一致する。

係数 c_i の値は、

$$c_i = c_{-i} = \{1 + 8/(\beta_2 + 4)\}^{0.5} * [-(\beta_2 + 8)/4 + \{(\beta_2 + 4)(\beta_2 + 12)\}^{0.5}/4]^i \quad (0 \leq i \leq \infty) \quad (29)$$

で与えられる。(付録d参照)

式(28)、(29)で構成されるS-スプラインの基底関数の形が、 β_2 の値に対して変化する様子を図1に示す。また、それぞれの基底関数を用いた場合に生成される空間曲線の様子を図2に示す。

(但し、図1の基底関数は、 $c_n < 10^{-3}$ を満たすように打切られたもの。)

3次スプラインで補間された曲線は、コントロール点の与え方によっては、しばしば好ましくない振動が発生するが、張力の値を調整することによりこの振動を取り除くことができる。

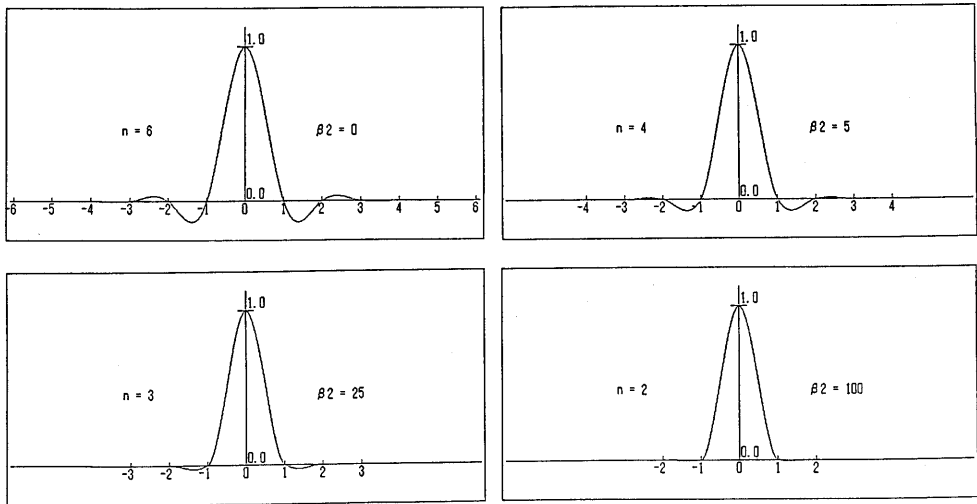


図 1. β_2 の値の増加に伴う S-スプラインの基底関数の変化

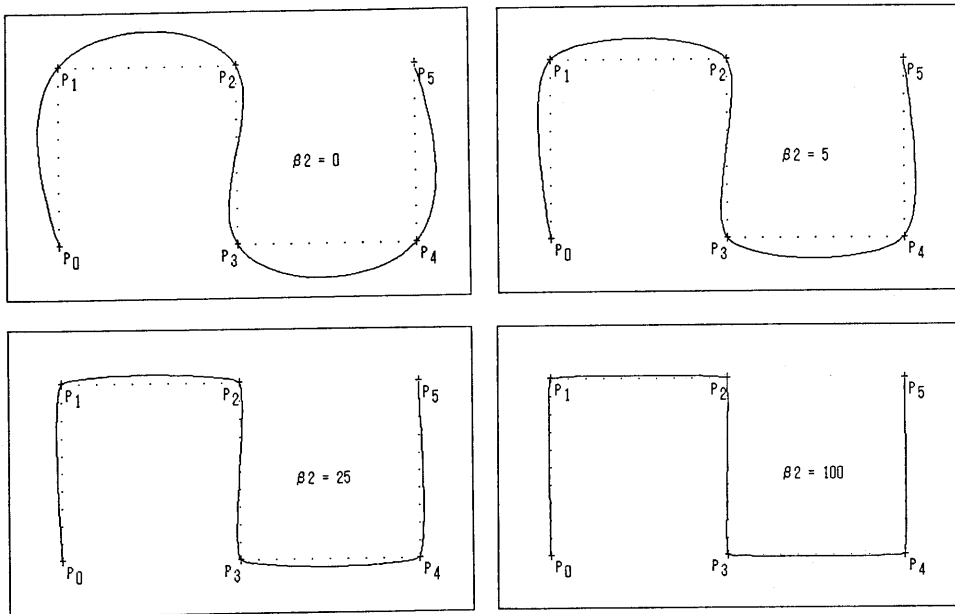


図 2. 図 1 の基底関数により生成される曲線

5. むすび

本報告では、B-スプラインの基底で構成されたカーディナルスプライン（S-スプライン）を用いて、与えられたコントロール点を含む曲面を生成する新たなモデリング手法について述べた。

この手法では、張力パラメータを有する3次スプラインを、B-スプラインのような局所的な台をもった基底関数として扱うことができるので、コントロール点の部分的な変更に対して、基底関数の台の幅（非零の定義域）の自乗に比例した回数の計算で曲面を更新することができる。これにより対話的な変形操作を行うモデリングシステムの性能を向上させることができる。

また、この手法は形状認識システムにより得られた空間座標データを曲面データに変換する手法⁽⁶⁾や、アニメーションシステムにおける運動軌跡の補間に対しても応用することができる。

