

不規則な有理曲線メッシュの G^1 曲面補間方法

高村 禎二¹, 今野 晃市¹, 原田 毅士¹, 千代倉 弘明²

¹ (株) リコー ソフトウェア事業部

² 慶応義塾大学 環境情報学部

CAD を用いて自由曲面を持つ形状を作成するとき、曲線メッシュを用いる方法がよくとられる。このとき、不規則な形状を持った面が生成されることがある。その上、メッシュの曲線は有理曲線を用いて正確に円錐曲線などを表したいこともある。不規則な有理曲線メッシュを有理境界 Gregory パッチを用いて滑らかに内挿する方法を示し、生成された曲面形状を制御する方法も合わせて示す。

G^1 Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves

¹Teiji Takamura, ¹Kouichi Konno, ¹Tsuyoshi Harada, and ²Hiroaki Chiyokura

¹ Ricoh Company, LTD., Software Research Center

²Keio University, Faculty of Environmental Information

¹ 1-17, Koishikawa 1-Chome, Bunkyo-ku Tokyo, 112, Japan

² 5322 Endoh, Fujisawa, Kanagawa-ken, 252, Japan

When complex shapes with curved surfaces are designed on the computer, curve meshes are used to describe the outline of the shape. The meshes often have irregular topology. In addition, the curves in the mesh are represented by rational curves because the rational curve can include a conic section. In this paper, we propose a method of free-form surface generation over irregular rational curve meshes. In this method, Rational Boundary Gregory patches with tangent plane continuity are generated. We also propose a control method of generated surface shapes.

1 はじめに

近年 3 次元の CAD/CAM システムを用いて複雑な形状を持った工業製品が設計されるようになってきた。これらの製品は単に機能を果たすだけでなく、デザイン的にも特徴を持たせ他の製品と差別化をはかっている。その 1 つの傾向として、自由曲面を持った形状が多く作られている。このため、より柔軟に曲面形状を設計できる CAD システムが必要とされている。自由曲面を表す表現式は多く提案されているが[5]、その中でも NURBS (non-uniform rational B-spline) が標準となってきた。NURBS を用いることによって、制御点から曲面形状を設計することができ、また、円柱・円錐・球などの二次曲面を正確に表せるという利点も持っている。しかし、設計しようとする形状と手順によっては、曲面の境界曲線を直接変形しようと思うかもしれないし、曲線を任意の位置に加えたり、削除したりしたいと思うこともあるだろう。この変形によって、三角形や五角形の面のような不規則な位相を持った面ができることがある。また、機械設計ではよくでてくる円錐曲線を正確に表すことのできる有理曲線ができることもある。このような変形は NURBS を用いた場合非常に難しくなる。

このような不規則な曲線メッシュを内挿する方法はいくつか提案されているが[1,2,12]、これらの方法はメッシュの曲線が多項式曲線に限定されている。これを、有理曲線を含む不規則な曲線メッシュを滑らかに接続するように曲面を内挿する方法も提案された[4]。ここでは、この方法を紹介し、さらに今野らが示した曲面形状の制御方法[8]を適用することによって、曲面形状を制御する方法を示す。

2 有理曲線メッシュの内挿

2.1 有理曲線メッシュ内挿の問題点

千代倉と木村は Bézier パッチに対して Gregory の方法[7]を適用して、Bézier 曲線からなる曲線メッシュを内挿する方法を提案し[1]、このパッチを Gregory パッチと呼んだ。このパッチを使うことにより、図 1 のような不規則なメッシュの内挿も可能になった。図 1 はノード V_1 で 3 つの面が合わさり、面 F_1 は非四辺形になっており、ノード V_2 のところで T 字型になっているような曲線メッシュである。しかし、彼らの方法はメッシュの曲線は多項式曲線でなければならないという制限がある。

有理 Bézier パッチを用いて有理曲線メッシュを内挿することを考えた場合、パッチの境界を横切る方向の導関数(境界横断導関数)をツイストを考慮せずに指示できないという問題点の他に、境界横断導関数の式が複雑になり、曲面の接続の手続きが複雑になるという問題点もある。この

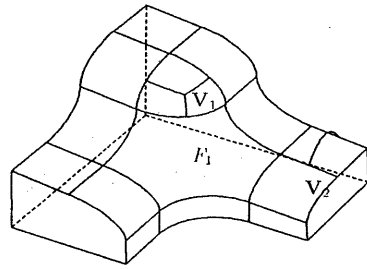


図 1: 不規則なメッシュ。

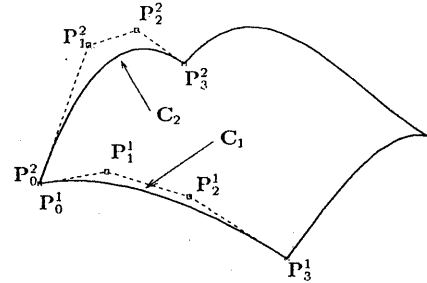


図 2: 有理 Bézier パッチとその境界。

問題を解くために、千代倉らは有理 Bézier パッチに対して新しい補正方法を適用し[4]、この修正されたパッチを有理境界 Gregory パッチ(RBG パッチ)と呼んでいる。

