

線分近似表現から3次のBézier曲線表現への変換手法

山田啓一

佐藤文孝

(株)東芝 情報通信システム技術研究所

線分近似図形から、それが表現する形状の3次のBézier曲線表現を得る方法を提案する。まず、与えられた線分近似図形の各頂点の属性を局所的な情報から判定し、各近似線分両端の属性の関係によって、直線部分と曲線部分の切分けを行う。次に、直線部分には直線を、曲線部分には3次のBézier曲線セグメントを当てはめる。線分近似図形から元の形状を推定するために、モデルを導入した。誤差を許すことにより、曲線部分に効率良くBézier曲線セグメントが当てはめられるようにした。実験プログラムによる評価により、本方法による変換後の形状は、線分近似図形が表わしているもとの形状をほぼ正しく再現している事が、定性的に確かめられた。

BEZIER CURVE FITTING TO PLANER FIGURES
APPROXIMATED BY SHORT LINE SEGMENTS

Keiichi Yamada

Fumitaka Sato

TOSHIBA Corporation, Information Communication Systems Laboratory

2-9 Suehiro-Cho Ome, Tokyo 198, Japan

This paper proposes a two-step method to fit 3rd degree Bézier curves to planer figures whose representation is given as polygons. The 1st step assigns an attribute to each vertex of a given polygon based on the local information to determine curve segments or line segments. The 2nd step fits one or more Bézier curves to the curve segments, estimating their original shape using a polygon-approximation model. An example of results used for evaluation of this method is demonstrated.

1. はじめに

DTP (Desk Top Publishing) の分野では、曲線表現方式として、3次のBézier曲線セグメントが標準的に用いられつつある。

3次のBézier曲線セグメント $P(t)$ は、2次元平面上で4個の制御点 Q_0, Q_1, Q_2 及び Q_3 によって、次式で表わされる [1]。

$$P(t) = (1-t)^3 Q_0 + 3(1-t)^2 t Q_1 + 3(1-t) t^2 Q_2 + t^3 Q_3 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

Bézier曲線セグメントは、人手による形状の制御が行いやすい等の特徴を有しているが、一方、与えられた形状にBézier曲線セグメントを自動的に当てはめるのが困難であるという欠点がある。

本稿では、線分近似表現された形状を3次のBézier曲線表現に変換する方法と、その方法の実験による評価結果について報告する。

なお、議論をわかりやすくするため、線分近似表現に用いられる各線分に、ひとふで書きの方向に相当する一連の方向を持たせ、直線ショートベクトルとして取り扱うこととする。

本方法は、まず、直線ショートベクトルを、ひと続きの曲線を表わしている部分と、直線を表わしている部分とに切分ける。曲線を表現している部分に対しては、もとの形状を表わす曲線が通ると推定される点の位置とその位置での傾きを定める。次に、これらの位置と傾きを、もとの形状なるべく正しく表現し、かつ1つの曲線部分をなるべく少ない数のBézier曲線セグメントで表現できるように、3次のBézier曲線セグメントで補間する。直線ショートベクトルからの曲線部分の検出及び、もとの形状の推定は、線分近似表現ともとの形状との関係のモデルによって行った。

2. 直線部分と曲線部分の切分け方法

2.1 線分近似表現ともとの形状との関係のモデル

いま、図1に示すように、円が正多角形で線分近似されているものとする。円の囲む面積と多角形の囲む面積が等しくなるという条件を課すと、図1中の m と n の関係は、一つの線分で近似される円弧の中心角の関数として図2に示すようになる。また、図1において、円と直線 L は線分 AB の中点 X で接する。

図1に示す図形全体にあるアフィン変換をほどこした結果、図3に示すように変換されたとする。線分上の内分比はアフィン変換によって不変であることから、図3における m' と n' との関係は図1と同様で図2によって表わされることになる。また、楕円と直線 L' とは、線分 $A'B'$ の中点