【参考文献】

- (1) David F. Rogers, J. Alan Adams, 山口富士夫訳：“コンピュータグラフィックス”，日刊工業新聞社，(1979)。
- (2) 市田浩三，吉本富士市：“シリーズ新しい応用の数学20：スプライン関数とその応用”，教育出版，(1979)。
- (3) Marden, M. J., “An identity for spline functions and its application to variation diminishing spline approximations”, J. Approx. Theory, 3 pp.7-49 (1970).
- (4) Brian A. Barsky and John C. Beatty: “Local Control of Bias and Tension in Beta-splines”, Computer Graphics(Proc. SIGGRAPH 83), Vol.17, No.3, pp.193-218, (July. 1983).
- (5) Brian A. Barsky and Tony D. DeRose: “The Beta2-spline: A Special Case of the Beta-spline Curve and Surface Representation”, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol.5, No.9, pp.46-58, (Sep. 1985).
- (6) Francis J. M. Schmitt, Brian A. Barsky, Wen-Hui Du: “An Adaptive Subdivision Method for Surface-Fitting from Sampled data”, Computer Graphics(Proc. SIGGRAPH 86), Vol.20, No.4, pp.179-188, (Aug. 1986).

付録

< a. 式(11)の導出 >

式(7)で与えられるB-スプラインのm階0番目の基底関数のm階導関数を超関数的に求めると、

$$\begin{aligned} N_{0,m}(x)^{(m)} &= \overline{N}_{0,1}(x) \otimes \overline{N}_{0,1}(x) \otimes \cdots \otimes \overline{N}_{0,1}(x) \\ &= (\overline{\delta}(0) - \delta(1)) \otimes (\delta(0) - \delta(1)) \otimes \cdots \otimes (\delta(0) - \delta(1)) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p {}_m C_p \delta(p) \end{aligned} \quad (30)$$

但し、 $\delta(x)$ はインパルス関数を表わす。

式(30)を再びm回積分すると、

$$N_{0,m}(x) = 1 / (m-1)! * \sum_{p=0}^m (-1)^p {}_m C_p (x-p)_+^{m-1} \quad (31)$$

但し、 $(x-p)_+^{m-1}$ は切断べき関数を表わす。

ゆえに、 $x = 1, 2, \dots, m-1$ を代入して式(11)が導かれる。

< b. 式(16)の解の存在 >

式(16)の係数は全て正なので($V_j > 0 \forall j$)、その実数解は負である。

また、係数の対称性より($V_j = V_{-j} \forall j$)、実数解 α が存在すれば同時に α^{-1} も存在することになる。
式(16)がn個の複素解 $\{a_k + i b_k, a_k - i b_k\} (0 \leq k \leq n/2 - 1)$ をもつと仮定すると、係数の対称性より、その全ての積は1となる。

$$\prod_{k=0}^{n/2-1} (a_k + i b_k * a_k - i b_k) = \prod_{k=0}^{n/2-1} (a_k^2 + b_k^2) = 1 \quad (32)$$

$$\therefore a_k = b_k = 0 \quad (0 \leq k \leq n/2 - 1) \quad (33)$$

以上のことより、式(16)は $m-2$ 次式であることから、 $(m-2)/2$ 個の、絶対値が1未満の負の実数解 $\{-1 < \xi_n < 0\} (0 \leq n \leq (m-2)/2)$ をもつ。

< c. 式(16)が重解をもつときの係数 c_i の値 >

式(16)が $d+1$ 重解 $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_d$ をもつとすると、係数 c_i は次式のように表わされる。

$$c_0 = \sum_{n=0}^{k-2} \kappa_n \quad (34)$$

$$c_i = c_{-i} = \sum_{n=0}^d {}_{i+n} C_n \kappa_n (\xi_0)^i + \sum_{n=d+1}^{k-2} \kappa_n (\xi_n)^i \quad (0 < i \leq \infty) \quad (35)$$

< d. 式(29)の導出 >

ベータ2スプラインの基底関数は四つの基底セグメント

$b_{-2}(t, \beta_2), b_{-1}(t, \beta_2), b_0(t, \beta_2), b_1(t, \beta_2)$ から構成される。

$$b_1(t, \beta_2) = 1 / \delta * [2t^3]$$

$$b_0(t, \beta_2) = 1 / \delta * [2 + 6t + (3\beta_2 + 6)t^2 - (2\beta_2 + 6)t^3]$$

$$b_{-1}(t, \beta_2) = 1 / \delta * [(\beta_2 + 8) - (3\beta_2 + 12)t^2 + (2\beta_2 + 6)t^3]$$

$$b_{-2}(t, \beta_2) = 1 / \delta * [2 - 6t + 6t^2 - 2t^3]$$

$$\delta = \beta_2 + 12 \quad (36)$$

境界における値 V_j は、

$$V_1 = V_3 = 2 / \delta, \quad V_2 = (\beta_2 + 8) / \delta \quad (37)$$

式(16)より、

$$\xi_0 = -(\beta_2 + 8) / 4 + \{(\beta_2 + 4)(\beta_2 + 12)\}^{0.5} / 4 \quad (38)$$

式(12)の条件により、

$$\kappa_0 * (\xi_0 V_1 + V_2 + \xi_0 V_3) = 1 \quad (39)$$

$$\therefore \kappa_0 = \{1 + 8 / (\beta_2 + 4)\}^{0.5} \quad (40)$$