

2変数ブレンディング関数を用いた 自由形状曲面モデル

佐々木 廉仁 牧野 光則 大石 進一

早稲田大学 理工学部

あらしし 多くの場合、物体の形状は全体的な特徴を表す形状と細部の部分的な特徴を表す形状とに分けて考えられる。一般に、自由形状曲面による形状設計において、形状の全体的な設計と細部にわたる部分的な設計の両者を別々に行うのは容易ではない。そこで、本報告では、全体的な形状を持つ曲面と部分的な形状を持つ曲面との合成によって、両方の特徴を生かした曲面を生成する自由形状曲面モデルを提案する。本モデルでは、曲面同士の合成の為、2変数のブレンディング関数を導入する。本モデルにより、曲面形状の全体的な設計と部分的な設計を別々に行うことが可能となり、形状設計が容易になると考えられる。また、本モデルを用いて生成した画像を示す。

Free-form Surface Model with Bi-variate Blending Functions

Yasumasa SASAKI Mitsunori MAKINO Shin'ichi OISHI

School of Science and Engineering, Waseda University

3-4-1, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169, Japan

Abstract In many cases, shape of object can be characterized by two features, rough but global shape and detailed but local shape. In present geometric design methods with free-form surface, it is difficult to design a shape of object by separating design procedure into rough global feature design and detailed local feature design. In this paper a new surface model is proposed with bi-variate blending functions. This model consists of a surface expressing rough global shape and surfaces expressing detailed local shape. Since global design and local design can be separated by this model of shape, it becomes easy to design surfaces. An Example of generated images is also presented based on this model .

1. はじめに

多くの場合、物体の形状は全体的な特徴を表す形状と細部の部分的な特徴を表す形状に分けて考えられる。一般に、自由形状曲面による形状設計において、形状の全体的な設計と細部にわたる部分的な設計の両者を別々に行うのは容易ではない。

そこで、全体的な形状を持つ曲面と部分的な形状を持つ曲面を合成することによって、両方の形状の特徴を生かした曲面を生成する手法について報告する。このために、本モデルでは2変数のブレンド関数を導入し、曲面の合成を行う。本モデルにより、曲面形状の全体的な設計と部分的な設計を別々に行うことが可能となり、形状設計が容易になると考えられる。

本報告の構成は、まず2. で曲面モデルを提案する。さらに、3. では本モデルで用いるブレンド関数を具体的に決定する。4. は、曲面が複数パッチの接続で表現されている場合に本モデルを適用する方法について述べる。最後に、5. では本モデルを用いて生成した画像を示す。

2. 2変数ブレンド関数による曲面モデル

2.1 2変数ブレンド関数による曲面

自由形状曲面は、2つのパラメータ u, w によって定義されるパラメトリックな曲面である⁽¹⁾。すなわち、

$$P(u, w) = [x(u, w), y(u, w), z(u, w)] \quad (2.1)$$

と表される。

今、全体的な形状を持つ曲面の形状を、部分的な形状を持つ曲面によって制御することを考える。既存の曲面を $P_B(u, w)$ とし基礎曲面と呼び、基礎曲面の形状を制御する曲面を $P_C(u, w)$ とし、制御曲面と呼ぶ。基礎曲面を制御曲面によって制御した結果生成される曲面を $P(u, w)$ とし、生成曲面と呼ぶ。また、2変数のブレンド関数を $B_0(u, w), B_1(u, w)$ とする($B_0(u, w), B_1(u, w)$ はスカラー関数)。

生成曲面を基礎曲面と制御曲面およびブレンド関数により以下のように表す。

$$P(u, w) = B_0(u, w)P_B(u, w) + B_1(u, w)P_C(u, w) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \quad (2.2)$$

式(2.2)のブレンド関数に条件を付加する

ことにより、本報告の目的である形状制御が可能となる。以下、ブレンド関数に付加する条件について述べる。

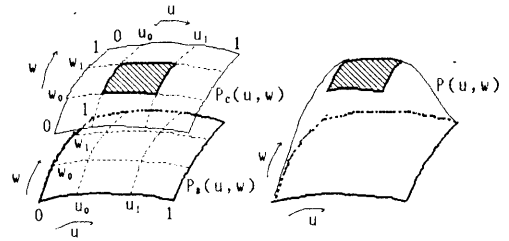


図2-1 基礎曲面、制御曲面及び生成曲面

2.2 座標変換に対する形状不変性

基礎曲面 $P_B(u, w)$ 、制御曲面 $P_C(u, w)$ は座標変換に対して形状不変性を持つとする。このとき生成曲面 $P(u, w)$ が形状不変性を満たすことが望ましい。このためには、変換後の座標系で表現された曲面 $P_B^*(u, w), P_C^*(u, w)$ により生成される曲面 $P^*(u, w)$ が同一の変換を受けていなければならない。以下、回転移動と平行移動とに分けて考える。

