グラフィクスとCAD　42－1
（1989.12.14）

パターン認識の数学的理論（第XV部　パターンの構造的類似性をもたらす4種類の収縮写像）

A MATHEMATICAL THEORY OF RECOGNIZING PATTERNS (PART XV FOUR KINDS OF CONTRACTION-MAPPINGS WHICH CAN REPRODUCE A STRUCTURAL SIMILARITY OF PATTERNS)

鈴　木　昇　一
Shoichi SUZUKI
文教大学 湘南キャンパス 情報学部 情報システム学科
Department of Information System, School of Information, BUNKYO UNIVERSITY

Abstract We make four kinds of contraction-mapping which provide one another an approximation of a pattern. This four mappings make a respective approximation with a linear combination of primitive patterns and differ in methods of determining coefficients(adaptive or non-adaptive and binary or continuous coefficients) of the linear combination. The four mappings are provided in order to realize the functions of neural networks , i.e. the Hopfield associative memories and the multilayer Perceptrons in the framework of the mathematical theory of recognizing patterns.

1. まえがき

処理対象とするパターンφの集合Φをある1ルム空間NSの部分集合とする。以下では，NSとして，内積，ノルムを各々，$(\cdot,\cdot)$，$\|\cdot\|=[(\cdot,\cdot)]^{1/2}$とするある可分なHilbert空間$\Omega$を選ぶ。

相互排反的なカテゴリ（類概念）の全体のなす有限集合を

$\mathcal{C}=\{C_j \mid j\in J\}$，ここに

$J=\{1,2,\cdots,m\}$，$m\geqq 2$

とする。第$j\in J$番目のカテゴリC_jの生起確率は，

$0<p(C_j)<1$，$\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)=1$

を満たしている。C_jのもつ諸性質を典型的に代表しているパターン（代表パターン）を$\omega_j\in\Phi$とする。

$\varphi\in\Phi$を変数とする汎関数

$R(\varphi)=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\|\varphi-\omega_j\|\omega_j\|^{-1}\|^2$

を考える。$R(\varphi)$を極小ならしめるφをξと書くと，重心分割定理(1),XIIより，ξは

$\{\omega_j\|\omega_j\|^{-1} \mid j\in J\}$を頂点とする単体の重心分割表現　$\xi=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$

であり，極小値$R(\xi)$は

$R(\xi)=1-\|\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}\|^2=1-\|\xi\|^2$

である。平均化パターン（average pattern）と呼ばれるξは相互排反的な各カテゴリC_jのノルム規格化代表パターン$\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$に$C_j$の生起確率$p(C_j)$をかけ，すべてのカテゴリ番号$j\in J$につき総和したものである。

Ωでのある自己共役作用素Hを選ぶ。4条件

$\forall\ell\in L$，$\theta_\ell(H)\neq 0$（零作用素），$\neq I$（恒等作用素）

$\forall\ell,\forall k\,(\ell\neq k)\in L$，$\theta_\ell(H)\cdot\theta_k(H)=0$

$\Sigma_{\ell\in L}\,\theta_\ell(H)=I$

$\forall\ell\in L$，$\theta_\ell(H)\xi\neq 0$

を満たす（Hの関数として第$\ell\in L$番目の）射影作用素$\theta_\ell(H)$の集合

$\vec{\theta}(H)=\{\theta_\ell(H) \mid \ell\in L\}$

を導入し，$\theta_\ell(H)\,\xi\|\xi\|^{-1}\in\Omega$の線形1次結合

$\Sigma_{\ell\in L}\, a_\ell\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$，ここに$a_\ell$は複素定数

によって，各パターン$\varphi\in\Phi$のもつ情報は認識システム内部で再表現されるものと考えよう。

このとき

$T\varphi=\Sigma_{\ell\in L}\, a_\ell\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

であって，Tは次のaxiom 1[1],II を満たすという意味で収縮写像であるとすれば，各a_ℓの決定の仕方は当然ながら制限されてくる。本研究はこのような四つの決定方法を説明したものであり，パターン認識の数学的理論[1]の枠組の中で，ニューラルネットワーク情報処理を実現する際，基本的に必要とされる4種類の収縮写像を提供するものである．

Axiom 1（$T:\Phi\Rightarrow\Phi$ が収縮写像であるための必要十分条件）

(i)（$0\in\Phi$ はTの不動点である）

$\exists 0\in\Phi,\ T0=0$

(ii)（吸収法則，absorptive law）

$\forall\varphi\in\Phi,\ \forall a(=\text{定数})>0,\ T(a\varphi)=T\varphi$

(iii)（ベキ等法則，idempotent law）

$\forall\varphi\in\Phi,\ T(T\varphi)=T\varphi$

(iv) $\exists\varphi\in\Phi,\ T\varphi\neq 0$ □

2．4種類の収縮写像

本章では，$\{\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\mid \ell\in L\}$ がパターンを記憶するときの記憶単位の集合であり，

$\{\theta_\ell(H)T\varphi\|T\varphi\|^{-1}\mid \ell\in L\}$

がパターンφから得られる知覚単位の集合であるという解釈を可能にする収縮写像Tの構成法を4種類説明する。

パターンを処理・記述・再現する上で最小単位となる特徴をもつパターンを，いいかえれば，

意味をもつ最小単位としての形態素(morpheme)

を素パターン（primitive pattern）ということにすれば，

$\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

は第$\ell\in L$番目の素パターンであり，パターンが意味を保ったり変えたりするという変換場面（認識・連想・理解といった場面）において，

変換前後のパターンの構造を解析するのに基礎となるパターン

である。

以上のように，$\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$はパターンを記憶するときの“パターン記憶の基本単位”としている。収縮写像Tを

$T\varphi=\sum_{\ell\in L}a_\ell\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\in\Phi,\ \varphi\in\Phi$

という形式で構成するということは，平均化パターンξと，射影作用素の組$\{\theta_\ell(H)\mid \ell\in L\}$とを導入し，$\Phi$内の各パターン$\varphi$を基礎にあるパターンの基本単位 $\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$（の定数倍）に分解できることを要請している。

知覚の単位について考えてみよう。

$\theta_k(H)T\varphi=a_k\cdot\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

がいえ，

$$\begin{aligned}\|T\varphi\|^2&=(T\varphi,T\varphi)\\&=\sum_{k\in L}(\theta_k(H)T\varphi,T\varphi)\\&=\sum_{k\in L}(\theta_k(H)T\varphi,\theta_k(H)T\varphi)\\&=\sum_{k\in L}|a_k|^2\cdot(\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1},\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})\\&=\sum_{k\in L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2\end{aligned}$$

