グラフィクスとＣＡＤ 40－3
（１９８９．８．１７）

自然対象物のモデリングと確率過程

安生健一
（株）日立製作所　日立研究所

コンピュータグラフィックス（ＣＧ）における自然物形状モデリングの分野で、確率過程という数学的概念が、特に '80年代に入って、有効に使われるようになってきた。
本稿では、ＣＧへの応用という観点から、確率過程の概念がどのように利用され、拡張されているかを概観し、その具体例として一変数確率過程のスペクトル分解を応用した自然物形状の確率場モデルを紹介する。本手法は山・雲・海洋波などを統一的かつ簡便に作成するための手段として開発されたものである。最後に、自然対象物のモデリングのための確率過程の今後の役割について付言する。

Modeling Natural Objects and Stochastic Process

Ken-ichi Anjyo
Hitachi Research Laboratory,
Hitachi Ltd.
4026 Kuji-cho Hitachi-shi
Ibaraki-ken 319-12 JAPAN

Stochastic modeling has become a powerful and useful tool in 3D computer graphics, especially for describing natural objects or phenomena.

In this note, we observe how the concept of a stochastic process has been extended in modeling natural objects, such as terrain, clouds and sea waves. As an example, a new method for stochastic spectral synthesis is also presented, which can depict a variety of natural objects and scenes by specifying a small amount of data. Finally, a future plan is outlined for further applications of stochastic processes to modeling natural objects and phenomena.

1．はじめに

3次元コンピュータグラフィックス（CG）では現在までに多くの自然物や自然現象を表現できるようになってきた。手法も様々なものが提案されているが、以下では特にフラクタル理論の展開とともに知られるようになった確率論的手法を取り上げる。とりわけ確率過程（Stochastic process）という数学的な対象として定義付けられる自然物形状モデリングについて述べる。

2．自然対象物の表現手段としての確率過程

2.1 確率過程の概念

確率過程の概念はもともとCGに限らず、統計力学を始めとして様々な分野で応用されている[1]。多次元（や無限次元）の場合も含め、目的・用途に応じてその概念自体も様々に拡張されてきた。ここではCGへの応用を意識して次のものを考える：

Ωを確率空間、PをΩ上の確率（測度）とし[2]、Tを空でない集合とする。直積空間$\Omega\times T$から実数（あるいは複素数）の値をとる関数 Xを確率過程と呼ぶ。数学的厳密差さに固執すれば、この XはP－可測な関数であるとするが、以下ではそうした細部の議論にはふれない。

［例1］　T＝Rの場合。ここでRは実数の集合全体を表す。パラメータ $t\in T$は通常時間を表す変数で、確率過程 $X=X(t,\omega)$は時間tに伴って変動する（1次元のランダムな現象を意味する。各$\omega\in\Omega$を固定したときの軌跡

$$\{X(t,\omega)\ ;\ -\infty<t<\infty\}$$

はあるケースにおける観測値のグラフで、関数 $X\omega(t) := X(t,\omega)$のことを見本路(sample path）という。

次の式で定義される確率過程はもっともよく知られたもののひとつである：

$$X(t,\omega)=\int\sqrt{S(f)}\exp(2\pi ift)\,dM(f,\omega) \qquad (1)$$

この X は与えられた正値偶関数 $S(f)$ をパワースペクトルとして持つ、定常な確率過程である[3,4]。なお、（1）式の積分は白色雑音のランダム測度によるものである[3]。

［例2］T＝R^n の場合。ここで　$R^n=R\times R\times\cdots\times R$（n 個の直積）であり、n は自然数。n が2以上のときは、確率過程でなく、確率場（stochastic field）と呼ばれる。CGの分野では特に、2次元の確率場を高さの場（height field）という[5]。

［例3］T＝R^2/Z^2 （2次元のトーラス）の場合は、T上の確率過程は2重周期を持つR^2 上の確率場と等価である。

2.2 CGの分野であらわれる確率過程

CGで用いられる確率過程は、定常でかつエルゴード性を持つものをベースとして構成される場合が多い。例えば、2.1 節の（1）式の多次元版の公式を用いて確率過程を構成する方法[6] や、自己相関関数を既知として確率過程を構成する方法[7] がある。しかし、例えば山や雲などをフラクタル形状としてモデル化する場合、fractional Brownian motion[8]はそもそも非定常であるから、上記の定常モデルをもとにモデルを構成するときにはその変形・修正を行うことがある[7]。