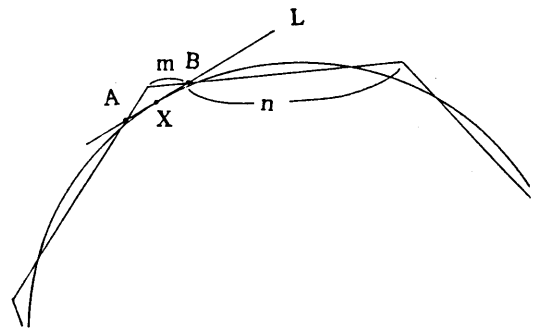
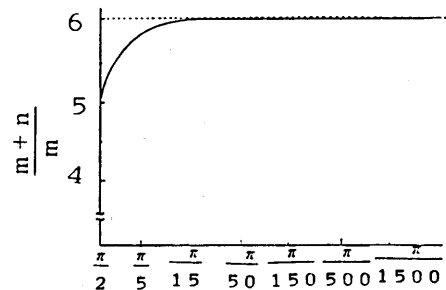


図1. 面積が等しい円と正多角形の関係



一つの線分で近似される円弧の中心角 (rad)

図2. 図1において、一つの線分で近似される円弧の中心角と、 $(m+n)/m$ との関係

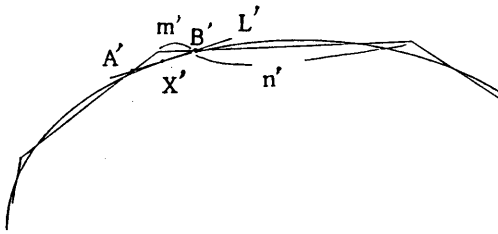


図3. 図1にあるアフィン変換をほどこした例

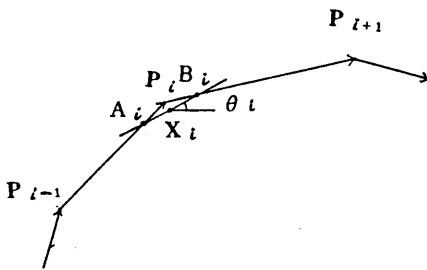


図4. 直線ショートベクトルから捕すべき点と、角度を求める方法

X' で接する。以上の考察から次のモデルを作り、用いた。

図4に示すように、ある形状が直線ショートベクトルによって線分近似表現されている時、各頂点 P_i について、その頂点を終点とする直線ショートベクトルを5:1に内分する点 A_i と、その頂点を始点とする直線ショートベクトルを1:5に内分する点 B_i とを結ぶ線分 $A_i B_i$ の中点を X_i 、線分 $A_i B_i$ の傾きを θ_i とすると、点列 X_i と各点 X_i における傾き θ_i を補間する曲線（3次Bézier曲線）が表現されている形状であるとする。

ただし、本節の議論は一つの連続な曲線部分に対してのものであることに注意しなければならない。次節では、与えられた直線ショートベクトルから連続な曲線部分を検出する方法について述べる。

2.2 直線部分と曲線部分の切り分け方法

形状が直線ショートベクトルによって線分近似表現されているとき、ベクトルの各接続点 P_1, P_2, \dots, P_n に対して、表1に示す4種類の属性のうちの一つを与えたとする。ある線分が直線部分であるか曲線部分であるか、また、そのベクトルの終点が1つの直線部分または曲線部分の終わりの点であるかそうでないかは、その線分の両端に付けられた属性と表2に示す関係になる。

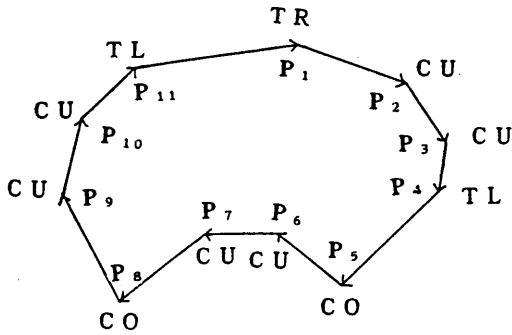
従って、各接続点に表1に示す属性の一つを与

表1. 線分の両端に付ける属性

記号	意味
TL	直線ショートベクトルの進む向きに、曲線部分が直線部分になめらかに接する点
TR	直線ショートベクトルの進む向きに、直線部分が曲線部分になめらかに接する点
CU	曲線部分上の点
CO	角の点。すなわち形状の傾きが非連続となる点