① 回転変換に対する形状不変性

3次元の回転マトリックスを T (3×3 マトリックス)とすると、 $P^*(u, w)$ は、

$$\begin{aligned} P^*(u, w) &= B_0(u, w)P_B^*(u, w) \\ &\quad + B_1(u, w)P_C^*(u, w) \\ &= B_0(u, w)P_B(u, w)T \\ &\quad + B_1(u, w)P_C(u, w)T \\ &= P(u, w)T \end{aligned} \quad (2.3)$$

となり、回転に対する形状不変性は自動的に満足される。

② 平行移動に対する形状不変性

平行移動を $m = [m_x, m_y, m_z]$ で表現する。

$$\begin{aligned} P^*(u, w) &= B_0(u, w)P_B^*(u, w) \\ &\quad + B_1(u, w)P_C^*(u, w) \\ &= B_0(u, w)\{P_B(u, w) + m\} \\ &\quad + B_1(u, w)\{P_C(u, w) + m\} \\ &= P(u, w) + \{B_0(u, w) + B_1(u, w)\}m \end{aligned} \quad (2.4)$$

よって、形状不変性が成り立つためには、

$$B_0(u, w) + B_1(u, w) = 1 \quad (\text{Cauchyの条件}) \quad (2.5)$$

が成り立たなければならない。

また、生成される曲面が、基礎曲面と制御曲

面とによってつくられる図形の内部に常に存在するためには、式(2.5)以外に以下の条件が必要である。

$$B_0(u, w) \geq 0, \quad B_1(u, w) \geq 0 \quad (\text{凸閉包の条件}) \quad (2.6)$$

2.3 基礎曲面の境界曲線の形状維持

生成曲面においては、基礎曲面 $P_0(u, w)$ の境界曲線の形状を維持することが望ましい。以下、このための条件を求めると、

$P(u, w)$ が $P_0(u, w)$ の境界曲線における形状を維持する条件は、

$$\begin{aligned} P(0, w) &= P_0(0, w), & P(1, w) &= P_0(1, w) \\ P(u, 0) &= P_0(u, 0), & P(u, 1) &= P_0(u, 1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

である。式(2.2)より、式(2.7)が恒等的に成り立つためには、

$$\begin{aligned} B_0(0, w) &= 1, & B_1(0, w) &= 0 \\ B_0(1, w) &= 1, & B_1(1, w) &= 0 \\ B_0(u, 0) &= 1, & B_1(u, 0) &= 0 \\ B_0(u, 1) &= 1, & B_1(u, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

が成立する必要がある。

2.4 制御曲面の形状維持

生成曲面において、制御曲面の形状の特徴を維持することにより、形状の制御を行う。

生成曲面において、制御曲面 $P_c(u, w)$ が $u_0 \leq u \leq u_1, w_0 \leq w \leq w_1$ において形状を維持する条件を求めると、以下、パラメータ $u_0 \leq u \leq u_1, w_0 \leq w \leq w_1$ の部分を形状維持領域と呼ぶことにする。

式(2.2)より、 $P(u, w) = P_c(u, w)$ が $u_0 \leq u \leq u_1, w_0 \leq w \leq w_1$ で恒等的に成り立つためには、

$$\begin{aligned} B_0(u, w) &= 0, & B_1(u, w) &= 1 \\ & (u_0 \leq u \leq u_1, w_0 \leq w \leq w_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

が成立する必要がある。式(2.9)の条件を満足すれば、生成曲面は制御曲面の形状維持領域における形状を維持することができる。

式(2.8)、式(2.9)の条件を図2-2に示す。

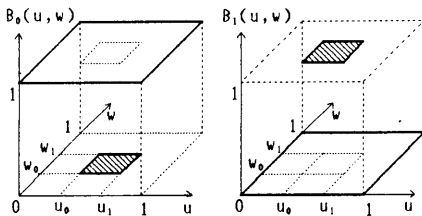


図2-2 $B_0(u, w), B_1(u, w)$ の拘束条件

2.5 基礎曲面の境界曲線におけるスロープ維持条件

生成曲面 $P(u, w)$ では、隣接する曲面との連続性を考えると、基礎曲面 $P_0(u, w)$ の境界曲線におけるスロープを維持していることが望ましい。以下、このための条件を求めると、