山の連なりや、空をおおう雲の群れを見るとその多様さに驚かされる。それらは等方的でも周期的でもなく、定常な確率過程のイメージとは異なるように思われる。一方でモデルを構成する立場からいえば、出発点となるのは現状では定常な確率モデルになるのがほとんどである。何故なら、定常過程は数学的に取り扱いやすく、しかも数値シミュレーションも可能な場合が多いためである（モデリングの過程のなかに、定常なモデルの構成が入ること自体は不自然なことではない）。しかし、まだこの種のモデリング手法はあまり多く知られておらず、従来と異なったアプローチもより多く発掘されるべきと思われる。

2.3 具体例

ここでは確率論的な自然物形状モデリングの一例として、筆者の方法 [4,9] を紹介する。以下では簡単のために、山や海洋波のモデルを想定し、高さの場 $\{Z(i,j)\}$ としてモデルを表現する：

$$Z(i,j) = \sum_{K=1}^{N_W} Y_k(i,j) \tag{2}$$

$$Y_k(i,j) = X_{2k-1}(i,j) \cdot X_{2k}(i,j) \tag{3}$$

$$X_r(i,j) = x_r(a_r i + b_r j + c_r) \tag{4}$$

入力データは、（4）式の右辺の確率過程 x_r に共通な

$$\Delta t\ (\text{サンプル間隔}),\ M\ (\text{サンプル点総数}) \tag{5}$$

と、各 r 毎の

$$\text{正値偶関数 } S_r(f),\ \text{方向ベクトル } (a_r, b_r) \tag{6}$$

及び（3）式の

$$\text{2次元波 } Y_k \text{ の個数 } N_w,\ Z \text{ の定義（格子点）領域の大きさ } N \tag{7}$$

である。

各 x_r は、（1）式をもとに、Δt, M, $S_r(f)$ から構成される。なお、（4）式の定数 c_{2k-1}, c_{2k}は、どのように決めてもよいが、ここでは

$$\text{k番目の波 } Y_k \text{ の最高地点 } (I_k, J_k) \tag{8}$$

を入力として、

$$X_{2k-1}(I_k, J_k) = \max_{i,j}\{X_{2k-1}(i,j)\}$$
$$X_{2k}(I_k, J_k) = \max_{i,j}\{X_{2k}(i,j)\}$$

を満たすようにとっている。

次に $S_r(f)$ $(r=1,...,2N_w)$の選定方法についてのべる。$S_r(f)$ は一変数の関数だから指定するのは多変数の場合と比べてずっと容易である。また海洋波のスペクトルなど、色々な例が知られている。ここでは次のクラスから選ぶこととした：

$$\{ S(f) \ ; \ S(f) \text{ は偶関数で、 } S(f) \propto f^m / (c + f^D)^n \} \qquad (9)$$

これはフラクタル型のもの、海洋波型の（典型的な）ものをともに含み、しかもそれらを連続につないでいる。すなわち、集合（9）の要素を指定する実質的なパラメータは(c,D,m,n)であり、フラクタル型

$$S(f) \propto 1/f^D \qquad (10)$$

や、海洋波型

$$S(f) \propto (1/f^p)\cdot\exp(-\kappa/f^q) \qquad (11)$$

（の有理関数近似）とが (c,D,m,n) の選択の仕方で実現できる。またこれら以外の様々なスペクトル型が (c,D,m,n)の与え方で選択できる[9] 。

以上の定式化で得られる Zは、様々な自然物からなる景観を表示するうえではその局所表現とみなすのが妥当である。例えば上記の Zを複数個用意し、それらをつなぎ合わせて景観の全体、大局的表現を得ることが考えられる。その意味では上記 Zをプリミティブと呼ぶことも出来る。この大局的な表現を 2.1節の意味での確率過程と捉えれば、パラメータ空間Tは一般の多様体 [10] として定義されたことになる。

図１，２に出力例を示す。形状定義に際し、波（先の X_r や Y_k のこと）の進む向き（各（ a_r ,b_r ）で決まる）と、シルエットの概形（各 S_r (f) で決まる）は独立に決められるので、多様な表現が得られる。既存の手法(例えば[7] ）では、多変数関数を入力する必要があり、所望の結果を得るための関数の決定は専門家以外には困難である。なお、山のモデルのみに限定してよければ、簡便な方法が知られている [5,11] 。

