

検出もれない曲面交線の追跡法

谷口行信

東京大学工学部計数工学科

概要

二つの陰曲面 $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ の交線を追跡するための数値的に安定な算法を提案する。交線計算はソリッドモデリングの分野で境界表現された立体モデルに対して集合演算を施す場面などで必要とされる。この場合には、効率良く追跡できることも大切であるが、それ以前に正しいトポロジーを出力することが要求される。そこで、(1) 曲面交線を小さなループや孤立点までも漏らさず検出できること、(2) さまざまな特異点に対応できること、を目標として代数曲線追跡システムを設計・試作した。本稿では、まず平面代数曲線に対し、追跡の際の出発点の見つけ方、その計算法、ステップ幅の調整法について述べ、最後に曲面交線の追跡法とその応用にふれる。

A Robust Method for Tracing Intersections of Curved Surfaces

Yukinobu Taniguchi

Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
Faculty of Engineering, University of Tokyo
Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan.

Abstract

A robust method for finding the intersection of two implicit surfaces defined as $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ is presented. Tracing surface intersections is one of the fundamental operations in solid modelling, in particular in Boolean operations on solid objects based on the boundary representation. In such applications, topological consistency is most important. The present method is able: (1) to find all components, including small loops and isolated points, and (2) to cope with various kinds of singularities, such as self-intersections, cusps and so on. First a method for finding start points and a method for controlling step length are described for plane algebraic curves, and next they are used to construct a method for tracing surface intersections. Applications of the present method to solid modelling, contour tracing, and silhouette drawing are described.

1 はじめに

曲面間の交線計算はソリッドモデリング等で繰り返し使われる演算の一つであり、さまざまな方法が提案されている。代表的な方法の一つとしてmarching method [2], [3], [4], [5], [12] がある。この方法は、何らかの手段で充分な数の出発点を設け、そこから曲線をたどる方法である。出発点の見つけ方としては、パッチ曲面を追跡が簡単になるまで細かくサブパッチに分割する再帰分割法 (recursive subdivision method) が一般的だが、ここでは出発点の計算を代数方程式を解く問題に帰着させる代数的方法 (algebraic method) を使い、代数曲線の追跡を行なうシステムを試作した。

代数的方法の特徴は、すべての計算を正確に行なえるならば、小さなループや孤立点などの小さな特徴までも漏らさず追跡できることである。また、特異点を最初に見つけておくため、特異点のところで追跡に失敗する心配も少ない。しかし、この方法は従来は無限精度の計算ができることを前提として設計されていたため、非実用的な方法であるといわれてきた。本稿では、浮動小数点演算を用いて実装する場合でも、誤差を見積もりながら計算を進めることで、低次の曲線については追跡が可能であることを示す。2節で平面代数曲線の追跡法について説明し、3節で空間代数曲線の追跡法について説明する。最後に、4節で代数曲線追跡の応用について述べる。

2 平面代数曲線の追跡

本稿で対象とする平面代数曲線は、 $f(x, y) = 0$ ($f(x, y)$ は同一因子を複数個持つことのない多項式と仮定する) で定義される曲線とする。問題は、2変数多項式 $f(x, y)$ と、領域 $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ が入力として与えられた時、領域内の曲線のトポロジーを表す平面グラフとその枝の位置を近似する点列を出力することである。

つぎのような手順で追跡を行なう (括弧内は手続きの詳細を述べた節を表す)。

Step 1: 出発点と終端点の位置を求める (2.1節)。

Step 2: まだ追跡していない出発点と方向を見つける。なければ、終了。

Step 3: 見つけた出発点と方向に従って曲線を追跡し、終端点に到達したら Step 2 にもどる (2.3節)。

2.1 出発点と終端点の求め方

本稿では、代数曲線から特異点を除いた時できる連結成分をブランチと呼ぶことにする。すべてのブランチを見落すことなく追跡するためには、すべてのブランチ上に1個以上の出発点を見つける必要がある。Farouki [4], [5] は次の3種類の点を出発点および終端点として採用した。