$P(u, w)$ が $P_0(u, w)$ の境界曲線におけるスロープを維持する条件は、

$$\begin{aligned} P_u(0, w) &= P_{0u}(0, w), & P_u(1, w) &= P_{0u}(1, w) \\ P_w(u, 0) &= P_{0w}(u, 0), & P_w(u, 1) &= P_{0w}(u, 1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

である。

$$\begin{aligned} P_u(u, w), P_w(u, w) & \text{は、式(2.2)より} \\ P_u(u, w) &= B_{0u}(u, w)P_0(u, w) + B_0(u, w)P_{0u}(u, w) \\ & \quad + B_{1u}(u, w)P_c(u, w) + B_1(u, w)P_{cu}(u, w) \\ P_w(u, w) &= B_{0w}(u, w)P_0(u, w) + B_0(u, w)P_{0w}(u, w) \\ & \quad + B_{1w}(u, w)P_c(u, w) + B_1(u, w)P_{cw}(u, w) \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。式(2.11)より、式(2.10)が恒等的に成り立つためには、

$$\begin{aligned} B_{0u}(0, w) &= 0, & B_{1u}(0, w) &= 0 \\ B_{0u}(1, w) &= 0, & B_{1u}(1, w) &= 0 \\ B_{0w}(u, 0) &= 0, & B_{1w}(u, 0) &= 0 \\ B_{0w}(u, 1) &= 0, & B_{1w}(u, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

が成立する必要がある。式(2.12)の条件により、生成曲面 $P(u, w)$ において、基礎曲面 $P_0(u, w)$ の境界曲線におけるスロープを維持する。

2.6 生成曲面におけるスロープ連続条件

ここでは、生成曲面 $P(u, w)$ がスロープ連続となるための条件を求めると、ここで問題となるのは形状維持領域の境界における連続性である。形状維持領域の境界においてスロープ連続となる条件は、

$$\begin{aligned} P_u(u_0, w) &= P_{cu}(u_0, w), & P_u(u_1, w) &= P_{cu}(u_1, w) \\ P_w(u, w_0) &= P_{cw}(u, w_0), & P_w(u, w_1) &= P_{cw}(u, w_1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

である。2.6と同様にして、式(2.11)、(2.13)よりブレンディング関数の条件を求めると、

$$\begin{aligned} B_{0u}(u_0, w) &= 0, & B_{1u}(u_0, w) &= 0 \\ B_{0u}(u_1, w) &= 0, & B_{1u}(u_1, w) &= 0 \\ B_{0w}(u, w_0) &= 0, & B_{1w}(u, w_0) &= 0 \\ B_{0w}(u, w_1) &= 0, & B_{1w}(u, w_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。式(2.14)の条件により、生成曲面 $P(u, w)$

w)はスローブ連続となる。

式(2.12), 式(2.14)の条件を図2-3, 図2-4に示す。

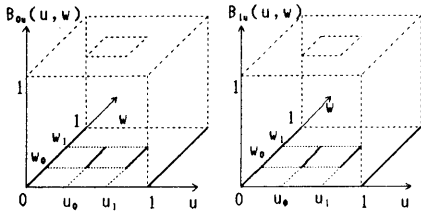


図2-3 $B_{\theta u}(u, w), B_{i u}(u, w)$ の拘束条件

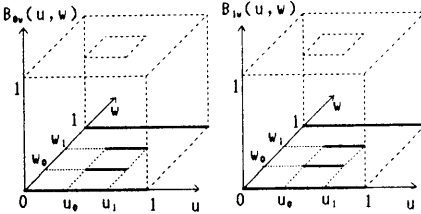


図2-4 $B_{\theta w}(u, w), B_{i w}(u, w)$ の拘束条件

2.7 基礎曲面の境界曲線における曲率維持条件

生成曲面 $P(u, w)$ では, 隣接する曲面との連続性を考えると, 基礎曲面 $P_{\theta}(u, w)$ の境界曲線における曲率を維持していることが望ましい。以下, このための条件を求める。

$P(u, w)$ が $P_{\theta}(u, w)$ の境界曲線における曲率を維持する条件は,

$$\begin{aligned} P_{\theta u}(0, w) &= P_{\theta u u}(0, w), & P_{\theta u}(1, w) &= P_{\theta u u}(1, w) \\ P_{\theta w}(u, 0) &= P_{\theta w w}(u, 0), & P_{\theta w}(u, 1) &= P_{\theta w w}(u, 1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