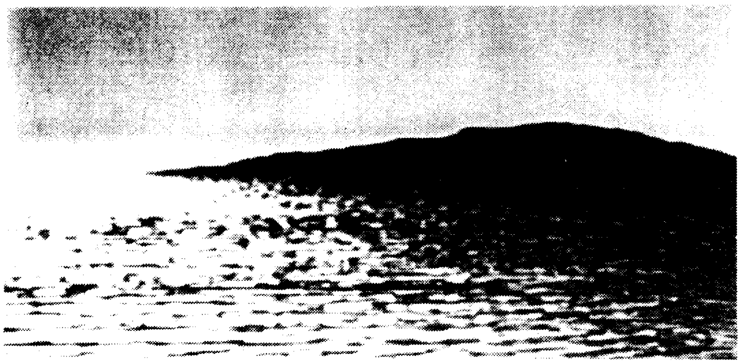
図1　表示例

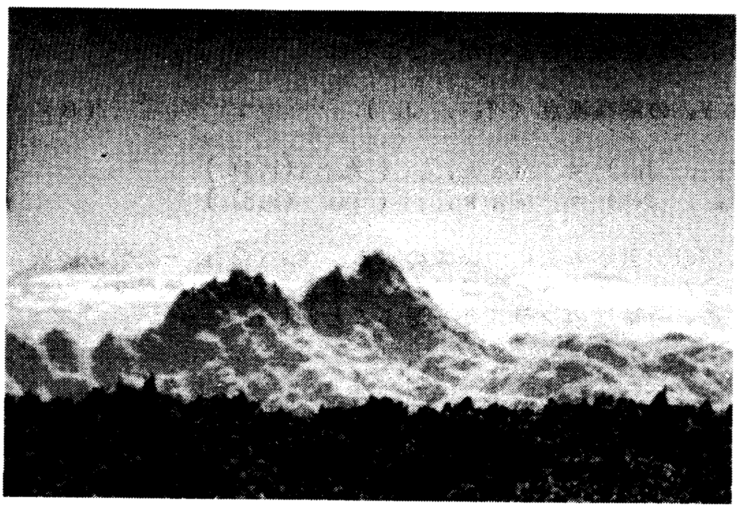
図2　表示例

３．今後の展開

例えばたくさんの山がつらなるシーンを表す場合には、山脈は等方的ではありえないから、確率過程を用いた既存の手法［5,9,11］をそのまま用いるだけで表現するのは難しい。例えば、生成される複数のモデルをつなぎ合わせる必要がある。一方筆者の手法では大局的な表現が得られ、しかも局所的な形状の指定方法は既存の手法より簡便である。ただしより精密なモデルを構成するためには、なんらかの意味で物理的シミュレーションを経由する等の合理性を付加しなければならないと考えている。特に、時間変化に伴う形状の変形（例えば波や雲のうねり）を表現するにはこの意味での合理性の考慮が不可欠と思われる。

また広くＣＧの自然物モデリング技術一般にいえることだが、あるモデルがどの程度リアルに自然対象物を再現しているかの評価は難しく、今後の研究が必要である。ＣＧにおけるモデリングでは、自然対象物がもつ特有の性質を抽象化し、逆にその抽象化された性質を持つ数理モデルを作ることで、実物を近似するわけである。したがってあるモデルがどの程度リアルかは、それがどれくらい自然対象物特有の性質を有するかに言い換えられる。その意味では、ＣＧで可視化出来るような自然対象物特有の性質があまり多く知られていないと思われる（フラクタル理論における自己相似性などが好例ではあるが）。

確率過程の有するいくつかの統計量（例えば、パワースペクトル）を規定して自然物形状の特徴を表現するだけでは現実世界の粗い近似かもしれない。しかしながらごく少ない入力データから大量の幾何情報を生成し、リアルな表現を達成できる点は今後も大変有用であろう。本稿で述べた意味での確率過程のＣＧへの応用の可能性はまだ多く残されている。

参考文献

[1] 伊藤清　「確率過程論における新概念導入の歴史」数理研講究録
[2] 伊藤清　「確率論」岩波書店　(1962)
[3] K.Ito : "Stationary Random Distribution" Mem.Coll.Univ.Kyoto, Vol.28, pp.209-223 (1953)
[4] 安生健一「 $1/f^D$ ｽﾍﾟｸﾄﾙを持つ確率過程を用いた自然物形状モデリング」第１５回画像工学コンファレンス論文集 pp.31-34 (1984)
[5] G.Miller : "The Definition and Rendering of Terrain Maps", Proc.SIGGRAPH'86 pp.39-48 (1986)
[6] R.Voss : "Random Fractal Forgeries" Fundamental Algorithms for Computer Graphics, Springer pp.805-835 (1985)
[7] J.P.Lewis : "Generalized Stochastic Subdivision" TOG Vol.6 No.3 pp.167-190 (1987)
[8] B.Mandelbrot,J.W.Van Ness: "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises, and Applications", SIAM Review Vol.10 No.4 pp.422-437 (1968)
[9] K.Anjyo : "A Simple Spectral Approach to Stochastic Modeling for Natural Objects", Proc.EUROGRAPHICS'88 pp.285-296 (1988)
[10]服部晶夫：多様体，岩波書店
[11]A.Fournier et al. : "Computer Rendering of Stochastic Models" Comm.ACM Vol.25 No.6 pp.371-384 (1982)