1. 境界点 (border points): 曲線と境界との交点。つまり、

$$\begin{aligned} f(x_{min}, y) &= 0, f(x_{max}, y) = 0, \\ f(x, y_{min}) &= 0, f(x, y_{max}) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

を満たす点を境界点と呼ぶ。

2. 折り返し点 (turning points): 曲線の法線が x 軸あるいは y 軸に平行になる点。つまり、

$$f(x, y) = f_y(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$f(x, y) = f_x(x, y) = 0 \quad (3)$$

を満たす点をそれぞれ x 折り返し点、 y 折り返し点と呼ぶ。

3. 特異点 (singular points):

$$f(x, y) = f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0 \quad (4)$$

を同時に満たす点を特異点と呼ぶ¹。

これら3種類の点を曲線 $y^2 - x^2 - x^3 = 0$, 領域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ に対して示したのが図1である。

しかし、以上の点だけではすべてのブランチ上に出発点が見つかったことにはならない。たとえば、図2のように、特異点が2個以上ある場合に特異点の間を結ぶブランチ上に出発点が欠けてしまう場合がある。そこで、我々は次の点も出発点に追加する。

4. 特異点を結ぶブランチ上の点: 特異点が $n (\geq 2)$ 個ある場合を考える。特異点を y 座標値の大きい順に並べたものを

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \quad \text{ただし } y_i > y_{i+1}$$

とすると、

$$f\left(x, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) = 0, \quad x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

¹特異点は、 x 折り返し点でありかつ y 折り返し点である点だから、折り返し点が求まっていれば、特異点の位置を計算し直す必要はない。

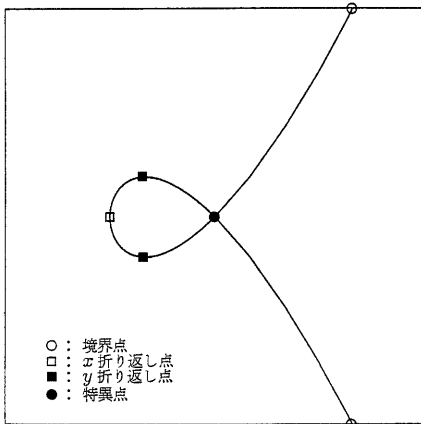


図1. 境界点, 折り返し点, 特異点
 $(f = y^2 - x^2 - x^3 = 0)$

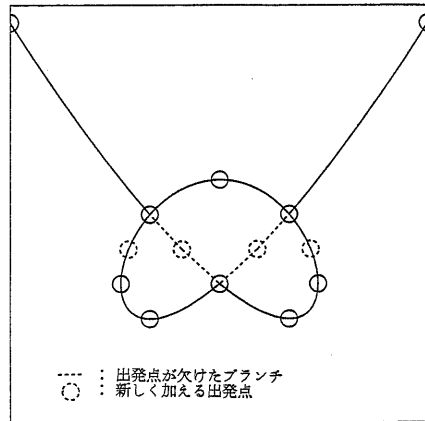


図2. ブランチ上に出発点が取れていない例
 $(f = x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0)$

を満たす点を出発点に追加する² (図2).

1 から 4 の点をまとめて, 特徴点 (characteristic points) と呼ぶ. 特徴点のうち特異点は終端点としてだけ使い, 残りの点は出発点としても終端点としても使う.

2.2 特徴点の計算方法

1 変数代数方程式 (1) を解いて境界点を求める場合, 1 変数の代数方程式の実根がある区間で列挙する必要がある. 一つの方法は Sturm 列を利用した二分探索である [8]. Sturm 列の符号変化数を調べることで, ある区間に存在する実根の個数 (重根も 1 個と数える) が分かるので, 区間を二分しながら根を狭い区間に閉じ込めることができる. この方法は理論的には正確だが, 数値計算を行なう場合には近接した二つの根が分離できずうまく行かない場合がある.