2.2 有理境界 Gregory パッチ式

RBG パッチはパッチ同士を G^1 連続に接続することが簡単にでき、また、Gregory パッチや 2 次曲面にも滑らかに接続することが可能である。

双 n 次 RBG パッチについて考えてみる。このパッチは $(n+1)^2 + 16$ 個の制御点 $P_{i,j,k}$ ($i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n, k = 0, 1$) とその重み $w_{i,j,k}$ によって定義されている。ただし、 $i, j \neq 0, 1, n-1, n$ のときの制御点と重みは $k = 0, 1$ で一致している。また、境界線上の $i, j = 0, 1, n-1, n$ のときの制御点も $k = 0, 1$ で一致している。双 3 次 RBG パッチの制御点の例を図 3 に示す。双 n 次 RBG パッチ式は、

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) Q_{i,j}(u, v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) w_{i,j}(u, v)}$$

となる。ここで、

- $i = 0, 1$ かつ $j = 0, 1$ のとき、

$$Q_{i,j}(u, v) = \frac{u^2 P_{i,j,0} w_{i,j,0} + v^2 P_{i,j,1} w_{i,j,1}}{u^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j,0} + v^2 w_{i,j,1}}{u^2 + v^2}$$

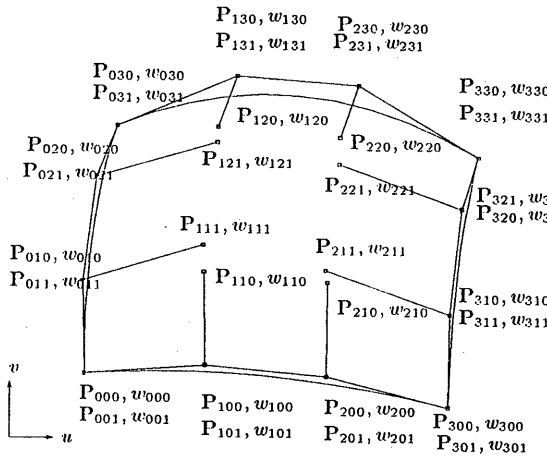


図 3: 双 3 次有理境界 Gregory パッチ.

- $i = n - 1, n$ かつ $j = 0, 1$ のとき,

$$Q_{i,j}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{i,j,0} w_{i,j,0} + v^2 P_{i,j,1} w_{i,j,1}}{(1-u)^2 + v^2},$$

$$w_{i,j}(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j,0} + v^2 w_{i,j,1}}{(1-u)^2 + v^2}$$

- $i = 0, 1$ かつ $j = n - 1, n$ のとき,

$$Q_{i,j}(u, v) = \frac{u^2 P_{i,j,0} w_{i,j,0} + (1-v)^2 P_{i,j,1} w_{i,j,1}}{u^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}(u, v) = \frac{u^2 w_{i,j,0} + (1-v)^2 w_{i,j,1}}{u^2 + (1-v)^2}$$

- $i = n - 1, n$ かつ $j = n - 1, n$ のとき,

$$Q_{i,j}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{i,j,0} w_{i,j,0} + (1-v)^2 P_{i,j,1} w_{i,j,1}}{(1-u)^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{i,j}(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{i,j,0} + (1-v)^2 w_{i,j,1}}{(1-u)^2 + (1-v)^2}$$

- それ以外のとき,

$$Q_{i,j}(u, v) = P_{i,j,0} w_{i,j,0} = P_{i,j,1} w_{i,j,1}$$

$$w_{i,j}(u, v) = w_{i,j,0} = w_{i,j,1}$$

さらに, 重みが次の条件式によって拘束されている.

$$w_{i,0,0} = w_{i,1,0}, w_{i,n-1,0} = w_{i,n,0} \quad (i = 0, 1, n-1, n)$$

$$w_{0,j,1} = w_{1,j,1}, w_{n-1,j,1} = w_{n,j,1} \quad (j = 0, 1, n-1, n)$$

RBG パッチのこれらの特別な条件は G^1 連続条件を満たすために必要である. RBG パッチ上の点の座標値は有理 Bézier パッチと同じように計算できる. ただし, 有理 Bézier パッチの $Q_{i,j}(u, v)$ と $w_{i,j}(u, v)$ は固定されているのに対