が成立することに留意すれば，入力φからもたらされる知覚の単位は，パターン記憶の基本単位の定数倍になると考え，

$$\theta_\ell(H)T\varphi\|T\varphi\|^{-1}=\Big[a_\ell/\sqrt{\textstyle\sum_{k\in L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}\Big]\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$$

がパターン$\varphi\in\Phi$から得られる知覚単位であって，この知覚単位は記憶単位$\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$の

$a_\ell/[\sum_{k\in L}|a_k|^2\cdot\|\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2]^{1/2}$ 倍

ということになる。

上記の考えの下で，本研究では，次のi～ivで示される写像

$\mathfrak{X}(\cdot),\ \mathfrak{Y}(\cdot),\ \mathfrak{Z}(\cdot)\|\mathfrak{Z}(\cdot)\|^{-1},\ \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\cdot))$

がaxiom 1を満たす収縮写像であることを説明する。なお，$f(H)$は自己共役作用素Hの関数としての正値自己共役作用素であって，Borel可測関数$f(\lambda)$が適切に選ばれているものとする[2],[8]。また，

$0\neq\xi\in\mathcal{D}(f(H))\equiv\{\varphi\mid\|f(H)\varphi\|<\infty,\ \varphi\in\Omega\}$

とする。

(i) $\mathfrak{X}(\varphi)\equiv\sum_{\ell\in L}x_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

非適応的2値係数$x_\ell(\varphi)$は

$\mathrm{sgn}(u)=0$ if $u<0$, $=1$ if $u\geqq 0$

を導入して，

$$x_\ell(\varphi)\equiv 1-\mathrm{sgn}(\|\theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2)$$

(ii) $\mathfrak{Y}(\varphi)\equiv\sum_{\ell\in L}y_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

適応的2値係数 $y_\ell(\varphi)\equiv\mathrm{sgn}(\mathfrak{R}_\ell(\varphi)-\mathfrak{e}_\ell)$

$\mathfrak{R}_\ell(\varphi)\equiv(f(H)\cdot\theta_\ell(H)\varphi,\varphi)/(\varphi,\varphi)$

$0<\mathfrak{e}_\ell\leqq\mathfrak{R}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})$

$\xi\equiv\sum_{j\in J}p(C_j)\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$

(iii) $\mathfrak{Z}(\varphi)\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|^{-1}$

ここに，$\mathfrak{Z}(\varphi)\equiv\sum_{\ell\in L}z_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

非適応的連続値係数 $z_\ell(\varphi)\equiv(\varphi,\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$

(iv) $\mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi))$

ここに，$\mathfrak{W}(\varphi)\equiv\sum_{\ell\in L}w_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$

適応的連続値係数 $w_\ell(\varphi)\equiv\sqrt{\mathcal{B}_\ell(\varphi)/u_\ell}$

3．写像 $\mathfrak{X}(\cdot):\Phi\to\Phi$

$\ell\in L$ を添字にもつ定数 b_ℓ が $b_\ell\in\{0,1\}$ として，パターン $\Sigma_{\ell\in L}\, b_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$ で，ノルム規格化パターン $\varphi\|\varphi\|^{-1}\in\Phi$ を近似することを考えよう．

［定理3.1］（非適応的2値近似モデル定理）

2乗近似誤差

$$h(b_\ell,\ell\in L;\varphi)$$
$$\equiv\|\varphi\|\varphi\|^{-1}-\Sigma_{\ell\in L}\, b_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$$

を最小ならしめる2値係数 $b_\ell\in\{0,1\}$ は

$$b_\ell=x_\ell(\varphi),\ \ell\in L$$

ここに，

$$x_\ell(\varphi)\equiv 1-\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2)$$

$$\mathrm{sgn}(u)=0 \text{ if } u<0,\ =1 \text{ if } u\geqq 0$$

と与えられる。このとき，$h(b_\ell,\ell\in L;\varphi)$ の最小値は

$$\mathrm{MIN}_{b_\ell\in\{0,1\},\ell\in L}\, h(b_\ell,\ell\in L;\varphi)$$
$$=h(x_\ell(\varphi),\ell\in L;\varphi)$$
$$=\Sigma_{\ell\in L}\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-x_\ell(\varphi)\cdot\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2.$$

（証明） $\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)=I$（恒等作用素）より $\varphi\|\varphi\|^{-1}=\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}$ が成立しているから，

$$\varphi\|\varphi\|^{-1}-\Sigma_{\ell\in L}\, b_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$$
$$=\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}-\Sigma_{\ell\in L}\, b_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$$
$$=\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\cdot\xi\|\xi\|^{-1}]$$

を得て，

$\forall\ell\in L,\ \forall\psi,\forall\eta\in\Omega,\ (\psi,\Theta_\ell(H)\eta)=(\Theta_\ell(H)\psi,\eta)$ （$\Theta_\ell(H)$の自己共役性）

$\Theta_k(H)\cdot\Theta_\ell(H)=0$ if $k\neq\ell$ （$\Theta_k(H),\Theta_\ell(H)$の直交性）

を適用すれば，

$$h(b_\ell,\ell\in L;\varphi)$$
$$=\|\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\cdot\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2$$
$$=(\Sigma_{k\in L}\Theta_k(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_k\cdot\xi\|\xi\|^{-1}],\ \Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\cdot\xi\|\xi\|^{-1}])$$
$$=\Sigma_{k\in L}\Sigma_{\ell\in L}(\Theta_\ell(H)\cdot\Theta_k(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_k\cdot\xi\|\xi\|^{-1}],\ \varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\cdot\xi\|\xi\|^{-1})$$
$$=\Sigma_{\ell\in L}\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\cdot\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2$$
$$=\Sigma_{\ell\in L}\, d_\ell,\ \text{ここに,}\ d_\ell\equiv\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-b_\ell\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2\geqq 0$$