もう一つの方法は Durand-Kerner 法を用いて代数方程式の根を虚根を含めてすべて求め, 最後に必要な根だけを取り出す方法である. この方法は計算に時間がかかるが, 求めた根に含まれる誤差を Smith [14] の方法で事後推定できるところが優れている. したがって, 本稿ではこの方法を採用する.

(2), (3) 式を解いて折り返し点を求める場合, 2 変数の連立代数方程式の根を列挙する必要がある. ここでは,

² $y_i = y_{i+1}$ であるような特異点の組については, $f((x_i + x_{i+1})/2, y_i) = 0$ が成立する時だけ, $((x_i + x_{i+1})/2, y_i)$ を出発点に追加すればよい. なぜなら, x 軸に平行な特異点の間を結ぶブランチが直線であれば, そのブランチ上に必ず y 折り返し点が 1 個以上とれているはずだからである.

Sylvester の終結式 (Sylvester's resultant) を使って二つの代数方程式から一つの変数を消去し, 1 変数代数方程式に問題を帰着して解く. y に関して n 次と m 次の多項式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_n(x), \\ g(x, y) &= g_0(x)y^m + g_1(x)y^{m-1} + \cdots + g_m(x) \end{aligned}$$

に対する Sylvester の終結式は図3に示す多項式行列の行列式として定義される. 終結式を展開³して得られる 1 変数多項式を $p(x)$ と書く. 終結式の性質から $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ならば, $p(x) = 0$ であるから, まず 1 変数代数方程式 $p(x) = 0$ の根を上述の方法で求め, その根を $f(x, y) = 0$ に代入して y を求める.

以上の方法で折り返し点の x, y 座標値とその誤差の見積もりが得られる. 二つの折り返し点の x, y 座標値を $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ とし, 各座標値に含まれる誤差の見積もりをそれぞれ $\delta(x_i), \delta(y_i), \delta(x_j), \delta(y_j)$ とすると,

$$|x_i - x_j| \leq \delta(x_i) + \delta(x_j) \quad \text{かつ} \quad |y_i - y_j| \leq \delta(y_i) + \delta(y_j)$$

が成り立つとき, 二つの折り返し点が同じ位置を占めると判定する. このようにして, x 折り返し点と y 折り返し点と同じ位置を占めると判定された点を特異点とみなす.

³ 終結式の展開には Laplace 展開を用い, 展開の際に係数に混入する丸め誤差を見積もりながら計算を進める.

$$\text{Res}_y(f, g) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x) & & & & & & \\ & f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ g_0(x) & g_1(x) & \cdots & g_{m-1}(x) & g_m(x) & & & & & & \\ & g_0(x) & g_1(x) & \cdots & g_{m-1}(x) & g_m(x) & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & g_0(x) & g_1(x) & \cdots & g_{m-1}(x) & g_m(x) & & \end{vmatrix} \left. \vphantom{\begin{vmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{vmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ n \end{array}$$

図 3. Sylvester の終結式

2.3 ブランチの追跡とステップ幅の調整

2.3.1 Taylor 展開

代数曲線 $C: f(x, y) = 0$ の正則点 (特異点でない C 上の点) を $P_k(x_k, y_k)$ とする. P_k から C に沿って少しだけ進んだ点 $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ を求めたい. そのために, 曲線 C を点 P_k のまわりで Taylor 展開し, 局所的にパラメトリック表現する.

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{r}'s + \frac{\mathbf{r}''}{2}s^2 + \frac{\mathbf{r}'''}{6}s^3 + O(s^4). \quad (5)$$