し, パラメーター値 u, v の値が変わるにつれて, RBG パッチの $Q_{i,j}(u, v)$ は移動するし, $w_{i,j}(u, v)$ は値が変わる. たとえば, $Q_{1,1}(u, v)$ は 2 点 $w_{1,1,0} P_{1,1,0}$ と $w_{1,1,1} P_{1,1,1}$ を通る線分の上を移動する. もし, 曲面上の点が曲線 $S(u, 0)$ 上にあるときは, $Q_{1,1}(u, v) = w_{1,1,0} P_{1,1,0}$ であり, 曲線 $S(0, v)$ 上にあるときは, $Q_{1,1}(u, v) = w_{1,1,1} P_{1,1,1}$ である. この例では, $w_{0,0}(u, v)$ は $w_{0,0,0}$ と $w_{0,0,1}$ の間を変化する. 重み $w_{0,0,0}$ は曲線 $S(u, 0)$ を定義するときに使われ, 重み $w_{0,0,1}$ は曲線 $S(0, v)$ を定義するときに使われる.

2.3 有理境界 Gregory パッチの特徴

RBG パッチは次の特徴を持っている.

1. 境界横断導関数は簡単な有理関数として定義される. 境界が有理 3 次曲線るとき, 導関数も 3 次有理関数になる. 導関数を

$$\left. \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = S_v(u, 0)$$

と表すと, 境界横断導関数は,

$$S_v(u, 0) = \frac{3 \sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,0,0} (P_{i,1,0} - P_{i,0,0})}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_{i,0,0}},$$

のように簡単な関数になるので, パッチを滑らかに接続することが簡単にできる.

2. パッチ式で示したように, パッチのコーナーは 2 つの制御点と重みによって定義されている. たとえば, パッチのコーナー $S(0, 0)$ には 2 つの制御点 $P_{0,0,0}$ と $P_{0,0,1}$ および, それらの重み $w_{0,0,0}$ と $w_{0,0,1}$ がある. $P_{0,0,0}$ と $w_{0,0,0}$ は曲線 $S(u, 0)$ を定義する際に使われ, $P_{0,0,1}$ と $w_{0,0,1}$ は曲線 $S(0, v)$ を定義する際に使われる. 2 つの曲線は次の式

$$S(u, 0) = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) w_{i,0,0} P_{i,0,0}}{\sum_{i=0}^n B_i^n(u) w_{i,0,0}},$$

$$S(0, v) = \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{0,j,1} P_{0,j,1}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{0,j,1}}$$

によって定義される. したがって, 1 つの曲線の端点の重みを変えることにより, 他の境界曲線の形状を変えることなく 1 つの曲線形状の形状のみを変えることができる.

3. RBG パッチの特別な場合が有理 Bézier パッチになる. つまり, $P_{i,j,0} = P_{i,j,1}$ かつ $w_{i,j,0} = w_{i,j,1}$ のとき, RBG パッチは有理 Bézier パッチと等しくなる. そこで, RBG パッチは円錐のような 2 次曲面を正確に表すことができる.

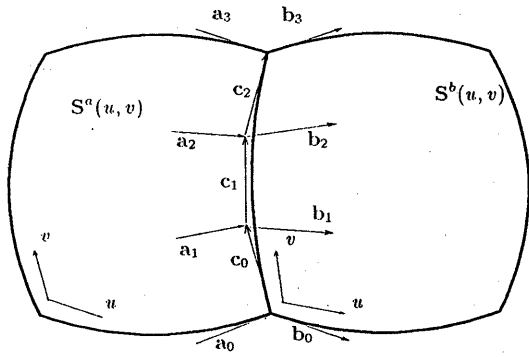


図 4: RBG パッチの接続.

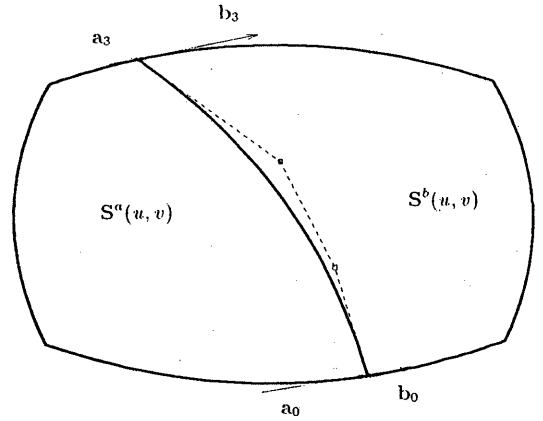


図 5: a_0 と b_0 および a_3 と b_3 が同一直線上にある場合.