表2. 直線ショートベクトルの始点及び終点の属性とそのベクトル部分の種類

ベクトルの始点の属性	ベクトルの終点の属性	そのベクトル部分の種類	そのベクトルの終点
TR	TL	曲線	曲線部分の終わり
TL	TR	直線	直線部分の終わり
TR	CO	曲線	曲線部分の終わり
TL	CO	直線	直線部分の終わり
CO	TR	直線	直線部分の終わり
CO	TL	曲線	曲線部分の終わり
CO	CU	曲線	曲線部分の途中
CU	CO	曲線	曲線部分の終わり
TR	CU	曲線	曲線部分の途中
TL	CU	存在せず	
CU	TR	存在せず	
CU	TL	曲線	曲線部分の終わり
CO	CO	直線	直線部分の終わり
CU	CU	曲線	曲線部分の途中
TL	TL	存在せず	
TR	TR	存在せず	



始点	終点	種類
P ₁₁	P ₁	直線
P ₁	P ₄	曲線
P ₄	P ₅	直線
P ₅	P ₈	曲線
P ₈	P ₁₁	曲線

図5. 直線ショートベクトルからの直線部分と曲線部分の判定の例

えることができれば表2に示す関係を用いることにより、そこが曲線部分であるか直線部分であるか決定し、どこからどこまでが一つの曲線部分で、どこからどこまでが一つの直線部分であるかを決定することができる。図5に直線部分、曲線部分の判定の例を示す。

なお、曲線と直線がなめらかに接する点をタンジェントポイントと、また、角の点、すなわち傾きが非連続となる点をコーナ・ポイントと、それぞれ呼ぶことにする。

2. 3 直線ショートベクトルからコーナ・ポイントを検出する方法

単純に、二つの直線ショートベクトルによってはさまれる角 ϕ が、ある基準角度 $\phi_{r.e.t}$ より小さい時、この二つの直線ショートベクトルの接接点をコーナ・ポイントとする方法だけでは、例えば図6に示す場合には、うまく行かない。同図(a)で、 ϕ_1 と ϕ_2 は同じ大きさであるので、上記の方法によれば ϕ_1 が角ならば ϕ_2 も角、 ϕ_1 が角でないならば、 ϕ_2 も角でないことになる。しかし、逆にもともと(b)の形状であって、これが(a)のように線分近似された可能性もある。こ

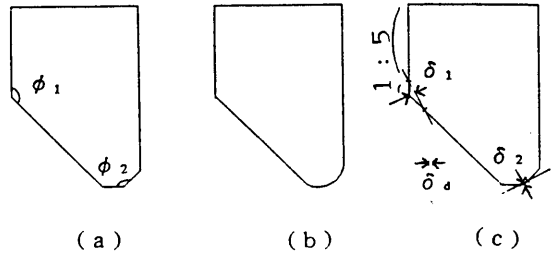


図6. 角の説明図

のように、実際に $\phi_{r.e.t}$ より大きい角が存在している場合、上記の方法ではこれを角と認識することは出来ない。

今回、この問題点を次の考え方により解決した。すなわち、もともとの形状が最大許容距離誤差が δ_0 で線分近似されているものと仮定することにより、例えば図6(c)の δ_2 、 δ_5 が、 δ_0 より大きければそこが角であると認識し、小さければ角でないと認識するのである。ただし本方法によっても角を検出できない場合も有り得るが、この場合には、この部分は近似的に角でないと見なくても真の形状から δ_0 以上の誤差は生じない。