ただし, $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$ と定義した. Bajaj[3] によれば, パラメータ s を弧長に選ぶと, $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ は以下の式で計算できる. (ここで, $\nabla f = (f_x, f_y)$, $f_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x_k, y_k)$ と定義する.)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (x', y') = \frac{1}{\|\nabla f\|} (-f_y, f_x), \\ \mathbf{r}'' &= (x'', y'') = \frac{b_2}{\|\nabla f\|^2} \nabla f, \\ \text{ただし } b_2 &= -2[f_{20}(x')^2 + f_{11}x'y' + f_{02}(y')^2], \\ \mathbf{r}''' &= (x''', y''') = \frac{b_3}{\|\nabla f\|^2} \nabla f - \|\mathbf{r}''\|^2 \mathbf{r}', \\ \text{ただし } b_3 &= -6[f_{20}x'x'' + f_{11}(x'y'' + x''y')/2 + f_{02}y'y'' \\ &\quad + f_{30}(x')^3 + f_{21}(x')^2y' + f_{12}x'(y')^2 + f_{03}(y')^3]. \end{aligned}$$

2.3.2 ステップ幅の決定

(5) 式が曲線を近似しているのは, パラメータ s が Taylor 級数の収束半径より小さい時だけであるから, ステップ幅 s_0 は収束半径より小さく選ぶ必要がある. 収束半径を正確に求めることは困難だが, 低次の係数から収束半径を推定する方法がいくつか提案されている [3], [10].

ここでは, Bajaj [3] にならって,

$$\frac{1}{2} \|s_0^2 \mathbf{r}''\| \leq \frac{|s_0|}{20} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{6} \|s_0^3 \mathbf{r}'''\| \leq \frac{|s_0|}{400} \quad (6)$$

となるように選ぶ. $\|\mathbf{r}''\|$ は点 P_k での C の曲率を表わすから, (6) 式はステップ幅 $|s_0|$ を曲率半径の $1/10$ 以下に選んでいることになる. 多くの場合この決め方でうまくいくが, s_0 が実際の収束半径より小さくなっている保証はない.

2.3.3 ニュートン法による解の改良

(5) 式に s_0 を代入して, 一歩先の点 $Q_k(X_k, Y_k)$ を得る (図 4). しかし, この点は必ずしも曲線上にのっていないのでニュートン法を使って曲線上の点へ修正する. すなわち, $\nabla f(X_k, Y_k) \cdot \mathbf{d} = -f(X_k, Y_k)$ を満たす \mathbf{d} のうち ∇f に平行なものを求め, $(X_k, Y_k) \leftarrow (X_k, Y_k) + \mathbf{d}$ を繰り返す. 収束した先の点を $P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ とする. 経験的には, 3, 4 回の反復で収束するが, ステップ幅 s_0 が大きすぎた時には収束しない場合がある. その時は, s_0 の選び方が不適切だったと判断して, s_0 を半分にして点 Q_k を (5) 式から求め直し再度ニュートン法を適用する.

2.3.4 入射角度のチェック

ニュートン法で収束した先のブランチが今まで追跡してきたブランチと同じである保証はなく, 図 5 のように, ブランチが近接しているところで他のブランチに乗り移り, 追跡に失敗する場合がある. 特に, 特異点を持つ曲線に振動を加えた曲線 (例: $xy + \varepsilon = 0$, 図 5) で失敗することが多い. このような失敗を完全に防ぐことは困難だが, 次に述べる簡単なチェックを行なうだけでも, 多くの例で失敗を防ぐことができる. 今まで追跡してきた方向を α と

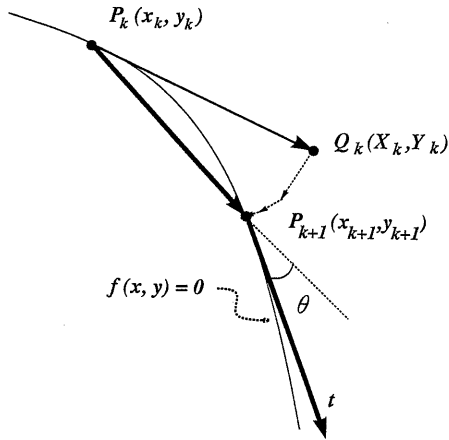


図4. 入射角度のチェック

し⁴, 今進もうとしている一步 $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ と, 点 P_{k+1} での接ベクトル $t = \alpha(-f_y(x_{k+1}, y_{k+1}), f_x(x_{k+1}, y_{k+1}))$ のなす角度を θ とする (図4). s_0 を (6) 式で決めたから, ニュートン法が正しいブランチに収束していれば, θ の絶対値は $1/20$ rad 程度であることが期待される. $|\theta|$ が $1/20$ rad よりも大きい時は, 他のブランチに収束した可能性が高いので, ステップ幅 s_0 を半分にしてやり直す.