が成り立つ，よって，$h(b_\ell,\ell\in L;\varphi)$ を最小にするためには，次の i，ii の如く，各 b_ℓ を選べばよい：

(i) $d_\ell|_{b_\ell=1}<d_\ell|_{b_\ell=0}$ であれば，$b_\ell=1$ と選ぶ。

(ii) $d_\ell|_{b_\ell=1}\geqq d_\ell|_{b_\ell=0}$ であれば，$b_\ell=0$ と選ぶ。

このような b_ℓ は

$$b_\ell=1-\mathrm{sgn}(d_\ell|_{b_\ell=1}-d_\ell|_{b_\ell=0})$$

と表現され，

$$d_\ell|_{b_\ell=1}=\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2$$
$$d_\ell|_{b_\ell=0}=\|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2$$

を考慮すると，証明が完了したことがわかる．□

さて，

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{X}(\varphi)\equiv\Sigma_{\ell\in L}\, x_\ell(\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\ \text{ここに,}\\ x_\ell(\varphi)\equiv 1-\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2\\ \qquad -\|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2)\end{array}\right\}$$

と定義される写像

$$\mathfrak{X}(\cdot):\Phi\to\Phi$$

が収縮写像であることは次の定理3.3で指摘される。なお，$\mathfrak{X}(\varphi)$ をパターン $\varphi\in\Phi$ の準近似構造パターン（quasi-approximate structural pattern）ということにする。

その前に，補助定理3.2を示しておく。

［補助定理3.2］[6, 補定3.1] 各 g_k を複素定数として，$\psi\equiv\Sigma_{k\in L}\, g_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}$ を考える．

等式 $\|\psi\|^2=\Sigma_{k\in L}|g_k|^2\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$

が成立し，よって，不等式

$$\|\psi\|^2\leqq\sup_{k\in L}|g_k|^2$$

が成り立つ。ここに，次の等式が成立している：

$$\Sigma_{k\in L}\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2=1 \qquad \square$$

［定理3.3］（非適応的2値近似モデルの収縮写像定理） 写像

$\mathfrak{X}(\cdot):\Phi\to\Phi$ は axiom1 を満たし，収縮写像である。

（証明） $T=\mathfrak{X}$ とおき，T が axiom 1 の i～iv を満たすことを示す。

i の成立： $\varphi=0$ とすれば，$\varphi\|\varphi\|^{-1}=0$

$\therefore\ \forall\ell\in L,\ \|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2=0$

$\therefore\ \mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2)=\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2)=1$

$\because\ \forall\ell\in L,\ \Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\neq 0$

よって，$\forall\ell\in L,\ x_\ell(\varphi)=1-1=0\ \therefore T\varphi=\mathfrak{X}(\varphi)=0$

ii の成立： a を正定数とすると，

$$T(a\varphi)=\mathfrak{X}(a\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}\, x_\ell(a\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$$

であるが， $a\varphi\|a\varphi\|^{-1}=(a/|a|)\cdot\varphi\|\varphi\|^{-1}=\varphi\|\varphi\|^{-1}$

が成り立つから，

$$\forall\ell\in L,\ x_\ell(a\varphi)=1-\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)[a\varphi\|a\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)a\varphi\|a\varphi\|^{-1}\|^2)=x_\ell(\varphi)$$

$$\therefore\ T(a\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}\, x_\ell(\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=T\varphi.$$

iii の成立： $T(T\varphi)=\mathfrak{X}(\mathfrak{X}(\varphi))=\Sigma_{\ell\in L}\, x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$ であるが，

$$\forall\ell\in L,\ x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))=x_\ell(\varphi) \qquad (※1)$$

が成立するので，$T(T\varphi)=T\varphi$ がいえる。

以下，(※1) の証明．

(イ) $\forall\ell\in L,\ x_\ell(\varphi)=0$ のとき

$\mathfrak{X}(\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}\, x_\ell(\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=0$ を得て，

i と同様にして，$\forall\ell\in L,\ x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))=0$ を得．

$0=x_\ell(\varphi)=x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))$，つまり (※1) が示された．

(ロ) $[\exists k\in L,\ x_k(\varphi)=1]\wedge x_\ell(\varphi)=0$ のとき

(ハ) $[\exists k\in L,\ x_k(\varphi)=1]\wedge x_\ell(\varphi)=1$ のとき

この ロ，ハ の場合，(※1) の成立を示そう。

$\exists k\in L,\ x_k(\varphi)=1$ であるから，補助定理 3.2 より，$\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^2=\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2\neq 0$ である。

$$x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))=1-\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)[\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}\|^2)$$

に注意して，

$$\Theta_k(H)\cdot\Theta_\ell(H)=0 \text{ if } k\neq\ell,\ =\Theta_\ell(H) \text{ if } k=\ell$$

を適用して，$\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}$ を計算すると，

$$\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}$$
$$=\left[x_\ell(\varphi)/\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}\right]\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$$

であることがわかる．

ロの場合：　$\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}=0$

$$\therefore\ x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))=1-\mathrm{sgn}(\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2-0)$$
$$=1-1=0$$

となって，$0=x_\ell(\varphi)=x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))$．

ハの場合：

$$\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}=\frac{1}{\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}}\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},$$

$$0\neq\|\mathfrak{X}(\varphi)\|=\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}$$
$$\leqq\sqrt{\Sigma_{k\in L}\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}=\sqrt{1}=1$$
$$\therefore\ 1\leqq 1/\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}$$

であるから，

$$\|\Theta_\ell(H)[\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2$$
$$=\|[1/\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}-1]\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$$
$$=|1/\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}-1|^2\cdot\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$$
$$<|1/\sqrt{\Sigma_{k\in L}\, x_k(\varphi)\cdot\|\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2}|^2\cdot\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$$
$$=\|\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}\|^2$$
$$\therefore\ \|\Theta_\ell(H)[\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)\mathfrak{X}(\varphi)\|\mathfrak{X}(\varphi)\|^{-1}\|^2<0$$

を得，$x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))=1-0=1$

$\therefore\ 1=x_\ell(\varphi)=x_\ell(\mathfrak{X}(\varphi))$．

iv の成立：　$\varphi=\xi\|\xi\|^{-1}$ とおくと，

$\varphi\|\varphi\|^{-1}=\xi\|\xi\|^{-1}$ が成立し，

$$\|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2=\|\Theta_\ell(H)\cdot 0\|^2=\|0\|^2=0,$$
$$\|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2=\|\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2>0$$
$$\therefore\ \|\Theta_\ell(H)[\varphi\|\varphi\|^{-1}-\xi\|\xi\|^{-1}]\|^2-\|\Theta_\ell(H)\varphi\|\varphi\|^{-1}\|^2<0$$