2. 4 直線ショートベクトルからタンジェント・ポイントを検出する方法

(a) 曲線部分が直線部分になめらかに接する点を直線ショートベクトルから検出する方法

点 P_1 がコーナ・ポイントでなく、かつ

$$L_1^r > A \quad (2)$$

かつ

$$L_1^l \cdot B < L_1^r \quad (3)$$

かつ

$$(\pi - \phi_1) > \phi_{r.e.t} \quad (4)$$

の条件が成立するとき、点 P_1 を曲線部分が直線部分になめらかに接する点とした。

ここで、それぞれ図7に示すように、 L_1^l は点 P_1 を終点とする直線ショートベクトルの長さ、

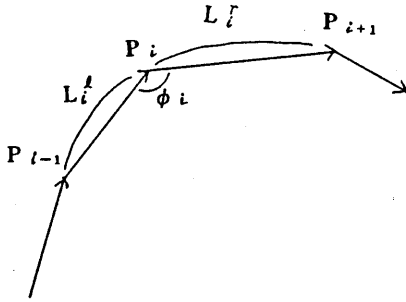


図7. タンジェント・ポイントの判定

L_i^r は点 P_i を始点とする直線ショートベクトルの長さ、 ϕ_i は点 P_i で接続している二つの直線ショートベクトルがはさむ角度である。A、B 及び $\phi_{r,i}$ は実験的に定めた定数である。

(b) 直線部分が曲線部分になめらかに接する点を直線ショートベクトルから検出する方法

点 P_i がコーナポイントでなく、かつ

$$L_i^l > A \quad (5)$$

かつ

$$L_i^r \cdot B < L_i^l \quad (6)$$

かつ

$$(\pi - \phi_i) > \phi_{r,i} \quad (7)$$

の条件が成立するとき、点 P_i を直線部分が曲線部分になめらかに接する点とした。ここで、 L_i^l 、 L_i^r 、 ϕ_i 、A、B 及び $\phi_{r,i}$ の意味は (a) の場合と同様である。

3. 直線ショートベクトルへの Bézier 曲線の当てはめ方法

3.1 曲線部分の両端のモデル

2. 1 では、1つの曲線部分を表わす直線ショートベクトルと、もとの曲線形状との関係のモデルを定義した。本節では、曲線部分の両端に関して、もとの曲線形状との関係のモデルを定義する。

1つの曲線部分の接ぎめは、タンジェント・ポイント又はコーナ・ポイントのどちらかである。

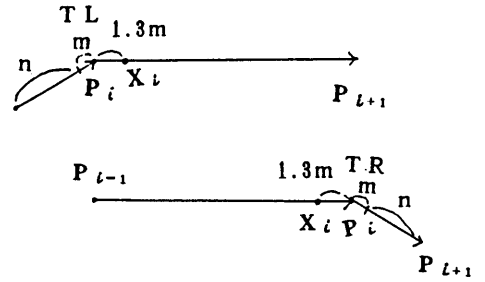


図8. タンジェント・ポイントでの補間点と角度

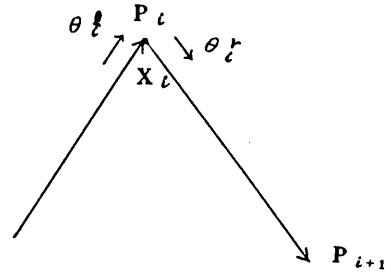


図9. コーナポイントでの補間点と角度

(a) タンジェント・ポイントの場合

タンジェントポイントでは曲線と直線がなめらかに接していなければならないので、図8に示すように、タンジェント・ポイントでの補間点及び補間角度を決める。

補間角度 θ_i は、点 P_i が TL のときは、ベクトル $(P_{i+1} - P_i)$ の方向、TR のときはベクトル $(P_i - P_{i-1})$ の方向とする。

(b) コーナ・ポイントの場合

図9に示すように、コーナ・ポイントでの補間点、及び補間角度を決める。

コーナ・ポイント P_i での補間点 X_i は、 $X_i = P_i$ とする。コーナ・ポイントでは、形状を表わす曲線又は直線の傾きは不連続になる。点 P_i に入ってくる方向では補間角度 θ_i はベクトル $(P_{i-1} - P_i)$ の方向、点 P_i から出ていく方向では補間角度 θ_i はベクトル $(P_{i+1} - P_i)$ の方向とする。

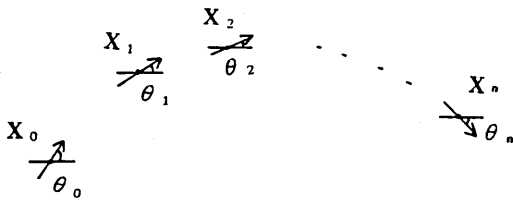


図10. 補間すべき点の位置と角度

3. 2 Bézier曲線による点の位置と傾きの補間 手順

図10に示すように、補間すべき点列の位置 X_0, X_1, \dots, X_n 及びこれら各点での傾き $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ が与えられたとき、次の手順により補間を行う。