- RBG パッチは凸包性を持っており、もしすべての重みが 0 以上ならば、パッチ上のどの点も、全制御点からなる凸包の中に含まれる。
- RBG パッチは正確に NURBS 表現に変換できる[11]. NURBS は IGES でもサポートされている標準的な曲面であり、有理境界 Gregory パッチデータを他の CAD システムへ NURBS に変換することによって、転送できる。

3 有理境界 Gregory パッチの G^1 連続接続

本節では RBG パッチを G^1 連続条件を満たすように接続する方法を説明する。図 4 は 2 つのパッチ $S^a(u, v)$ と $S^b(u, v)$ が接続されるようすを示している。図 4 で示されたベクトルは

$$a_i = P_{3,i,1}^a - P_{2,i,1}^a, \quad i = 0, \dots, 3$$

$$b_i = P_{1,i,1}^b - P_{0,i,1}^b, \quad i = 0, \dots, 3$$

$$c_i = P_{3,i+1,1}^a - P_{3,i,1}^a = P_{0,i+1,1}^b - P_{0,i,1}^b, \quad i = 0, 1, 2$$

によって定義されている。ここで、 $P_{i,j,k}^a$ と $P_{i,j,k}^b$ はそれぞれの曲面の制御点である。また、 $w_{i,j,k}^a$ と $w_{i,j,k}^b$ は曲面 S^a と S^b の重みである。これらのベクトルは曲面の境界上の導関数を表している。ここで、3 つの異なる場合についての接続方法を説明する。

場合 1 2 曲面間の境界曲線が非有理 Bézier 曲線で、他の境界曲線に有理曲線を持つとき。

RBG パッチの境界に沿った 2 つの導関数は多項式関数であらわされる。したがって、Gregory パッチの接続 [3] と同じ方法が適用できる。この方法を用いて、RBG パッチと Gregory パッチの G^1 連続接続も同様にできる。

場合 2 2 曲面間の境界曲線が 3 次曲線で、2 ベクトル b_0, a_0 および b_3, a_3 がそれぞれ同一直線上にあるとき(図 5 参照)。

この条件は

$$b_0 = k_0 a_0 \quad \text{かつ} \quad b_3 = k_1 a_3$$

と表せる。定数 k_0 と k_1 は境界曲線が既にわかっているの、容易に計算できる。2 曲面の G^1 連続条件は、

$$S_u^b(0, v) = k(v) S_u^a(1, v)$$

と表せる。ここで、 $k(v)$ はスカラー関数である。したがって、

$$\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) w_i b_i = k(v) \sum_{i=0}^3 B_i^3(v) w_i a_i \quad (1)$$

となる。ここで、

$$w_i = w_{3,i,1}^a = w_{0,i,1}^b$$

である。 a_i と b_i の関係を得るために、 $k(v)$ を

$$k(v) = k_0(1-v) + k_1 v$$

と指定する。式(1)で $\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) w_i a_i$ が 3 次なら、 $\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) w_i b_i$ は 4 次になってしまうので、 $\sum_{i=0}^3 B_i^3(v) w_i a_i$ を $w_0 a_0, q, w_3 a_3$ によって定義された 2 次関数として定義する。すると、

$$a_1 = (2q + w_0 a_0)/3w_1,$$

$$a_2 = (2q + w_3 a_3)/3w_2$$

となる。すると、上式より、

$$b_1 = (2k_0 q + k_1 w_0 a_0)/3w_1, \quad (2)$$

$$b_2 = (2k_1 q + k_0 w_3 a_3)/3w_2$$

を得る。

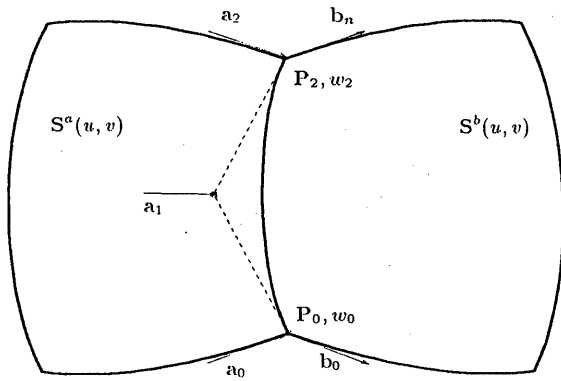


図 6: 境界曲線が有理 2 次曲線のとき.

場合 3 2 曲面間の境界曲線が有理 2 次曲線のとき(図 6 参照).