$\therefore\ \forall\ell\in L,\ x_\ell(\varphi)=1-0=1$ を得て，

$T\varphi=\mathfrak{X}(\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=\xi\|\xi\|^{-1}\neq 0$. □

4．写像 $\mathfrak{D}(\cdot):\Phi\to\Phi$

情報の量子論 (quantum theory of information) では，パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の特徴量は測度的不変量(2)

$$\mathfrak{S}_\ell(\varphi)\equiv(f(H)\cdot\Theta_\ell(H)\varphi,\varphi)/(\varphi,\varphi)$$

である。ここに，$f(H)$ は H の関数としての，ある正値自己共役作用素である。不等式

$$0<e_\ell\leqq\mathfrak{S}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})$$

を満たす助変数 e_ℓ を想定すると

$$\mathfrak{y}_\ell(\varphi)\equiv\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)$$

は，特徴量 $\mathfrak{S}_\ell(\varphi)$ が e_ℓ 以上存在する場合のみ，第 $\ell\in L$ 番目の特徴量が存在することを示している量である。

平均化パターン $\xi=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$ は各カテゴリ C_j の成分が $p(C_j)\cdot\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$ という形で存在するパターン (混合パターン，mixture) であると考えられる。$\mathfrak{S}_\ell(\xi)=\mathfrak{S}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})$ なので，$\forall\ell\in L,\ \mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\xi)-e_\ell)=1$ が成立し，

$$\xi_j\equiv\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\xi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$$

とおくと，$\xi_j=\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$ が成立し，ξ は

$$\xi=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\xi_j$$
$$=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\xi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$$

と書ける。ξ のこの表現から類推されることは，ξ の右辺において，ξ の代りに一般のパターン $\varphi\in\Phi$ を採用して得られる

$$\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$$

は，

パターン $\varphi\in\Phi$ が各カテゴリ C_j の成分につき $p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$ という形で存在するパターン (mixture；混合パターン)

である，ということである．いいかえれば，パターン $\varphi\in\Phi$ が第 $j\in J$ 番目のカテゴリ C_j に対し持つ原始パターン (primitive pattern；パターンを記述する上で最小単位となる特徴を備えたパターン) は，

$$\varphi_j\equiv\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}$$

であるとの解釈が得られる。

さて，以上の解釈の下で，

$$\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\varphi_j\cdot\|\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\xi_j\|^{-1}$$
$$=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}\cdot\|\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\xi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\cdot\|\omega_j\|^{-1}\|^{-1}$$
$$=\Sigma_{j\in J}\, p(C_j)\cdot\Sigma_{\ell\in L}\,\mathrm{sgn}(\mathfrak{S}_\ell(\varphi)-e_\ell)\cdot\Theta_\ell(H)\omega_j\|\omega_j\|^{-1}\cdot\|\xi\|^{-1}$$

というパターンを考えると，これは平均化パターンξとの比較の下で，

パターン$\varphi \in \Phi$が各カテゴリc_jに対し持つ原始パターン　φ_j　が重み（c_jの生起確率）$p(c_j)$で存在するmixture　である

といえる。

$\Sigma_{j \in J}\, p(c_j) \cdot \varphi_j \,/\, \| \Sigma_{j \in J}\, p(c_j) \cdot \xi_j \|$

$= \Sigma_{\ell \in L}\, \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell) \cdot \theta_\ell(H)\, \Sigma_{j \in J}\, p(c_j) \cdot \omega_j \| \omega_j \|^{-1} \,/\, \| \xi \|$

$= \Sigma_{\ell \in L}\, \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \cdot \| \xi \|^{-1}$

と変形されるから，

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{Y}(\varphi) \equiv \Sigma_{\ell \in L}\, y_\ell(\varphi) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \\ \quad \text{ここに，}\ y_\ell(\varphi) \equiv \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell) \end{array}\right\}$$

とおくと，

$\Sigma_{j \in J}\, p(c_j) \cdot \varphi_j \,/\, \| \Sigma_{j \in J}\, p(c_j) \cdot \xi_j \|$

$= \mathfrak{Y}(\varphi)$

が成立する。

まず，三つの補助定理4.1～4.3を用意する。

［補助定理4.1］(2),(7),(8)（特徴抽出・ウニタリ不変定理）

UをHと可換な任意のウニタリ作用素とすれば，$\varphi \in \mathfrak{D}(f(H))$に対し，

$U\varphi \in \mathfrak{D}(f(H)) \wedge [\forall \ell \in L,\ \mathfrak{I}_\ell(U\varphi) = \mathfrak{I}_\ell(\varphi)]$ □

［補助定理4.2］(6),定理3.1（連続値特徴量定理）

パターン　$\eta = \Sigma_{\ell \in L}\, a_\ell \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$，

ここに，各a_ℓは複素定数で，

$\xi \in \mathfrak{D}(f(H)) \equiv \{ \varphi \mid \| f(H) \varphi \| < \infty,\ \varphi \in \Omega \}$

に関しては，条件

$\sup_{\ell \in L} |a_\ell|^2 < \infty$

の下で，　$\eta \in \mathfrak{D}(f(H))$　が成立し，

$\mathfrak{I}_\ell(\eta) = \mathfrak{I}_\ell(\xi \| \xi \|^{-1}) \cdot u_\ell(\eta)$，

ここに，

$$u_\ell(\eta) = \frac{\Sigma_{m \in L} |a_\ell|^2 \cdot \| \theta_m(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2}{\Sigma_{k \in L} |a_k|^2 \cdot \| \theta_k(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} \|^2} \qquad \square$$

補助定理4.2から次の補定4.3が証明される。

［補助定理4.3］(6),定理4.1（2値特徴量定理）

3条件

$\xi \in \mathfrak{D}(f(H)) \equiv \{ \varphi \mid \| f(H) \varphi \| < \infty,\ \varphi \in \Omega \}$

$\forall \ell \in L,\ \theta_\ell(H)\, \xi \neq 0$

$\forall \ell \in L,\ 0 < e_\ell \leqq \mathfrak{I}_\ell(\xi \| \xi \|^{-1})$

の下で，

$\eta = \Sigma_{\ell \in L}\, a_\ell \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$

ここに，$a_\ell \in \{0,\ 1\}$

に関し，

$\eta \in \mathfrak{D}(f(H)) \wedge [\forall \ell \in L,\ y_\ell(\eta) = a_\ell]$． □