2.4 実験結果

Sun SPARCstation ELC 上の GNU C++ を使用して実験用のシステムを試作した. 「グラフと追跡」 [13] と「岩波数学公式, I」 [11] に載っている例題 (約 100 題, 次数は x, y に関してそれぞれ 6 次以下の平面代数曲線) について実験を行ないすべて追跡できた. いろいろな種類の特異点 (node, cusp, tacnode, 孤立点) を持つ代数曲線も追跡できることを確認した. また, 漸近線も求められる. 図6は, 二つの特異点と2本の漸近線を持つ平面代数曲線である (ただし, 破線で漸近線を表す). しかし, 現時点では計算時間と精度の点で6次を超える代数曲線については追跡できないものが多い.

本システムでもっとも計算に時間がかかっている部分は, 終結式を展開するところである. Sylvester の終結式を単純に Laplace 展開する方法を用いたが, 計算時間がかかる上に係数に大きな誤差が混入するという問題点がある. Bezout の終結式あるいは Collins の Reduced P.R.S. アルゴリズム [9] を使えば計算時間を短縮できると

⁴ $f(x, y) > 0$ の領域を右に見ながら進むとき $\alpha = 1$, 左に見ながら進むとき $\alpha = -1$ とする.

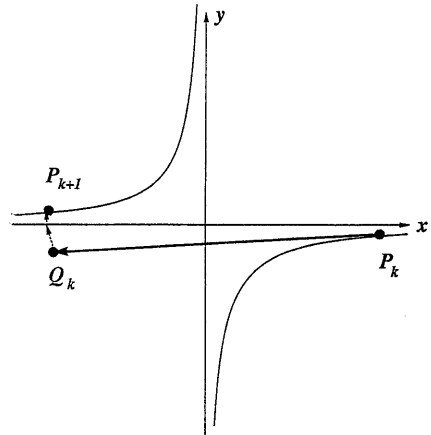


図5. 他のブランチにニュートン法が収束した例 ($xy + \varepsilon = 0$)

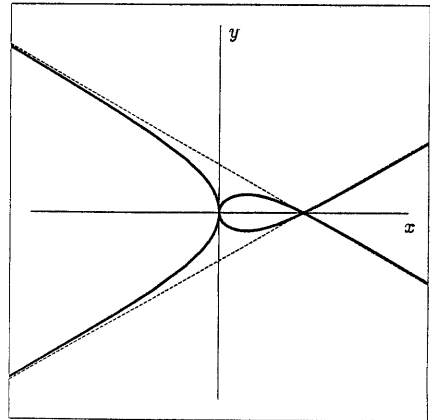


図6. 平面代数曲線の追跡例
 $((x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4y^2(x^2 + y^2) = 0)$

考えられるが, これについては今後の課題である.

実験の結果, 原点近くの特異点は精度よく求められることが分かった. 図7は, 原点付近に微細な構造を持つ曲線の例である (○は特徴点を表す). 逆に, 原点から離れた所にある高次の特異点は精度良く x, y 座標値が求まらず追跡に失敗してしまうことがある. その原因としては, (1) 高次の特異点に対応する代数方程式 $\text{Res}_y(f, f_y) = 0$ あるいは $\text{Res}_x(f, f_x) = 0$ の根は高次の重根になっているため根を精度よく求めることができないこと, (2) $|x|$ が大きいと, $\text{Res}_y(f, f_y)$ を Horner 法で評価する際に大きな丸め誤差が混入してしまうこと, などが考えられる. 特に図8のように, 特異点が x 軸または y 軸に平行に並んでいると, 複数個の特異点に対応する根が, $\text{Res}_x(f, f_x) = 0$