2 曲面の G^1 連続条件は,

$$S_u^b(0, v) = k(v)S_u^a(1, v) + h(v)S_v^a(1, v) \quad (3)$$

で表される。ここで、 $k(v), h(v)$ はスカラー関数である。2 曲面の境界曲線は有理 2 次曲線なので、曲面 S^a の境界横断導関数は 3 つのベクトル a_0, a_1, a_2 と重み w_0, w_1, w_2 によって定義される。したがって、上式は

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(v)w_i^b b_i = k(v) \sum_{i=0}^2 B_i^2(v)w_i a_i + h(v) \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(v)d_i}{\sum_{i=0}^2 B_i^2(v)w_i} \quad \text{を得る。}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} d_0 &= w_0 w_1 (P_1 - P_0) \\ d_1 &= (w_0 w_1 (P_1 - P_0) + w_0 w_2 (P_2 - P_0))/3 \\ d_2 &= (w_0 w_2 (P_2 - P_0) + w_1 w_2 (P_2 - P_1))/3 \\ d_3 &= w_1 w_2 (P_2 - P_1) \end{aligned} \quad (4)$$

である。 P_0, P_1, P_2 は境界曲線の制御点で、 w_0, w_1, w_2 はその重みであり、 w_i^b は b_i に対応する重みである。

a_i, b_i の関係を得るために、 $k(v), h(v)$ を、

$$\begin{aligned} k(v) &= k_0(1-v) + k_1 v, \\ h(v) &= (h_0(1-v) + h_1 v) \sum_{i=0}^2 B_i^2(v)w_i \end{aligned}$$

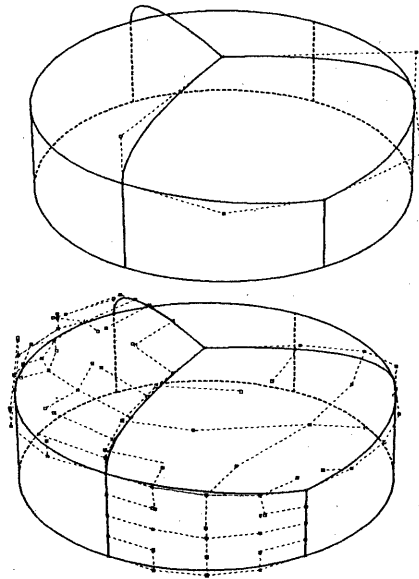


図 7: 場合 3 のときの RBG パッチの制御点.

と置く。この結果、式(3)の左辺は v の 4 次式になる。そして、

$$\begin{aligned} b_1 &= ((k_0 + k_1)w_0 a_0 + 2k_0 w_1 a_1 + h_1 d_0 + 3h_0 d_1)/4w_1^b \\ b_2 &= (k_1 w_0 a_0 + 4(k_0 + k_1)w_1 a_1 + k_0 w_2 a_2 + 3h_1 d_1 + 3h_0 d_2)/6w_2^b \\ b_3 &= (2k_1 w_1 a_1 + (k_0 + k_1)w_2 a_2 + 3h_1 d_2 + h_0 d_3)/4w_3^b \end{aligned} \quad (5)$$

これらの関係式を利用することによって、境界曲線に沿った G^1 連続な曲面が生成できる。図 7 はこの場合の例を示している。

2 曲面間の境界曲線が有理 n 次曲線のときも、同様にして解くことができるが、 $2n$ 次の曲面が必要となる。

4 有理境界 Gregory パッチの生成

図 8 に RBG パッチの生成過程を示している。この図で、面 F_1 は稜線 E_1, \dots, E_5 に囲まれており、 F_1 は E_6, \dots, E_{14} につながっている。曲面の生成過程は 3 つの過程からなっている。

Phase-1 各稜線に対する境界横断導関数 $g_i(t) (0 \leq t \leq 1; i = 1, \dots, 4)$ は、有理 Bézier 関数:

$$g_i(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_i^2(t)w_i a_i}{\sum_{i=0}^2 B_i^2(t)w_i}$$

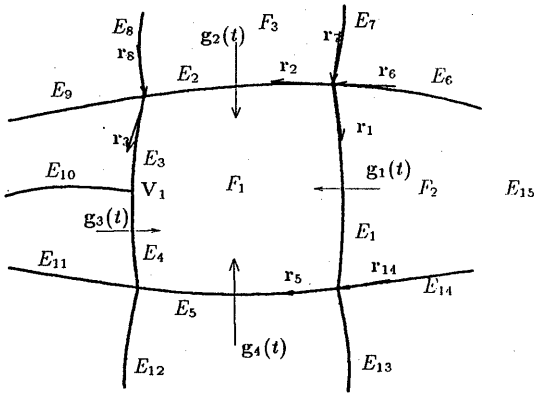


図 8: RBG パッチの生成.