① X_0 を始点、 X_2 を終点として、 X_0, X_1, X_2 及び $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ を一つのBézier曲線セグメントによって補間することを試みる。

補間できなければ、 X_0 を始点、 X_1 を終点として、 X_0, X_1 及び θ_0, θ_1 を一つのBézier曲線セグメントによって補間する。

② X_0 を始点、 X_i ($i \geq 2$) を終点として、 X_0, \dots, X_i 及び $\theta_0, \dots, \theta_i$ を一つのBézier曲線セグメントによって補間できているとする。このときの制御点を Q_0, Q_1, Q_2 及び Q_3 とするとき、 X_i が一つの曲線部分の終点でなければ、 X_0 を始点、 X_{i+1} を終点として、 X_0, \dots, X_{i+1} 及び $\theta_0, \dots, \theta_{i+1}$ を一つのBézier曲線セグメントによって補間することを試みる。補間できないか、または X_i が終点であれば、 $X_0 \sim X_i$ までに Q_0, Q_1, Q_2 及び Q_3 を制御点とする一つのBézier曲線セグメントを当てはめ、点 X_i 以後は X_i を X_0 、 θ_i を θ_0 、 X_{i+1} を X_1 、 θ_{i+1} を θ_1 というようにサフィックスをずらして、①の手続きにより新しいBézier曲線セグメントを当てはめる。

なお、この手続きによれば、新しいBézier曲線との接続点では、厳密には1次微分値しか連続に

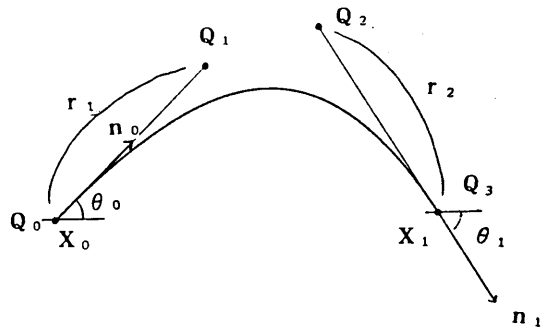


図11. 2点の位置と角度を補間するBézier曲線を求める方法の説明図

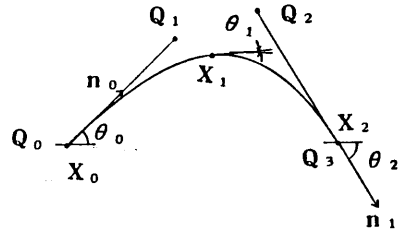


図12. 3点の位置と角度を補間するBézier曲線を求める方法の説明図

ならないが、もともとの一連の補間点が1つの連続な曲線表現しているので、この接続点で2次微分値もほぼ連続になると考えられる。

次に、Bézier曲線による点の位置と傾きの補間方法を説明する。

3. 3 2点の位置と傾きを補間するBézier曲線 を求める方法

図11に示すように、 X_0 を始点、 X_1 を終点として、 $X_0, X_1, \theta_0, \theta_1$ を補間するBézier曲線の制御点 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 を、次のように求める。

$$\begin{aligned} Q_0 &= X_0 \\ Q_1 &= Q_0 + r_1 \cdot |X_1 - X_0| \cdot n_0 \\ Q_2 &= Q_3 - r_2 \cdot |X_1 - X_0| \cdot n_1 \\ Q_3 &= X_1 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 n_0 は傾き θ_0 の単位ベクトル、 n_1 は傾き θ_1 の単位ベクトルである。 r_1 及び r_2 は、経験的に選んだ値、 $r_1 = r_2 = 1/3$ を用いた。