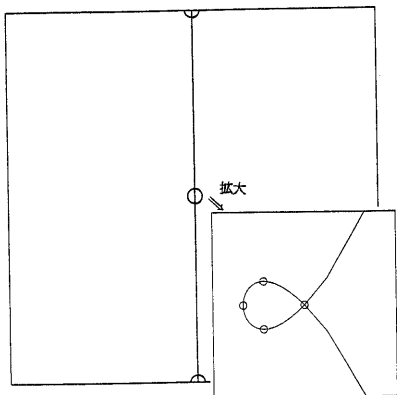


図 7. 原点付近の微細構造が正しく求められた例
 $(y^2 - x^2 - 10^{20}x^3 = 0)$

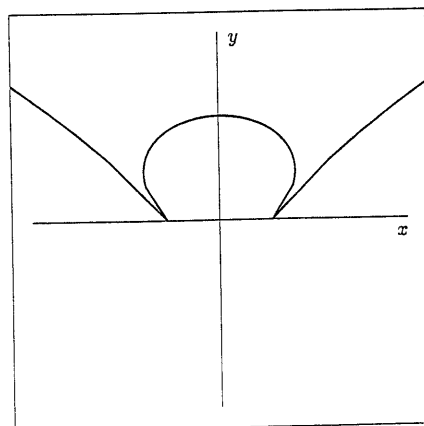


図 8. 特異点が x 軸に平行な直線上に並んでいる場合
 $((y - x^2 + 1/4)^2 - 25/16y^5 = 0)$

では重なってさらに高次の重根を生ずるため、根が精度よく求められない。図 8 の例では、 $\text{Res}_x(f, f_x)$ は 10 重根 ($y = 0$) を持つ。

を同時に満たす点と定義する。ここで扱う空間代数曲線は、特異点が無数個であるものに限る。たとえば、円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の交線のように無限個の特異点を持つ場合は扱わない。

3 空間代数曲線の追跡

本節では、陰的に定義された二つの代数曲面 $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ の交線 C を、領域 $R: [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$ の範囲で求める問題を考える。二つの代数曲面の交線を空間代数曲線 (space algebraic curve) と呼ぶ。我々のシステムでは、平面代数曲線の追跡をサブルーチンとして使い、次のような手順で空間代数曲線の追跡を行なう。

Step 1: 適当な方向から空間代数曲線 C を平面に射影し、平面代数曲線 $P: p(x, y) = 0$ を得る。

Step 2: P の折り返し点、特異点を 2.1 節の方法を用いて求め、3 次元空間内に戻す。

Step 3: 境界点 (曲線 C と領域 R の境界との交点) を求め、出発点に加える。

Step 4: 3 次元空間中で追跡を行なう。

Step 4 での追跡の手続きは平面の場合と基本的には同じであるので、以下では Step 1 についてだけ説明する。

空間代数曲線の特異点を

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0, \quad \nabla f \times \nabla g = 0$$

3.1 平面への射影

空間代数曲線を平面代数曲線へ射影する方法は Abhyankar and Bajaj [1], Garrity and Warren [6] らによって研究されている。ここでは Abhyankar and Bajaj の方法を使う。 C を一般の方向に沿って平面に射影することを考える。まず、座標変換

$$\begin{aligned} x &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ y &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ z &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{aligned} \quad (7)$$

を施し、曲面の方程式を $f'(X, Y, Z) = 0$, $g'(X, Y, Z) = 0$ と書き直す。 C を Z 軸に沿って XY 平面に射影し、平面代数曲線 $P: p(X, Y) = \text{Res}_Z(f', g')$ を得る。