である。

$P_{\theta u}(u, w), P_{\theta w}(u, w)$ は, 式(2.11)より

$$\begin{aligned} P_{\theta u}(u, w) &= B_{\theta u u}(u, w)P_{\theta}(u, w) + B_{\theta u}(u, w)P_{\theta u}(u, w) \\ &+ B_{\theta u u}(u, w)P_{\theta u}(u, w) + B_{\theta u}(u, w)P_{\theta u u}(u, w) \\ &+ B_{i u u}(u, w)P_c(u, w) + B_{i u}(u, w)P_{c u}(u, w) \\ &+ B_{i u}(u, w)P_{c u}(u, w) + B_i(u, w)P_{c u u}(u, w) \\ P_{\theta w}(u, w) &= B_{\theta w w}(u, w)P_{\theta}(u, w) + B_{\theta w}(u, w)P_{\theta w}(u, w) \\ &+ B_{\theta w}(u, w)P_{\theta w}(u, w) + B_{\theta w}(u, w)P_{\theta w w}(u, w) \\ &+ B_{i w w}(u, w)P_c(u, w) + B_{i w}(u, w)P_{c w}(u, w) \\ &+ B_{i w}(u, w)P_{c w}(u, w) + B_i(u, w)P_{c w w}(u, w) \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。式(2.16)より, 式(2.15)が恒等的に成

り立つためには,

$$\begin{aligned} B_{\theta u u}(0, w) &= 0, & B_{i u u}(0, w) &= 0 \\ B_{\theta u u}(1, w) &= 0, & B_{i u u}(1, w) &= 0 \\ B_{\theta w w}(u, 0) &= 0, & B_{i w w}(u, 0) &= 0 \\ B_{\theta w w}(u, 1) &= 0, & B_{i w w}(u, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

が成立する必要がある。式(2.17)の条件により, 生成曲面 $P(u, w)$ において, 基礎曲面 $P_{\theta}(u, w)$ の境界曲線における曲率を維持する。

2.8 生成曲面における曲率連続条件

ここでは, 生成曲面 $P(u, w)$ が曲率連続となるための条件を求める。ここで問題となるのは形状維持領域の境界における連続性である。形状維持領域の境界において曲率連続となる条件は,

$$\begin{aligned} P_{\theta u}(u_0, w) &= P_{c u u}(u_0, w) \\ P_{\theta u}(u_1, w) &= P_{c u u}(u_1, w) \\ P_{\theta w}(u, w_0) &= P_{c w w}(u, w_0) \\ P_{\theta w}(u, w_1) &= P_{c w w}(u, w_1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

である。2.7と同様にして, 式(2.16), (2.18)よりブレンディング関数の条件を求めると,

$$\begin{aligned} B_{\theta u u}(u_0, w) &= 0, & B_{i u u}(u_0, w) &= 0 \\ B_{\theta u u}(u_1, w) &= 0, & B_{i u u}(u_1, w) &= 0 \\ B_{\theta w w}(u, w_0) &= 0, & B_{i w w}(u, w_0) &= 0 \\ B_{\theta w w}(u, w_1) &= 0, & B_{i w w}(u, w_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。式(2.19)の条件により, 生成曲面 $P(u, w)$ は曲率連続となる。

式(2.17), 式(2.19)の条件を図2-5, 図2-6に示す。

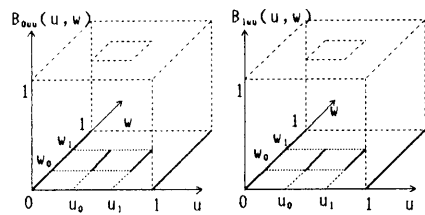


図2-5 $B_{\theta u u}(u, w), B_{i u u}(u, w)$ の拘束条件

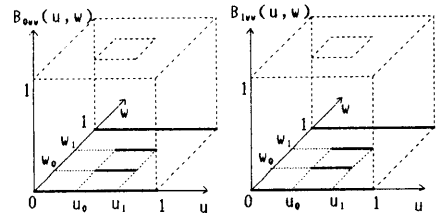


図2-6 $B_{\theta w w}(u, w), B_{i w w}(u, w)$ の拘束条件

3. ブレンディング関数の決定

以下では, 2. で求めたブレンディング関数に関する条件式を満足するようなブレンディング関数を具体的に決定する.

ここでは, 2種類のブレンディング関数を接続することによって条件を満足するブレンディング関数を実現する. いま, 関数 $C(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) を考え, 2種類のブレンディング関数 I, II を以下のように与える.