3. 4 3点の位置と傾きを補間するBézier曲線を求める方法

図12に示すように3点の位置 X_0 , X_1 , X_2 と点 X_0 及び点 X_2 での傾き θ_0 , θ_2 が与えられた時 (θ_1 は条件として与えていないことに注意), この条件を満たし, X_0 を始点, X_2 を終点とする3次Bézier曲線セグメントの制御点 Q_0 , Q_1 , Q_2 及び Q_3 は,

$$\begin{aligned} Q_0 &= X_0 \\ Q_1 &= Q_0 + r_1 n_0 \\ Q_2 &= Q_3 - r_2 n_1 \\ Q_3 &= X_2 \end{aligned} \quad (9)$$

と表わすことができる。ここで, n_0 は傾き θ_0 の単位ベクトル, n_1 は傾き θ_2 の単位ベクトルである。 r_1 及び r_2 は, 点 X_1 におけるBézier曲線の媒介変数の値を t_1 であるとする, 次のように表わされる。

$$\begin{aligned} r_1 &= [X_{1x} \cos \theta_2 - X_{1x} \sin \theta_2 \\ &+ (A_0 + A_1)(X_{0x} \sin \theta_2 - X_{0x} \cos \theta_2) \\ &+ (A_2 + A_3)(X_{2x} \sin \theta_2 - X_{2x} \cos \theta_2)] \\ &/ [A_1 (\cos \theta_2 \sin \theta_0 - \sin \theta_2 \cos \theta_0)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} r_2 &= [X_{1x} \cos \theta_0 - X_{1x} \sin \theta_0 \\ &+ (A_0 + A_1)(X_{0x} \sin \theta_0 - X_{0x} \cos \theta_0) \\ &+ (A_2 + A_3)(X_{2x} \sin \theta_0 - X_{2x} \cos \theta_0)] \\ &/ [A_2 (\cos \theta_2 \sin \theta_0 - \sin \theta_2 \cos \theta_0)] \end{aligned} \quad (11)$$

ただし,

$$\begin{aligned} A_0 &= (1 - t_1)^3 \\ A_1 &= 3(1 - t_1)^2 t_1 \\ A_2 &= 3(1 - t_1) t_1^2 \\ A_3 &= t_1^3 \end{aligned} \quad (12)$$

以上の議論から, X_0 を始点, X_2 を終点として, X_0 , X_1 , X_2 及び θ_0 , θ_1 , θ_2 を補間するBézier曲線を次のようにして求める。

求めるBézier曲線が, 媒介変数の値 t がある値 t_1 (もちろん $0 < t_1 < 1$) のときに点 X_1 を通ると仮定したとき, 次式,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{dP_y}{dt} / \frac{dP_x}{dt} \right) \quad (13)$$

によって求めたこのBézier曲線の点 X_1 における傾き θ_1' が, ある基準角度誤差 δ と,

$$|\theta_1 - \theta_1'| < \delta, \quad (14)$$

の関係が成立し, かつ r_1 と r_2 が正であれば, この t_1 を式(10)~(12)に代入し, この結果得られる r_1 及び r_2 を式(9)に代入して得られる制御点を, 求めるBézier曲線の制御点であるとする。例えば, t_1 の値を0から1まで0.01きざみで0.01, 0.02, 0.03, 0.04...と順番にとり, 各 t_1 の値について式(14)が成立するか調べ, 同式が成立したものを求めるBézier曲線とする。

3. 5 4点以上の位置と傾きを補間するBézier曲線を求める方法

$i+1$ 点の位置 X_0 , X_1 , ..., X_i と各点での傾き θ_0 , θ_1 , ..., θ_i が与えられた時, X_0 を始点, X_i を終点として, これらの点の位置及び角度を補間する3次Bézier曲線セグメントの制御点 Q_0 , Q_1 , Q_2 及び Q_3 を次のようにして求める。

いま次のように記号を定義する。すなわち, X_0 , X_m , X_i 及び θ_0 , θ_m , θ_i ($m=1, \dots, i-1$)を補間するBézier曲線 $P^m(t)$ を3.4節の方法によって求めたとき, このBézier曲線の制御点を $Q_0^m (= X_0)$, Q_1^m , Q_2^m , $Q_3^m (= X_i)$ とする。