補定4.1から，パターン$\varphi \in \Phi$のある種のウニタリ変換Uの上での不変性を指摘する次の定理4.4が成立する。

［定理4.4］(7)（ウニタリ不変モデル定理）

$\varphi \in \mathfrak{D}(f(H))$とする。$H$と可換な任意のウニタリ作用素$U$に対し，

$U\varphi \in \mathfrak{D}(f(H)) \wedge \mathfrak{Y}(U\varphi) = \mathfrak{Y}(\varphi)$． □

補定4.3を適用して，パターン$\varphi \in \Phi$の構造化モデルとも呼ばれてもよい$\mathfrak{Y}(\varphi)$から抽出された，第$\ell \in L$番目の2値特徴量$y_\ell(\mathfrak{Y}(\varphi))$は原パターン$\varphi$の，第$\ell \in L$番目の2値特徴量$y_\ell(\varphi)$と等しいことを指摘する次の定理4.5が成立する。

［定理4.5］(7)（2値特徴量再現モデル定理）

$\varphi \in \mathfrak{D}(f(H))$とする。補定4.3の3条件の下で，

$\mathfrak{Y}(\varphi) \in \mathfrak{D}(f(H)) \wedge [\forall \ell \in L,\ y_\ell(\mathfrak{Y}(\varphi)) = y_\ell]$． □

さて，$T\varphi = \mathfrak{Y}(\varphi)$　と定義された写像$T: \Phi \to \Phi$　がaxiom 1を満たし，$\mathfrak{Y}(\cdot): \Phi \to \Phi$が収縮写像であることは次の定理4.6で指摘される。写像$\mathfrak{Y}(\cdot)$内にはパターン$\varphi \in \Phi$から抽出された各連続値特徴量$\mathfrak{I}_\ell(\varphi)$を2値化するしきい値$e_\ell$が含まれ，この$e_\ell$は（訓練パターン集合により）適応的に決定してもよいので，$\mathfrak{Y}(\varphi)$をパターン$\varphi \in \Phi$の適応的2値近似モデルという。

［定理4.6］（適応的2値近似モデルの収縮写像定理）

補助定理4.3の3条件の下で，

$\mathfrak{Y}(\cdot)$はaxiom 1を満たし，収縮写像である。

（証明）　$T = \mathfrak{Y}$がaxiom 1のi～ivを満たすことを確かめよう．

iの成立：　$\varphi = 0$とおけば，$\varphi \| \varphi \|^{-1} = 0$

$\therefore\ \forall \ell \in L,\ \mathfrak{I}_\ell(\varphi) = (f(H)\, \theta_\ell(H)\, \varphi \| \varphi \|^{-1},\ \varphi \| \varphi \|^{-1}) = 0$，$\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell < 0$，

$y_\ell(\varphi) = \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell) = 0$

を得，$T\varphi = \mathfrak{Y}(\varphi) = 0$．

iiの成立：　aを非零複素定数とすれば，

$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{I}_\ell(a\varphi) = (f(H) \cdot \theta_\ell(H)\, a\varphi,\ a\varphi) / (a\varphi,\ a\varphi)$

$= [\,|a|^2 / |a|^2\,] \cdot (f(H) \cdot \theta_\ell(H)\, \varphi,\ \varphi) / (\varphi,\ \varphi) = \mathfrak{I}_\ell(\varphi)$，

$\therefore\ y_\ell(a\varphi) = y_\ell(\varphi)$を得，$\mathfrak{Y}(a\varphi) = \mathfrak{Y}(\varphi)$．

iiiの成立：　定理4.5を適用すれば，

$y_\ell(\mathfrak{Y}(\varphi)) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} = y_\ell(\varphi) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$

$\therefore\ \Sigma_{\ell \in L}\, y_\ell(\mathfrak{Y}(\varphi)) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1} = \Sigma_{\ell \in L}\, y_\ell(\varphi) \cdot \theta_\ell(H)\, \xi \| \xi \|^{-1}$

すなわち　$\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}(\varphi)) = \mathfrak{Y}(\varphi)$．

ivの成立：　$\varphi = \xi \| \xi \|^{-1}$とおくと，

$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell \geqq 0\ \therefore\ y_\ell(\varphi) = \mathrm{sgn}(\mathfrak{I}_\ell(\varphi) - e_\ell) = 1$

を得，$\eta(\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}\, y_\ell(\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$
$=\Sigma_{\ell\in L}\,\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=\xi\|\xi\|^{-1}\neq 0$. □

5．写像 $\mathcal{B}(\cdot)\|\mathcal{B}(\cdot)\|^{-1}:\Phi\to\Phi$

$\ell\in L$を添字にもつ複素定数a_ℓを適当に選定し，
$\Sigma_{\ell\in L}\, a_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$
で，パターン$\varphi\in\Phi$を近似することを考えよう．

［定理5.1］（非適応的連続値近似モデル定理）
２乗近似誤差
$h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
$\equiv\|\varphi-\Sigma_{\ell\in L}\, a_\ell\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
を最小ならしめる $a_\ell=z_\ell(\varphi)$ は
$z_\ell(\varphi)=(\varphi,\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$,\ell\in L$
と与えられる。このとき，$h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$の最小値は
$MIN_{a_\ell(\ell\in L)}\, h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
$=h(z_\ell(\varphi),\ell\in L;\varphi)$
$=\|\varphi\|^2-\Sigma_{k\in L}\,\overline{z_k(\varphi)}\cdot(\varphi,\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$.
ここに，$\overline{z_k(\varphi)}$は$z_k(\varphi)$の共役複素数．