(7) 式の a_i, b_i, c_i は、次の三つの条件を満たすように選ぶ⁵。

1. 座標変換行列 (a_i, b_i, c_i) は正則。

2. f', g' は Z に関して 1 次以上⁶。

⁵ a_i, b_i, c_i をランダムに選べば三つの条件は確率 1 で満たされる。

⁶ 空間代数曲線 C を平面代数曲線 P に射影したとき、 C の特異点が P の特異点に写るために必要である。

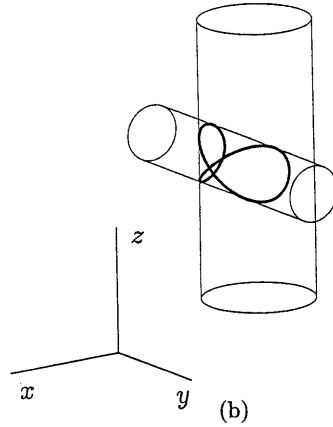
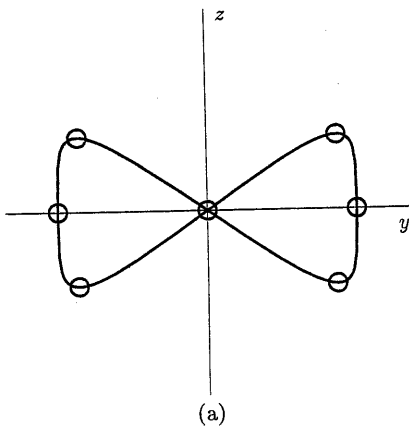


図9. 円柱同士の交線
 $(x^2 + y^2 = 4 \ \& \ (x - 1)^2 + z^2 = 1)$

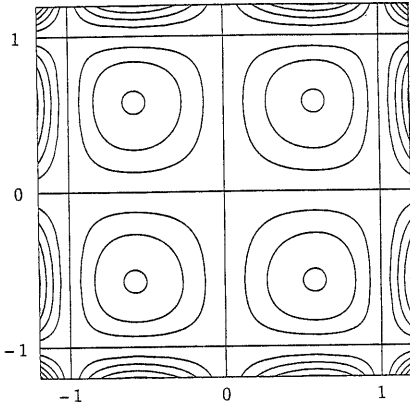


図10. 等高線図
 $(f = (x - 1)x(x + 1)(y - 1)y(y + 1))$

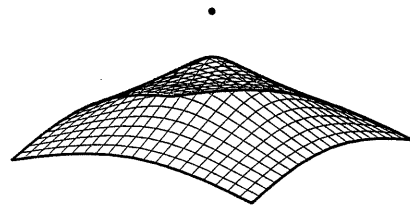


図11. 孤立点を持つ陰曲面の表示
 $(x^2 + y^2 + z(z - 1)^2 = 0)$

3. $p(X, Y)$ は2個以上の同一の因子を持たない
 $\Leftrightarrow \text{Res}_X(p, p_X) \neq 0$ か $\text{Res}_Y(p, p_Y) \neq 0$.

3.2 実験結果

2次曲面同士の交線に対して実験を行なった。図9(b)は z 軸に平行な軸を持つ半径2の円柱と y 軸に平行な軸を持つ半径1の円柱の交線である。図9(a)は、曲面交線を yz 平面に射影した平面代数曲線であり、○で表されている点が折り返し点、特異点である。実験により、分岐や孤立点を持つ交線も追跡可能であることを確認した。

平面代数曲線が6次までしか追跡できないという制限から、次数の高い曲面同士の交線は求められなかった。

4 応用

- (a) ソリッドモデリングへの応用: 有理パラメトリック曲面 $(x, y, z) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ と、陰曲面 $f(x, y, z) = 0$ の交線を求めるには、平面代数曲線 $f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) = 0$ を追跡すればよい [4]。有理3次パラメトリック曲面と2次曲面の場合、6次の平面代数曲線を追跡すればよい。このように、低次の陰曲面とパラメトリックパッチとの交線を求める用途には使える可能性がある。
- (b) 等高線図の描画: 多項式 $f(x, y)$ の等高線図は、平面代数曲線 $f(x, y) = c$ を c を変えながら繰り返し追跡することによって描画できる (図10)。分岐や孤立