で表されている。ここで、 w_i は有理境界曲線の重みと同じものである。面 F_1 と F_2 の間の境界稜線 E_1 を見てみると、稜線 E_2, E_5, E_6, E_{14} につながっており、それぞれの端点における単位接線ベクトルとして、 r_2, r_5, r_6, r_{14} を持つ。図 8 において、 $r_5 = r_{14}$ 、 $r_{12} = r_6$ である。このとき、 $g_1(t)$ において、 $a_0 = r_5$ かつ $a_2 = r_2$ なので、 $g_1(t)$ の分子は線型に定義できる。言い換えれば、分子に 2 次関数を与えることができる。

次に面 F_1 と F_3 の間の境界稜線 E_2 に注目してみる。 E_2 につながっている 4 曲線の接ベクトルは同じ直線上にはない。 $a_0 = (r_7 + r_1)/|r_7 + r_1|$ 、 $a_2 = (r_8 + r_3)/|r_8 + r_3|$ と置き、 $a_1 = (a_0 + a_2)/2$ とすればよい。

図 8 で、稜線 E_3 と E_4 は E_{10} の頂点 V_1 のところでつながっている。稜線 E_3 と E_4 をまとめて 1 つの曲線 E_{34} で表現できると仮定する。すると、 $g_3(t)$ の分子を、 $g_3(t)$ が稜線 E_{10} の V_1 における接線と同じ方向を持つようにできる。 V_1 の稜線 E_{34} におけるパラメータ値を t_0 、稜線 E_{10} の単位接線ベクトルを a 重みを w_1 とすると、

$$a_1 = \frac{a - (B_0^2(t_0)w_0a_0 + B_2^2(t_0)w_2a_2)}{B_1^2(t_0)w_1} \quad (6)$$

とすればよい。

Phase-2 境界横断導関数は式 (2), (4) において、曲面 S^a の導関数として与えられる。次に、稜線に沿った F_1 の導関数を定義している制御点が計算できる。図 8 で示したように、式 (2) は稜線 E_1, E_3, E_4 で使われ、式 (4) は稜線 E_2 で使われている。曲面の導関数と曲線が 2 次なら、3 次に次数上げされる。また、面上に生成された曲面の次数が 3 次で境界曲線の数が 4 なら、曲面のすべての制御点が決定できる。しかし、次数が

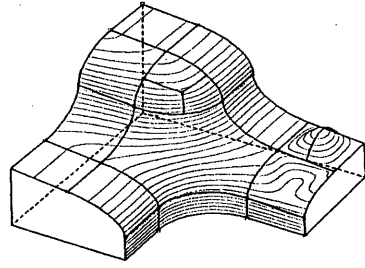


図 9: 不規則なメッシュに生成された RBG パッチとその等高線。

4 次以上なら、曲面内部のいくつかの制御点は決められない。これらの点は双 3 次 Coons プレンディングを使って決定できる[6]。

Phase-3 面が非四辺形面の場合は、幾つかの四辺形面に分割され、RBG パッチが各面に生成される。面を四辺形面に分割するときには、非有理曲線を内部に生成することによって高次の曲面が生成されないようにする。図 1 の不規則なメッシュに生成された RBG パッチに等高線を描いたものを図 9 に示す。なお、この図で、ほとんどの曲線は有理曲線である。

5 有理境界 Gregory パッチの制御

前節で述べた RBG パッチの生成法では、各面を内挿するパッチが自動的に生成された。しかし、場合によって曲面間の接続を保ったまま曲面の形状を制御したいことがある。今野らは Gregory パッチについて制御方法を提案したが[8]、この方法は RBG パッチにも適用できる。

[8]では曲面の境界線上において導関数を指定することによって、曲面の形状を制御する。つまり、図 10 に示したようにパラメータ v_0 において、2 曲面の境界曲線上で境界線を横切る方向に p, q 2 つのベクトルを、境界線に沿う方向にベクトル r を指定するものとする。この 3 つのベクトルが同一平面上にあるとき 2 曲面が G^1 連続になるような接続を考える。パラメータ v_0, p, q の向きは任意に与えられるので、この接続を考えることで、2 曲面 G^1 接続を保ったまま曲面の形状の制御ができる。 p, q, r は n を生成されるパッチの次数とすると、

$$p = \frac{\partial S^b(0, v_0)}{\partial u}, q = \frac{\partial S^a(1, v_0)}{\partial u}, r = \frac{\partial S^a(1, v_0)}{\partial v}$$

とする。 v_0 は p, q, r が指定された境界曲線上のパラメータ値とする。このとき、 a_1 は

$$a_1 = \frac{\frac{p+q}{p+q} - (B_0^2(v_0)w_0a_0 + B_2^2(v_0)w_2a_2)}{B_1^2(v_0)w_1} \quad (7)$$

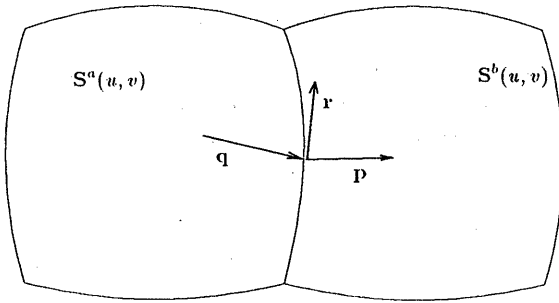


図 10: ベクトルの指定.