（証明） $a_\ell(\ell\in L)$が$h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$を極値にするとすれば，
$\forall\ell\in L,\ 0=(\partial/\partial a_\ell)\cdot h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
が成り立つ。複素変数a_ℓとその共役数$\overline{a_\ell}$とは独立であるから，
$\forall\ell\in L,(\partial/\partial\overline{a_\ell})[\varphi-\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}]=0$
が成立していることに注目すると，
$0=(\partial/\partial a_\ell)\, h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
$=((\partial/\partial a_\ell)[\varphi-\Sigma_{m\in L}a_m\cdot\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}]$
$,\varphi-\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$+(\varphi-\Sigma_{m\in L}a_m\cdot\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1},$
$(\partial/\partial\overline{a_\ell})[\varphi-\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}])$
$=((\partial/\partial a_\ell)[\varphi-\Sigma_{m\in L}a_m\cdot\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1}],$
$\varphi-\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=(-\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi-\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$ (※1)
$=-(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi)$
$+(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Sigma_{k\in L}a_k\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$ (※2)
を得，ここで，
$b_{k\ell}\equiv(\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$ (※3)
とおくと，
$\forall\ell\in L,\forall\eta,\forall\psi\in\Omega,(\eta,\Theta_\ell(H)\psi)=(\Theta_\ell(H)\eta,\psi)$
$\Theta_k(H)\cdot\Theta_\ell(H)=0$ if $k\neq\ell$
を適用すれば，
$b_{k\ell}=\begin{cases}0 & \text{if } k\neq\ell\\ (\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}) & \text{if } k=\ell\end{cases}$ (※4)
であるから，次のように（※2）からa_ℓが決定される：
$0=(\partial/\partial a_\ell)\cdot h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
$=-(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi)+\Sigma_{k\in L}\,\overline{a_k}\cdot b_{\ell k}$
$=-(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi)+\overline{a_\ell}\cdot b_{\ell\ell}$
$\therefore\ \overline{a_\ell}=(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi)/b_{\ell\ell}$
$\therefore\ a_\ell=(\varphi,\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/\overline{b_{\ell\ell}}$
$=(\varphi,\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$.
$MIN_{a_\ell(\ell\in L)}\, h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$を求めよう。
$MIN_{a_\ell(\ell\in L)}\, h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)=h(z_\ell(\varphi),\ell\in L;\varphi)$
$=(\varphi-\Sigma_{m\in L}z_m(\varphi)\cdot\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=(\varphi,\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$-(\Sigma_{m\in L}z_m(\varphi)\cdot\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=(\varphi,\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$-\Sigma_{m\in L}z_m(\varphi)\cdot(\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
であるが，（※1）が成立していることから成立する
$\forall m\in L,(\Theta_m(H)\xi\|\xi\|^{-1},\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})=0$
を適用すると，
$MIN_{a_\ell(\ell\in L)}\, h(a_\ell,\ell\in L;\varphi)$
$=(\varphi,\varphi-\Sigma_{k\in L}z_k(\varphi)\cdot\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=\|\varphi\|^2-\Sigma_{k\in L}\,\overline{z_k(\varphi)}\cdot(\varphi,\Theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1})$. □

パターン$\varphi\in\Phi$の，原始パターン集合
$\vec{\Theta}(H)\xi\|\xi\|^{-1}=\{\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\mid\ell\in L\}$
から見た構造を反映したモデル（構造モデル）の一つ
$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}(\varphi)\equiv\Sigma_{\ell\in L}\, z_\ell(\varphi)\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}\\ \text{ここに，} z_\ell(\varphi)\equiv(\varphi,\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})\\ \qquad /(\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})\end{array}\right\}$$
は上述の定理5.1の意味するところにより，最良近似構造パターン（the most-approximate structural pattern）といってもよいだろう。

［定理5.2］（非適応的連続値近似モデルの収縮写像定理）
$T\varphi=\mathcal{B}(\varphi)\|\mathcal{B}(\varphi)\|^{-1}$
と定義された写像 $T:\Phi\to\Phi$ はaxiom 1を満たし，収縮写像である。

（証明） Axiom 1のi～ivの成立を確かめる。
iの成立： $\varphi=0$とおく．$\forall\ell\in L,z_\ell(\varphi)=0$がいえ，$\mathcal{B}(\varphi)=\Sigma_{\ell\in L}0\cdot\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=0$，
$\therefore\ T\varphi=\mathcal{B}(\varphi)\|\mathcal{B}(\varphi)\|^{-1}=0,\ T0=0$ (※5)
iiの成立： aを非零複素定数とする。
$\forall\ell\in L,\ z_\ell(a\varphi)=a\cdot z_\ell(\varphi)$ であるから，
$\mathcal{B}(a\varphi)=a\cdot\mathcal{B}(\varphi)$ $\therefore\ T(a\varphi)=\mathcal{B}(a\varphi)\|\mathcal{B}(a\varphi)\|^{-1}$
$=(a/|a|)\cdot\mathcal{B}(\varphi)\|\mathcal{B}(\varphi)\|^{-1}$ を得る。ここで，特に，aを正定数とすれば，$a/|a|=1$ であるから，
$T(a\varphi)=\mathcal{B}(\varphi)\|\mathcal{B}(\varphi)\|^{-1}=T\varphi$. (※6)
iiiの成立： （※3），（※4）より，
$b_{k\ell}/b_{\ell\ell}=1$ if $k=\ell$, $=0$ if $k\neq\ell$

が知れるから，

$\forall \ell \in L,\ z_\ell(\mathfrak{Z}(\varphi))$
$=(\mathfrak{Z}(\varphi), \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=\Sigma_{k\in L} z_k(\varphi)\cdot(\theta_k(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$/(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})$
$=\Sigma_{k\in L} z_k(\varphi)\cdot b_{k\ell}/b_{\ell\ell} = z_\ell(\varphi)$

を得，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(\varphi))=\mathfrak{Z}(\varphi)$.　　(※7)

(イ) $T\varphi=0$ の場合　(※5)より $T(T\varphi)=T0=0$ $\therefore$ $0=T\varphi=TT\varphi$

(ロ) $T\varphi\neq 0$ の場合　$\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|\neq 0$ であるから，(※6)より $T(T\varphi)=T(\mathfrak{Z}(\varphi)\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|^{-1})$ $=T(\mathfrak{Z}(\varphi))$ を得，よって，$T(T\varphi)=\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(\varphi))\|\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}(\varphi))\|^{-1}$ であるが，(※7)より

$T(T\varphi)=\mathfrak{Z}(\varphi)\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|^{-1}=T\varphi$.

ivの成立： $\forall \ell\in L, \forall\eta, \forall\psi\in\Phi, (\eta, \theta_\ell(H)\psi)=(\eta, \theta_\ell(H)\cdot\theta_\ell(H)\psi)=(\theta_\ell(H)\eta, \theta_\ell(H)\psi)$ であるから，

$\varphi=\xi\|\xi\|^{-1}$ とおくと，$\forall\ell\in L, z_\ell(\varphi)=(\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})=(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})/(\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}, \theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1})=1$ を得，

$\mathfrak{Z}(\varphi)=\Sigma_{\ell\in L} 1\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}=\xi\|\xi\|^{-1}$