① ブレンディング関数 I

ブレンディング関数 I を以下のように与える.

$$\begin{aligned} B_0(u, w) &= 1 - B_1(u, w) \\ B_1(u, w) &= C(u)C(w) \\ (0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで, u, w について偏微分を求めておく. 式 (3.1) より,

$$\begin{aligned} B_{0u}(u, w) &= -B_{1u}(u, w) \\ B_{1u}(u, w) &= \dot{C}(u)C(w) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} B_{0w}(u, w) &= -B_{1w}(u, w) \\ B_{1w}(u, w) &= C(u)\dot{C}(w) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} B_{0uu}(u, w) &= -B_{1uu}(u, w) \\ B_{1uu}(u, w) &= \ddot{C}(u)C(w) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} B_{0ww}(u, w) &= -B_{1ww}(u, w) \\ B_{1ww}(u, w) &= C(u)\ddot{C}(w) \end{aligned} \quad (3.5)$$

② ブレンディング関数 II

ブレンディング関数 II を以下のように与える.

$$\begin{aligned} B_0(u, w) &= 1 - B_1(u, w) \\ B_1(u, w) &= C(u) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

①と同様に式 (3.6) の偏微分を求めると,

$$\begin{aligned} B_{0u}(u, w) &= -B_{1u}(u, w) \\ B_{1u}(u, w) &= \dot{C}(u) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} B_{0w}(u, w) &= -B_{1w}(u, w) = 0 \\ B_{1w}(u, w) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} B_{0uu}(u, w) &= -B_{1uu}(u, w) \\ B_{1uu}(u, w) &= \ddot{C}(u) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} B_{0ww}(u, w) &= 0 \\ B_{1ww}(u, w) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

式 (3.1) ~ (3.10) より, 関数 $C(t)$ が,

$$[C(0) \ C(1) \ \dot{C}(0) \ \dot{C}(1)] = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (3.11)$$

を満足すれば, 2. で求めたスローブ連続までの条件式を満足し, 生成曲面はスローブ連続となる. また, $C(t)$ が,

$$[C(0) \ C(1) \ \dot{C}(0) \ \dot{C}(1) \ \ddot{C}(0) \ \ddot{C}(1)] = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.12)$$

を満足すれば, さらに式 (2.17), (2.19) を満足し, 生成曲面は曲率まで連続となる.

ブレンディング関数 I, II を図 3-1, 図 3-2 に示す.

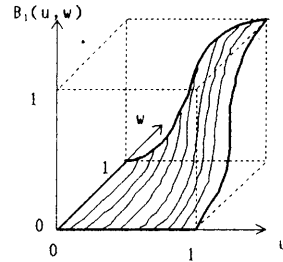


図 3-1 ブレンディング関数 I

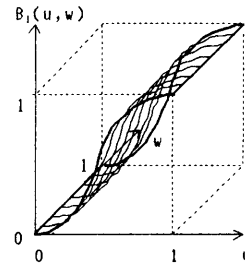


図 3-2 ブレンディング関数 II

I, II のブレンディング関数を $u = u_0, u_1, w = w_0, w_1$ で区切られた各領域にパラメータ変換しこれらをつなぎ合わせることによって, $B_0(u, w), B_1(u, w)$ が 2. で導出した各条件を満足するように, 全体のブレンディング関数を構成する. 全体のブレンディング関数を図 3-3 に示す.

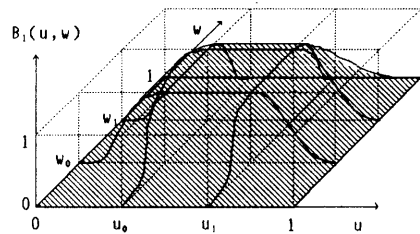


図 3-3 全体のブレンディング関数

式 (3.11) を満足する関数としては, 以下に示す, 3 次の Hermite 補間関数が挙げられる.

$$H_{0,1}(t) = -2t^3 + 3t^2 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (3.13)$$

また、式(3.12)を満足する多項式を、単一の多項式により実現しようとする5次式となる。式(3.2)を満足する $C(t)$ は、ユニフォームな3次式B-Spline曲線によって表すことが可能である^[2]。これにより、3次式で式(3.12)を満足し、生成曲面は曲率まで連続になる。

4. 複数曲面にまたがった形状制御

4.1 パラメータ空間のマッピング

一般に、自由形状曲面による設計では、複数の曲面パッチがマトリクス状に接続される。そこで本モデルにおいて、基礎曲面および制御曲面が複数の曲面パッチの接続で表現されている場合について、これらにまたがって形状制御する手法について述べる。そのために必要な、パラメータ空間のマッピングについて以下に述べる。