となる. このとき, G^1 連続の式 (3) は

$$p = k(v_0) \frac{p+q}{|p+q|} + h(v_0)r \quad (8)$$

となる. p, q は長さも含めて指定されているから, 関数 $k(v), h(v)$ は 2 次になる. $k(v), h(v)$ を次のようにおく.

$$k(v) = k_0(1-v)^2 + 2k_1(1-v)v + k_2v^2 \quad (9)$$

$$h(v) = h_0(1-v)^2 + 2h_1(1-v)v + h_2v^2 \quad (10)$$

ただし, $k_0, k_1, k_2, h_0, h_1, h_2$ は実数とする. $v=0, v=1$ のときの G^1 連続の条件から, k_0, k_2, h_0, h_1 を求めることができる. また, 式 (8), (9), (10) より,

$$k_1 = \frac{k(v_0) - (B_0^2(v_0)k_0 + B_2^2(v_0)k_2)}{B_1^2(v_0)} \quad (11)$$

$$h_1 = \frac{h(v_0) - (B_0^2(v_0)h_0 + B_2^2(v_0)h_2)}{B_1^2(v_0)} \quad (12)$$

を得る. これから, 式 (8) を解くことができる. たとえば, 境界曲線の次数が 2 のときの接続の条件は, 式 (4) を用いて,

$$b_1 = (3k_0w_1a_1 + 2k_1w_0a_0 + 3h_0d_1 + 2h_1d_0)/5w_1^b$$

$$b_2 = (3k_0w_2a_2 + 6k_1w_1a_1 + k_2w_2a_2 + 3h_0d_2 + 6h_1d_1 + h_2d_0)/10w_2^b$$

$$b_3 = (k_0w_3a_3 + 6k_1w_2a_2 + 3k_2w_1a_1 + h_0d_3 + 6h_1d_2 + 3h_2d_1)/10w_3^b$$

$$b_4 = (2k_1w_3a_3 + 3k_2w_2a_2 + 2h_1d_3 + 3h_2d_2)/5w_4^b$$

となる. この関係式を用いて曲面 $S^b(u, v)$ の制御点を生成すると 2 曲面間を滑らかに接続でき, かつ曲面の形状の制御も行えるようになる. 図 11 に曲面の形状の制御の例を示す.

6 有理境界 Gregory パッチの応用

本節は RBG パッチを曲面の生成に有効に利用している例として, フィレット曲面について説明する.

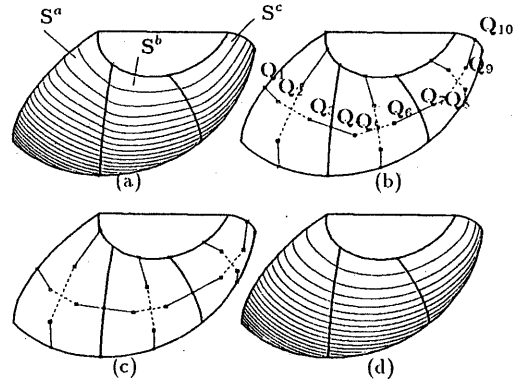


図 11: 曲面の境界での導関数を制御して曲面のうねりを解消した例.

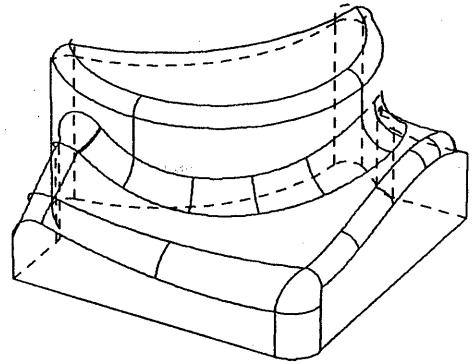


図 12: フィレット曲面を持った立体の例.

フィレット曲面は基本的にはボールローリング法により定義される[9]. 図 12 にフィレット曲面を持った立体の例を示す. 図に示したように, フィレット曲面を表している形状の位相は不規則である. これらの面に, RBG パッチを生成することで, 各面を G^1 連続に接続できる. 図 13(a) に示したように, ベクトル b_0 と a_0 および, b_3 と a_3 は同一直線上にあるので, 各フィレット曲面は G^1 連続に接続されている. したがって, ベクトル b_1, b_2 は式 (2) を使って決定される. 次に, 図 13(b) に示したように曲面 S^a と S^b の接続を考える. 頂点 V_1 と V_2 に接続している稜線が曲面 S^a の側にはないので, 曲面 S^a の接平面上にある 3 つの仮想ベクトル a_0, t, a_2 を考える. この境界曲線を横切る曲面 S^b の境界横断導関数は