点を持つ等高線も描けるという特徴がある。

- (c) 空間代数曲面の描画: 陰曲面 $f(x, y, z) = 0$ を x , y , z 軸に垂直な平面で輪切りにして, 陰曲面を表示できる. z 軸に垂直な面で切る場合, 平面代数曲線 $f(x, y, c) = 0$ を c を変えながら繰り返して追跡すればよい. また, 空間代数曲線の追跡を利用して, 陰曲面を平行投影したときの輪郭線を描くこともできる. 視線の方向ベクトルを (a, b, c) とすると, $f(x, y, z) = 0$ と $af_x + bf_y + cf_z = 0$ という2つの陰曲面の交線が輪郭線である. 図11は, 孤立点を持つ曲面を x, y 軸に垂直な平面で輪切りにして表示し, その上に輪郭線を太い線で重ねて描いたものである. 普通にレイトレーシングなどで描画すれば描けないと思われる孤立点も表示できる. 図9(b)の円柱の輪郭線もこの方法を使って代数曲線として描いたものである.

5 おわりに

平面代数曲線および空間代数曲線を追跡するときの出発点の選び方と, その計算法, ステップ幅の調整法などについて述べた. 今後の課題は, 終結式の展開法や代数方程式の解法を工夫し, さらに高次の曲線を追跡できるようにシステムを改良することである. また, パラメトリックパッチ同士の交線が追跡できるように, 4次元以上の代数曲線の追跡についても考えていきたい.

謝辞 適切な指導と助言を与えてくださった東京大学工学部計数工学科の杉原厚吉教授, 伊理正夫教授に感謝いたします. また, 貴重な時間をさいて議論の相手をしてくださった富岡豊助手, 今井敏行助手に感謝いたします.

参考文献

- [1] Abhyankar, S. S., and Bajaj, C. L.: Automatic Parametrization of Rational Curves and Surfaces IV: Algebraic Space Curves. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 8 (1989), pp. 325-334.
- [2] Bahnhill, R. E., and Kersey, S. N.: A Marching Method for Parametric Surface/Surface Intersection. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7 (1990), pp. 257-280.
- [3] Bajaj, C. L., Hoffmann, C. M., Lynch, R. E., and Hopcroft, J. E. H.: Tracing Surface Intersections. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5 (1988), pp. 285-307.
- [4] Farouki, R. T.: The Characterization of Parametric Surface Sections. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 33 (1986), pp. 209-235.
- [5] Farouki, R. T.: Trimmed-Surface Algorithms for the Evaluation and Interrogation of Solid Boundary Representations. *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 31 (1987), pp. 314-334.
- [6] Garrity, T., and Warren, J.: On Computing the Intersection of a Pair of Algebraic Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 6 (1989), pp. 137-153.
- [7] Hoffmann, C. M.: *Geometric & Solid Modeling: An Introduction*. Morgan Kaufmann, 1989.
- [8] 伊理正夫: 数値計算. 朝倉書店, 1981.
- [9] Ku, S. Y., and Adler, R.T.: Computing Polynomial Resultant: Bezout's Determinant vs. Collins' Reduced P.R.S. Algorithm. *Communications of the ACM*, Vol. 12 (1969), pp. 23-30.
- [10] de Montaudouin, Y., Tiller, W., and Vold, H.: Applications of Power Series in Computational Geometry. *Computer Aided Design*, Vol. 18 (1986), pp. 514-524.
- [11] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信: 岩波数学公式 I. 岩波書店, 1956.
- [12] Pratt, M. J., and Geisow, A. D.: Surface/Surface Intersection Problems. *The Mathematics of Surfaces* (Gregory, J. A., ed.), Oxford University Press, 1986, pp. 117-142.
- [13] 坂井忠次: グラフと追跡. 培風館, 1963.
- [14] Smith, B. T.: Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based upon Gerschgorin's Theorems. *Journal of the ACM*, Vol. 17 (1970), pp. 661-674.