ここで、曲面上の位置を、図4-1のように (k, l) 番目のパッチの (u, w) で示すことにする(ただし、 $k, l \geq 1$)。ただし、各曲面パッチの内部でパラメータは正規化されているとする。すなわち、

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1 \quad (4.1)$$

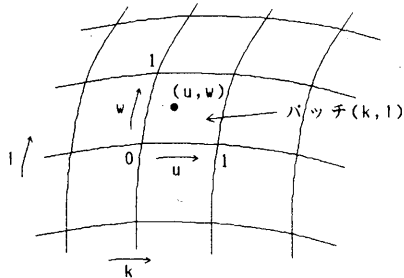


図4-1 曲面上の位置

式(2.2)において基礎曲面、制御曲面、ブレンド関数のパラメータが異なる場合、それぞれのパラメータの間のマッピングが必要である。

ここで、基礎曲面のパラメータを (k_B, l_B, u_B, w_B) 、制御曲面のパラメータを (k_C, l_C, u_C, w_C) 、ブレンド関数のパラメータを (u, w) とすると、生成曲面は以下のように表される。

$$P(u, w) = B_0(u, w)P_B(k_B, l_B, u_B, w_B) + B_1(u, w)P_C(k_C, l_C, u_C, w_C) \quad (4.2)$$

また、制御曲面 P_C によって P_B の形状が影響を受ける範囲をマッピング領域と呼び、 $(k_{B1}, l_{B1}, u_{B1}, w_{B1})$ 、 $(k_{B2}, l_{B2}, u_{B2}, w_{B2})$ で表す(図4-2の斜線部分)。

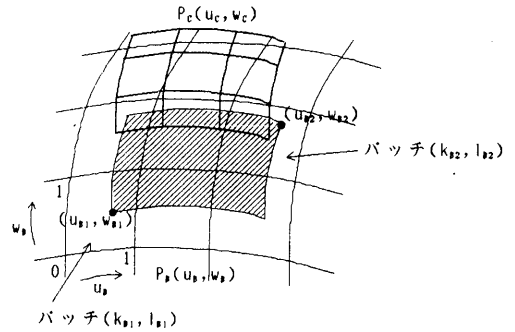


図4-2 P_C の影響範囲(マッピング領域)

ここで、 (k_B, l_B, u_B, w_B) 、 (k_C, l_C, u_C, w_C) 、 (u, w) を1対1に対応づける関数をマッピング関数とよぶ。

ここでは、パラメータ空間は平行であるとし、マッピング関数を以下のように表す。

$$u = \phi_1(k_B, u_B) \quad w = \psi_1(l_B, w_B) \quad (4.3)$$

$$(k_C, u_C) = \phi_2(u) \quad (l_C, w_C) = \psi_2(w) \quad (4.4)$$

上式のマッピング関数により、 (k_B, l_B, u_B, w_B) 、 (k_C, l_C, u_C, w_C) 、 (u, w) を1対1に対応づけられ、複数曲面にまたがった形状制御が可能となる。

$$(k_B, u_B) \xrightarrow{\phi_1} u \xrightarrow{\phi_2} (k_C, u_C)$$

$$(l_B, w_B) \xrightarrow{\psi_1} w \xrightarrow{\psi_2} (l_C, w_C)$$

図4-3 マッピング関数

以下では、以上で述べたマッピング関数を具体的に示す。

4.2 パラメータ空間の長さを用いたマッピング

ここでは、パラメータ空間の長さを利用したマッピング関数について述べる。

まず、 ϕ_1 を示す。基礎曲面において u 方向にマッピングされる領域は、 k_{B1} 番目のパッチの $u_B = u_{B1}$ から k_{B2} 番目のパッチの $u_B = u_{B2}$ までである(ただし、 $k_{B1} \leq k_{B2}$)。この様子を図4-4に示す。

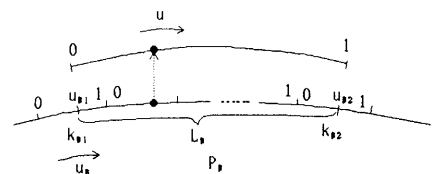


図4-4 マッピング関数 ϕ_1

マッピングされる領域のパラメータ空間の長

さを L_B とすると,

$$L_B = (1 - u_{B1}) + (k_{B2} - k_{B1} - 1) + u_{B2} \\ = k_{B2} - k_{B1} + u_{B2} - u_{B1} \quad (4.5)$$