$\therefore$ $\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|=1$ を得，$T\varphi=\mathfrak{Z}(\varphi)\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|^{-1}$
$=\mathfrak{Z}(\varphi)=\xi\|\xi\|^{-1}\neq 0$，つまり $T(\xi\|\xi\|^{-1})=\xi\|\xi\|^{-1}$ (※8)
□

6．写像 $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\cdot)):\Phi\to\Phi$

情報の量子論[2]によれば，パターン $\varphi\in\Phi$ から抽出される第 $\ell\in L$ 番目の2値特徴量は $y_\ell(\varphi)\equiv \mathrm{sgn}(\mathfrak{F}_\ell(\varphi)-e_\ell)$ である。一変数関数 $\mathrm{sgn}(u)$ について a(=定数)>0 に対し $\mathrm{sgn}(au)=\mathrm{sgn}(u)$ が成立しているから，しきい値 e_ℓ の不等式 $0<e_\ell\leqq\mathfrak{F}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})$ （補定4.3を参照）に注意して，$y_\ell(\varphi)$ は $y_\ell(\varphi)=\mathrm{sgn}(\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/e_\ell-1)$ $=\sqrt{\mathrm{sgn}(\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/e_\ell-1)}$ と表現され，第4章でのパターン $\varphi\in\Phi$ の適応的2値近似モデル $\mathfrak{Y}(\varphi)$ は次の様に再表現される：

$\mathfrak{Y}(\varphi)\equiv\Sigma_{\ell\in L} y_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$
$=\Sigma_{\ell\in L}\sqrt{\mathrm{sgn}(\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/e_\ell-1)}\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1}$ □

この形式を勘案して，

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\equiv\Sigma_{\ell\in L} w_\ell(\varphi)\cdot\theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1},\\ \text{ここに，} w_\ell(\varphi)=\sqrt{\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell}\end{array}\right\}$$

という写像 $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\cdot):\Phi\to\Phi$ を導入しよう。この写像 $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\cdot)$ には，3条件

(i) $\xi\in\mathfrak{D}(f(H))$
(ii) $\forall\ell\in L,\ 0<u_\ell,\ \sup_{\ell\in L}\frac{1}{u_\ell}<\infty$
(iii) $0<\mathfrak{F}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})/u_\ell=\mathrm{Const.}$ ($\ell\in L$に無関係な定数)

が課せられているものとする。

このとき，特徴量 $\mathfrak{F}_\ell(\varphi)$ をパターン φ の知覚をもたらす刺激量と考えると，重み $w_\ell(\varphi)$ 内の $1/u_\ell$ は第 $\ell\in L$ 番目の刺激感度（stimulus sensitivity value）とみなされるもので，適応的に決定され得るものであり，この意味で，$\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\in\Phi$ をパターン $\varphi\in\Phi$ の適応的連続近似モデルという。

［補助定理6.1］[9]
条件iiの下で，$\varphi\in\mathfrak{D}(f(H))$ ならば，
$\Sigma_{\ell\in L}\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell<\infty$.　□

［補助定理6.2］[9] 条件iの下で，
$\|f(H)\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\|^2=\Sigma_{\ell\in L}[\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell]\cdot\|\theta_\ell(H)f(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$.　□

上の二つの補定6.1, 6.2から次の定理6.3が成り立つ．

［定理6.3］[9]　2条件 i，ii の下で，
$\varphi\in\mathfrak{D}(f(H))\Rightarrow\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\in\mathfrak{D}(f(H))$.

（証明）条件 i の下で，
$\|\theta_\ell(H)f(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2\leqq\|f(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2<\infty$
が成り立ち，よって，補助定理6.2を適用して，
$\|f(H)\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\|^2\leqq[\Sigma_{\ell\in L}\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell]\cdot\|f(H)\xi\|\xi\|^{-1}\|^2$
という不等式が成立するが，この右辺は有限であることは補定6.1より明然である．□

［補助定理6.4］[9] 2条件 i，ii の下で，
$\mathfrak{F}_\ell(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))/u_\ell$
$=[\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell]\cdot[\mathfrak{F}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})/u_\ell]/\|\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\|^2, \ell\in L$.
□

上の補定6.4を適用すれば，次の補定6.5が証明される。

［補助定理6.5］　3条件 i，ii，iii の下で，
$\forall\ell\in L, [\mathfrak{F}_\ell(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))/u_\ell]/\Sigma_{k\in L}\mathfrak{F}_k(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))/u_k$
$=[\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell]/\Sigma_{k\in L}\mathfrak{F}_k(\varphi)/u_k$.

（証明）　補定6.4を適用すれば，2条件 i，ii の下で，
$[\mathfrak{F}_\ell(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))/u_\ell]/\Sigma_{k\in L}\mathfrak{F}_k(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))/u_k$
$=[(\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell)\cdot(\mathfrak{F}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})/u_\ell)]$
$/\Sigma_{k\in L}(\mathfrak{F}_k(\varphi)/u_k)\cdot(\mathfrak{F}_k(\xi\|\xi\|^{-1})/u_k)$
が成り立ち，ここで，条件iiiを考慮すれば，
$=[\mathfrak{F}_\ell(\varphi)/u_\ell]/\Sigma_{k\in L}\mathfrak{F}_k(\varphi)/u_k$.　□

［定理6.6］（連続特徴量再現モデル定理）
$\varphi\in\mathfrak{D}(f(H))$ とする。3条件 i，ii，iii の下で，
$\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\in\mathfrak{D}(f(H))\wedge[\forall\ell\in L, w_\ell(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)))=w_\ell(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))]$，よって，$\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)))=\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi))$.

