グラフィクスとＣＡＤ　47－5
（１９９０．１０．１９）

フラクタルをめぐるグラフィックス

京都大学教養部　宇敷重広

フラクタル集合などの数学的対象を、ＣＧを通じて可視化するいくつかの手法とその効果について述べる。

Fractals and Computer Graphics

Shigehiro Ushiki
Institute of Mathematics
Yoshida College
Kyoto University

Some methods for the visualisation of mathematical objects as fractal sets are explained.

フラクタル集合という名で呼ばれている不思議で奇妙な図形を見たことがあるでしょうか。ＩＢＭのベノワ・マンデルブローがその著書「フラクタル幾何学」においてフラクタルという言葉を創り出して、最近よく話題になるものです。

フラクタルという言葉で、マンデルブローは、きっちりとした整数でない半端な次元をもつ集合を表そうとしたのですが、彼はこの言葉で、同時に、なにか破片になった砕けたもの、あるいは、ざらざらしたもの、ギザギザしたもの、といったものをあらわしたかったそうです。そのため、数学的にはっきりと定義できる、整数でない次元をもつもの、というだけの定義では飽き足りなくて、現在でもフラクタルの定義はやや曖昧なままです。

彼が発見した様々なものの内で、とくに、複素数の力学系から派生するものは、我々の想像をはるかに超えた形態を見せてくれます。マンデルブロー集合という名前で呼ばれている、複素平面に含まれる閉集合は簡単なアルゴリズムでも計算でき、プログラムが簡単な割には非常に複雑でおもしろい図形が得られるので、コンピュータのデモに使われたり、コンピュータ・ホビイストの格好の題材となっています。

さて、私たち数学を専門とするものにとって、なかなか手計算では思うように様子を予想することができないものでも、コンピュータの力を借りて、研究の助けとすることができるようになってきています。

ただし、研究の必要から、計算機実験として行うだけなら、必ずしも高級なグラフィックスは必要ありません。高解像度は必要ですが、苦労してフルカラーの画像にする理由はありません。数学的対象には本来色は付いていません。

しかし、工夫を凝らして、うまく可視化すれば、直観的に分かりやすくなりますし、不思議な図形を目の当りにした感動は、自然と新しい研究意欲を引き出すものです。

マンデルブロー集合については、ドゥアディによるポテンシャル関数をつかって立体的な図形とし表示することができます。これには、H. －O. パイトゲンとD. ザウペが成功しました。D. ザウペは、ジュリア集合についても、ポテンシャル関数の計算に成功しています。

このようにうまくポテンシャル関数をみつければ、それを使って、色彩をマップしたり、立体的な表示を与えたりすることができます。

とくにジュリア集合については、超吸引的な周期点を持つ場合、こうしたポテンシャル関数をうまく定義することができます。

また、不動点や周期点が放物型と呼ばれるばあいにも、ファトゥーの調和関数を計算することで、立体的な表示、あるいは連続的な階調を与えることができます。

吸引的周期点がそのいずれの場合にも該当しない場合には、やはり極を持った調和関数を定義することができますが、極の数が無限になります。

ジーゲル・ディスクの場合と、エルマン・リングの場合には、調和関数は退化して、線形なものとなりますので、工夫して人工的な関数を合成します。