となる。これを用いて、マッピング関数を次のように定める。

k_B 番目のパッチ (ただし, $k_{B1} \leq k_B \leq k_{B2}$) について,

$$u = \phi_1(k_B, u_B) \\ = \{ (1 - u_{B1}) + (k_B - k_{B1} - 1) + u_B \} / L_B \\ = (k_B - k_{B1} + u_B - u_{B1}) / L_B \quad (4.6)$$

で与える。これによって, k_B, u_B と u を 1 対 1 に対応づけられる。

次に, ϕ_2 を示す。制御曲面において u 方向にマッピングされる領域は, $k_{C1} (=1)$ 番目のパッチの $u_C = u_{C1} (=0)$ から k_{C2} 番目のパッチの $u_C = u_{C2} (=1)$ までである。この様子を図 4-5 に示す。

制御曲面のパラメータ空間の長さを L_C とすると,

$$L_C = (1 - u_{C1}) + (k_{C2} - k_{C1} - 1) + u_{C2} \\ = k_{C2} - k_{C1} + u_{C2} - u_{C1} \quad (4.7)$$

となる。これを用いて、マッピング関数を次のように定める。

$$u \text{ (ただし, } 0 \leq u \leq 1 \text{) について,} \\ k_C = \text{整数部}(u_{C1} + u L_C) \\ u_C = \text{小数部}(u_{C1} + u L_C) \quad (4.8)$$

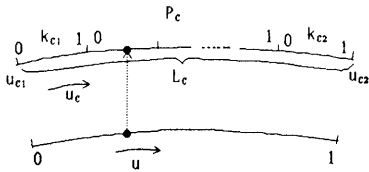


図 4-5 マッピング関数 ϕ_2

これによって, u と k_C, u_C を 1 対 1 に対応づけられる。また, ϕ_1, ϕ_2 (w 方向のマッピング) についても同様である。

4.3 曲面の長さを用いたマッピング¹³⁾

4.2 で示したパラメータ空間を利用したマッピング関数では, 隣合うパッチの大きさが異なる場合, マッピングに歪が生じる。そこで, ここでは曲面の長さを利用し, 一様にマッピングできるマッピング関数について述べる。

いま, 曲面パッチのパラメータ座標系の u 方向

に沿った長さを $L_u(u_B, u_1, w)$ とする。ここで, $L_u(u_B, u_1, w)$ は (u_B, w) から (u_1, w) まで u が変化したときのパッチに沿った長さを表す。同様に w 方向は $L_w(w_B, w_1, u)$ で表す。

ここで, 曲面を $P(u, w)$ とすると L_u, L_w は次のようにして求められる。

$$L_u(u_B, u_1, w) = \int_{u_B}^{u_1} |P_w(u, w)| du \\ L_w(w_B, w_1, u) = \int_{w_B}^{w_1} |P_w(u, w)| dw \quad (4.9)$$

式 (4.9) により求められる L_u, L_w を以下に用いる。

以下, 4.1 と同様に ϕ_1, ϕ_2 (u 方向のマッピング) についてのみ述べる。

まず, ϕ_1 を示す。基礎曲面において u 方向にマッピングされる領域は, k_{B1} 番目のパッチの $u_B = u_{B1}$ から k_{B2} 番目のパッチの $u_B = u_{B2}$ までである (ただし, $k_{B1} \leq k_{B2}$)。また, k_B 番目のパッチに沿った長さを $L_{u_{k_B}}$ と書くことにする。

マッピングされる領域の u 方向の全長を L_B とすると,

$$L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, u_{B2}, w_B) \quad (k_B = k_{B1}) \\ L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, 1, w_B) + L_{u_{k_{B2}}}(0, u_{B2}, w_B) \\ (k_B = k_{B1} + 1) \\ L_B = L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, 1, w_B) + \sum_{i=k_{B1}+1}^{k_{B2}-1} L_{u_i}(0, 1, w_B) \\ + L_{u_{k_{B2}}}(0, u_{B2}, w_B) \quad (k_B > k_{B1} + 1) \quad (4.10)$$

となる。これを用いて、マッピング関数を次のように定める。

k_B 番目のパッチ (ただし, $k_{B1} \leq k_B \leq k_{B2}$) について,

$$u = \phi_1(k_B, u_B) \\ L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, u_B, w_B) / L_B \quad (k_B = k_{B1}) \\ \{ L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, 1, w_B) + L_{u_{k_B}}(0, u_B, w_B) \} / L_B \\ (k_B = k_{B1} + 1) \\ = \{ L_{u_{k_{B1}}}(u_{B1}, 1, w_B) + \sum_{i=k_{B1}+1}^{k_B-1} L_{u_i}(0, 1, w_B) \\ + L_{u_{k_B}}(0, u_B, w_B) \} / L_B \quad (k_B > k_{B1} + 1) \quad (4.11)$$