ある m ($m=1, \dots, i-1$)と, $k \neq m$ なるすべての k (ただし $k=1, \dots, i-1$)について, 点 X_k の $P^m(t)$ からのずれ,

$$\begin{aligned} \Delta P^{mk}(t) &= (\partial P^m / \partial Q_1) | Q_1^k - Q_1^m | \\ &+ (\partial P^m / \partial Q_2) | Q_2^k - Q_2^m | \end{aligned} \quad (15)$$

が基準距離誤差 δ と,

$$|\Delta P^{mk}(t)| < \delta, \quad (16)$$

の関係が成立するとき, Q_0^m , Q_1^m , Q_2^m 及び Q_3^m を求めるBézier曲線の制御点とする。

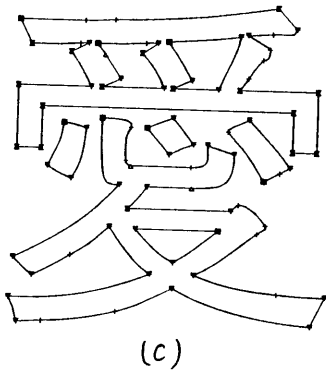
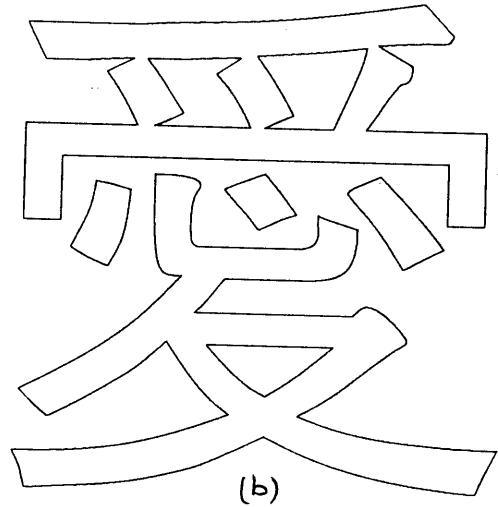
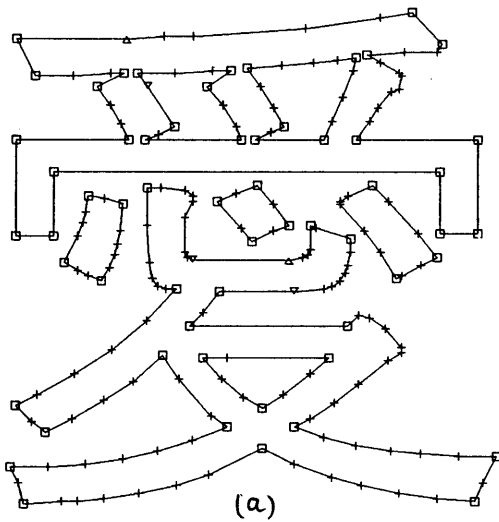


図13. 変換例

(a) 変換前: +印又は□印で区切られた各線分が直線ショートベクトルを表わしている。□印は本プログラムによってコーナポイントと判断された点。

(b) 変換後。

(c) 変換前と変換後を重ねたもの: +印又は□印で区切られた部分が一つのBézier曲線セグメントである。

4. 本方法の評価

与えられた直線ショートベクトルを、第3章で述べた方法によって、3次のBézier曲線と直線ショートベクトルによる表現に変換するプログラムを作成し、これを用いて本方法の評価を行った。

図13に、200×200のメッシュ上で定義された直線ショートベクトル表現の図形を、本方法によってBézier曲線表現に変換した例を示す。表3には、これらの変換の際に用いた定数の値を示す。

表3 変換に用いたパラメータの値

δ_a	=	0.45
A	=	15.0
B	=	1.8
ϕ_{rot}	=	0.05 rad
θ_{rot}	=	2.0 rad
δ_b	=	0.20 rad
δ_c	=	0.50

5. おわりに

線分近似表現された形状を3次のBézier曲線表現に変換する方法を開発した。

実験プログラムによる評価により、本方法による変換後の形状は、直線ショートベクトルが表わ

しているもとの形状をほぼ正しく再現している事が、定性的に確かめられた。

6. 参考文献

[1] 例えば、山口富士夫;"形状処理工学 [II] ",日刊工業新聞社, 1982.