$$g_i(v) = \frac{\sum_{i=0}^2 B_i^n(v)w_i a_i}{\sum_{i=0}^2 B_i^n(v)w_i}$$

と定義できる. t をあるパラメータ値 v' の境界横断導関数として, 重み w_1 は境界曲線を分割することによって計算できる. また, a_1 は

$$t = \frac{\sum_{i=0}^2 B_i^n(v')w_i a_i}{\sum_{i=0}^2 B_i^n(v')w_i}$$

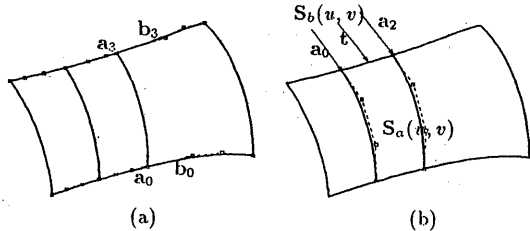


図 13: フィレット曲面の生成. (a) 境界曲線の制御点. (b) 仮想ベクトル.

を解くことによって得られる. a_i と $w_i (i = 0, 1, 2)$ は曲面 S^a と S^b の境界曲線に沿った接平面を近似している. 曲面 S^b の制御点はベクトル a_i と式 (2) を次数上げて定義されたものである. したがって, 曲面 S^a, S^b はほぼ滑らかに接続されている.

7 おわりに

本論文では有理 Bézier パッチを拡張した RBG パッチを用いて, 不規則な有理曲線メッシュ上に G^1 連続曲面を内挿する方法, および生成された曲面の形状を制御する方法を示した. RBG パッチは, パッチの境界を表している制御点が, それぞれ 2 つの重みを持っている. 境界が 3 次有理曲線ならば, 境界にそった導関数は 3 次有理関数である. この特徴を用いることによって, RBG パッチを G^1 連続に接続することは簡単である. さらに, 不規則なメッシュ上に RBG パッチを生成する手順は非有理の曲線メッシュに Gregory パッチを生成する手順と同じである. また, 次数を上げた RBG パッチを生成すれば, 曲面の形状を境界曲線上の導関数を指定することにより制御することができる.

この手法は(株)リコーが開発し, 販売しているソリッドモデラー DESIGNBASE の上で実現されており, その有用性が確認されている.

参考文献

[1] H. Chiyokura and F. Kimura, *Design of Solids with Free-form Surfaces*, Computer Graphics, 17 (1983), pp. 289-298.

[2] H. Chiyokura, *Localized Surface Interpolation for Irregular Meshes*, in Advanced Computer Graphics - Proc. Computer Graphics Tokyo 86, T. L. Kunii ed., Springer-Verlag, Tokyo, 1986, pp. 3-19.

[3] H. Chiyokura, *Solid Modelling with DESIGN-BASE: Theory and Implementation*, Addison-

Wesley, Reading, Massachusetts, 1988.

[4] H. Chiyokura, T. Takamura, K. Konno, and T. Harada, *G^1 Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves*, in Frontiers in Geometric Modeling, G. Farin ed., SIAM, Philadelphia, 1990.

[5] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, San Diego, California, 1988.

[6] A. R. Forrest, *Interactive Interpolation and Approximation by Bézier Polynomials*, Computer Journal, 15 (1972), pp. 71-79.

[7] J. A. Gregory, *Smooth Interpolation Without Twist Constraints*, in Computer Aided Geometric Design, R. E. Barnhill and R. F. Riesenfeld ed., Academic Press, New York, 1974, pp. 71-87.

[8] K. Konno, T. Takamura, and H. Chiyokura, *A New Control Method for Free-Form Surfaces with Tangent Continuity and its Applications*, in Proceedings of CG International'91, to appear.

[9] T. Rossignac and A. Requicha, *Constant-Radius Blending in Solid Modeling*, Computers in Mechanical Engineering, 3 (1984), pp. 65-73.

[10] R. F. Sarraga and W. C. Waters, *Free-Form Surfaces in GMSolid: Goals and Issues*, in Solid Modeling by Computers, M. S. Pickett and J. W. Boyse ed., Plenum Press, New York, 1984, pp. 187-209.

[11] T. Takamura, M. Ohta, H. Toriya, and H. Chiyokura, *A Method to convert a Gregory Patch and a Rational Boundary Gregory Patch to a Rational Bézier Patch and its Applications*, in Proc. Computer Graphics International'90, T. S. Chua and T. L. Kunii ed., Springer-Verlag, Tokyo, 1990, pp. 543-562.

[12] J. J. Van Wijk, *Bicubic Patches for Approximating Non-Rectangular Control-Points Meshes*, Computer Aided Geometric Design, 3 (1986), pp. 1-13.