また, w 方向についても同様である。

次に ϕ_2 であるが, これは式 (4.8) のようには求められず, 曲面の長さを計算しながら u に対応する (k_C, u_C) を得る必要がある。

以上で示したマッピング関数を用いることに

より、一様なマッピングが可能となる。

4.4 形状維持領域について

本モデルでは、形状維持領域をブレンディング関数のパラメータ空間において与える。これを共通のパラメータ $(u_0, u_1), (w_0, w_1)$ により与えた場合、基礎曲面と制御曲面では実空間上での形状維持領域の大きさが異なる。しかし、両者の大きさは等しい方が望ましい。そこで、基礎曲面と制御曲面に対応する形状維持領域を、それぞれ $(u_0, u_1), (w_0, w_1)$ および $(u_0^*, u_1^*), (w_0^*, w_1^*)$ で別々に与える。次に、以下のマッピングを行い、整合をとる。

例えば、 $0 \leq u \leq u_0, 0 \leq w \leq w_0$ の領域では、

$$\begin{aligned} u^* &= (u/u_0)u_0^* & (u \neq 0) \\ u^* &= 0 & (u=0) \\ w^* &= (w/w_0)w_0^* & (w \neq 0) \\ w^* &= 0 & (w=0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

他の領域も同様にしてマッピングを行う。

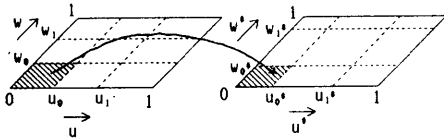


図4-6 形状維持領域のマッピング

このマッピングされた形状維持領域により、形状制御を行う。

5. 画像例

ここでは、本モデルを用いて実際に作成した画像を示す。

画像の作成及び表示に使用したシステムは以下の通りである。

画像作成: NEWS 830(SONY), 言語 C

画像表示: PC-286V(EPSON)
+ SuperFrame(SAPIENCE)

また、画像は全て 640×400 ピクセルカラー画像を撮影した。

作成した画像例を図5-1に示す。基礎曲面、制御曲面は共に双3次B-Spline曲面を用いた。また、式(3.15)によるブレンディング関数、及び4.2のマッピング関数により画像を生成した。画面左が基礎曲面と制御曲面、画面右が生成曲面

である。

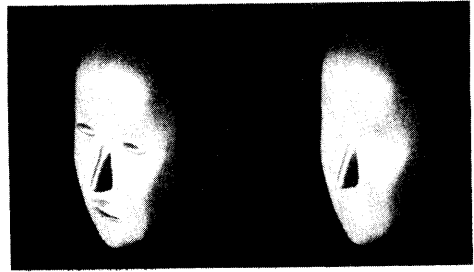


図5-1 本モデルによる画像例

図5-1の生成曲面をみると、制御曲面の形状を維持し、基礎曲面と制御曲面が滑らかに接続されていることが確認できる。

6. むすび

本報告では、全体的な形状を持つ曲面と部分的な形状を持つ曲面との合成によって、両方の特徴を生かした曲面を生成する自由形状曲面モデルを提案した。また、本モデルを用いて生成した画像を示した。

本モデルにより、曲面形状の大局的な設計と部分的な設計を別々に行うことが可能となり、形状設計が容易になると考えられる。

現在は、形状維持領域、マッピング領域を人間が与えているが、今後これらの自動化が望まれる。また、曲面の連続性を容易に制御できるようなブレンディング関数を求めること等が課題である。

謝辞

日頃御指導頂く早稲田大学堀内和夫教授に深く感謝いたします。また、熱心に御議論頂いた本学大学院山口泰広氏に感謝いたします。なお、本研究の一部は、電気通信普及財団及び財団法人大川情報通信基金の補助を受けた。

参考文献

- [1] 山口 富士夫: "コンピュータ・ディスプレイによる形状処理工学", 日刊工業新聞社 (1983).
- [2] Coons, S.A.: "Surface Patches and B-spline Curves," Computer Aided Geometric Design, Academic Press (1974).
- [3] 香川, 今野, 高村: "自由曲面のテクスチャ・マッピングについての考察", 第4回 NICOGRAPH 論文コンテスト論文集, pp.72-80 (1988).