（証明）$\mathfrak{W}\mathfrak{Z}(\varphi)\in\mathfrak{D}(f(H))$ は定理6.3で示されている。

また，補定6.5によれば，

$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(\mathfrak{W}(\varphi))/u_\ell = [[\Sigma_{k \in L}\mathfrak{J}_k(\mathfrak{W}(\varphi))/u_k] / [\Sigma_{k \in L}\mathfrak{J}_k(\varphi)/u_k]] \cdot \mathfrak{J}_\ell(\varphi)/u_\ell$

を得て，

$\mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi)) = \sqrt{(\Sigma_{k \in L}\mathfrak{J}_k(\mathfrak{W}(\varphi))/u_k)/\Sigma_{k \in L}\mathfrak{J}_k(\varphi)/u_k} \cdot \mathfrak{W}(\varphi)$

が成り立つ。よって，

$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(\mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi)))/u_\ell = \mathfrak{J}_\ell(\mathfrak{W}(\varphi))/u_\ell$

を得て，証明された．　□

［定理6.7］（適応的連続値近似モデルの収縮写像定理）　3条件 i，ii，iii の下で，

$T\varphi = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi))$

と定義されたTはaxiom1を満たし，収縮写像である。

（証明）　Axiom1の i～iv の成立を確かめる．

i の成立：　$\varphi = 0$ とすれば，$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(\varphi) = 0$ を得て，$\forall \ell \in L,\ w_\ell(\varphi) = 0\ \therefore \mathfrak{W}(\varphi) = 0$，つまり $\mathfrak{W}(0) = 0$ が成立し，$T\varphi = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi)) = \mathfrak{W}(0) = 0$

ii の成立：　a を非零複素定数とすると，$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(a\varphi) = \mathfrak{J}_\ell(\varphi)$ を得，$\forall \ell \in L,\ w_\ell(a\varphi) = w_\ell(\varphi)\ \therefore \mathfrak{W}(a\varphi) = \mathfrak{W}(\varphi)$ が成立し，よって，$T(a\varphi) = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(a\varphi)) = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi)) = T\varphi$.

iii の成立：　定理6.6を適用すると，

$\forall \varphi \in D(\mathfrak{f}(H)),\ \mathfrak{W}^3(\varphi) = \mathfrak{W}^2(\varphi)\ \therefore \mathfrak{W}^4(\varphi) = \mathfrak{W}^2(\varphi)$ を得る。ここに，$\mathfrak{W}^k(\varphi)$ は $\mathfrak{W}$ を φ に k 回作用させて得られる結果を表わしている。

よって，$T(T\varphi) = T\varphi$ が成立する。

iv の成立：　$\varphi = \xi\|\xi\|^{-1}$ とおく。

条件 iii つまり，$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})/u_\ell = c$（$\ell \in L$ に無関係な定数）> 0 より $w_\ell(\varphi) = \sqrt{c} > 0$ が知れ，

$\mathfrak{W}(\varphi) = \sqrt{c} \cdot \Sigma_{\ell \in L}\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1} = \sqrt{c} \cdot \xi\|\xi\|^{-1}$

を得て，

$\forall \ell \in L,\ \mathfrak{J}_\ell(\mathfrak{W}(\varphi))/u_\ell = \mathfrak{J}_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})/u_\ell$

$\therefore w_\ell(\mathfrak{W}(\varphi)) = w_\ell(\xi\|\xi\|^{-1})$

$\therefore T\varphi = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi)) = \mathfrak{W}(\xi\|\xi\|^{-1}) = \sqrt{c} \cdot \xi\|\xi\|^{-1} \neq 0.$　□

7.むすび

パターン認識の数学的理論[1]では，入力パターンから特徴抽出するとは，比較的少数個のプリミティブパターン（素パターン，原始パターン）を用い，誤識別が生じない程度に質が落とされた形式で，入力パターンの，他のパターンから眺めた構造的類似性（structural similarities），構造的相違性（structural differences）を再現することをいう[2],[6]～[9]。この再現されたパターンを対応する入力パターンのモデルといった訳である。

Axiom1を満たす収縮写像Tを入力パターン $\varphi \in \Phi$ に作用させて得られるパターン $T\varphi$ がもとの入力パターン φ のモデル（収縮写像近似モデル）ということになるが，本研究ではパターン φ と構造的な類似性を備えたモデルとして，4種類の収縮写像近似モデル

$\mathfrak{X}(\varphi),\ \mathfrak{Y}(\varphi),\ \mathfrak{Z}(\varphi)\|\mathfrak{Z}(\varphi)\|^{-1},\ \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi))$

を提案した。この内，二つの適応モデル $\mathfrak{Y}(\varphi)$，$\mathfrak{W}(\mathfrak{W}(\varphi))$ にはパターン φ と構造が異なるパターンから眺めた構造的相違性を，自己組織化プロセスの介入の下で反映させることができる。

この4種類のモデルは，パターンを記憶するときの基本単位（素パターン）の集合 $\{\Theta_\ell(H)\xi\|\xi\|^{-1} \mid \ell \in L\}$ からパターン $\varphi \in \Phi$ を眺めた構造を反映したモデル（構造モデル）であり，パターン認識の数学的理論の枠組の中で，ニューラルネットワーク情報処理を実現するのに基本的に用いられる。後続の諸研究では，この事実が明らかにされるであろう。

なお，次の2つの節が紙面の都合上割愛された。

7. 写像 $\mathfrak{W}(\cdot)$：$\Phi \Rightarrow \Phi$ の一意性，ユニタリ不変性，完全性

8. 4種類の写像 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{W}$ の間の関係．

文献 (1) 鈴木昇一：パターン認識の数学的理論，第Ⅰ部(PRL84-6, pp.1-10, 1984-05), …, 第XIV部(線形帰属係数法と諸基本定理, PRU89-66, pp.1-8, 1989-11)
電子（情報）通信学会技術研究報告［パターン認識と学習，パターン認識・理解，人工知能と知識処理］
(2) 鈴木昇一：認識工学(上)，柏書房(1975-02)
(3) 鈴木昇一：収縮写像に関する一考察，情報研究(文教大学・情報学部), Vol.6, pp.19-30(1985-12)
(4) 鈴木昇一：認識プログラムFERTのリスト論的形式体系における表現，同上, Vol.8, pp.1-12(1987-12)
(5) 鈴木昇一：収縮写像の構成用空間回路とその計算機シミュレーション，同上, Vol.9, pp.17-28(1988-12)
(6) 鈴木昇一：パターン情報処理における構造化パターン，最良近似構造化パターンと簡約構造モデル，同上, Vol.2, pp.13-31(1981-12)
(7) 鈴木昇一：測度的…，電子通信学会論文誌, Vol.55-D, No.8, pp.531-538(1972-08)
(8) 鈴木昇一：抽出された特徴による手書き漢字構造の再生，情報処理, Vol.18, No.11, pp.1115-1122(1977-11)
(9) 鈴木昇一：パターン認識における構造化モデル…，電子通信学会論文誌, Vol.60-D, No.9, pp.710-717(1977-09)
(10) 鈴木昇一：特徴量としての測度的ユニタリ不変量…，電子通信学会論文誌, Vol.59-D, No.9, pp.678-680(1976-09)

（了）