

半空間プリミティブによる対話的CSGモデラ

—— 光線追跡法におけるCSG表現生成支援システム ——

久保寺玄一郎 岡田稔† 横井茂樹 鳥脇純一郎
名古屋大学工学部情報工学科 †名古屋大学情報処理教育センター

一般的形状の多面体に対して、半空間プリミティブによるCSG表現を対話的に決定するシステムを開発した。半空間プリミティブによるCSG表現は、特に光線追跡法に有効である。一般的形状の多面体は、凸多面体を基本形状とする集合演算で構成されると考える。その凸多面体による集合演算の表現と、この基本形状となる凸多面体のCSG表現が決定されていれば、多面体のCSG表現は決定される。本システムはこれらの考えに基づいて実現されている。また、対話的操作を実現するために、サーフェスマデルで多面体を表示して、高速な形状把握を行なっている。また、集合演算結果の多面体のサーフェスマデル決定の際に3値演算を利用している。

An Interactive Modeler with CSG-Expression based on Half Space Primitives

Gen-ichiro KUBOJI, Minoru OKADA †, Sigeki YOKOI and Jun-ichiro TORIWAKI

Dept. of Information Engineering,

School of Engineering, Nagoya University

† Education Center for Information Processing, Nagoya University

Chikusa-ku, Nagaya 464-01 Japan.

We developed the system to determine a CSG expression based on halfspace primitives for arbitrary polyhedra. The CSG expression based on halfspace primitives is effective for ray tracing especially. We regard a polyhedra as a result of set operations among a set of convex polyhedra adopted as a basic forms. If the expression of set operations among convex polyhedra for a polyhedron and each CSG expression for each convex polyhedron are determined, the CSG expression for the polyhedra can be determined automatically. This system realizes these ideas. To help interactive operation, the system shows polyhedra in surface model and make possible for users to understand the form of the polyhedra quickly. We use three-valued logical operation on deriving the surface model corresponding to the result of set operations.

1 はじめに

CSG表現は少ないデータ量で形状定義ができ、定義が簡潔で理解が容易であるという特長を持つモデリング技法である。この内部表現を持つソリッドモデラが多数開発されている⁽¹⁾⁽²⁾。さらにCSG表現の形状をCGで表示する場合、画像生成時間の高速性、生成された画像の現実性の観点から、画像生成方法の研究がなされてきている⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。その中でも、現実感のある画像という観点から光線追跡法はもっとも優れた技法である。

筆者らのグループは、CSG表現を光線追跡法に適用する研究において、基本形状を半空間にして、交点判定に3値演算の考えを利用すれば⁽⁶⁾、一般多面体の定義ができ、光線追跡法を行なえることを示した⁽⁶⁾。しかし、半空間の境界面と論理式による複雑な形状の定義は実際に行なうことは難しく、プリミティブの数に限界が生じていた。そのため、今回この形状定義を支援するシステムを開発した。すなわち、凸多面体を基本形状とし、その間の集合演算によって一般の多面体を構成し、そのときの一般多面体を導出する手順に対応して、半空間プリミティブによるCSG表現の操作を行なうことによって最終的なCSG表現を決定する。このシステムでは、対話的操を行なうために、多面体表示にサーフェスマodelを使用した。また文献(4)と同様に、3値演算を使用して、演算結果のサーフェスマodelを決定した。

2 半空間プリミティブによる多面体定義

2.1 半空間プリミティブの定義

多面体のある面 i が、

$$f_i(x,y,z)=a_i x+b_i y+c_i z+d_i=0 \quad (1)$$

で定義されるとき、平面 i に関して0以下の値をとるような点の集合を半空間プリミティブ R_i と定義する。すなわち、

$$R_i \equiv \{ (x,y,z) \mid f_i(x,y,z) \leq 0 \} \quad (2)$$

ただし、式(1)において、常に $d_i > 0$ となるように、平面パラメータの符号を定める。

平面の法線の向きには2通り考えられるから、本文で

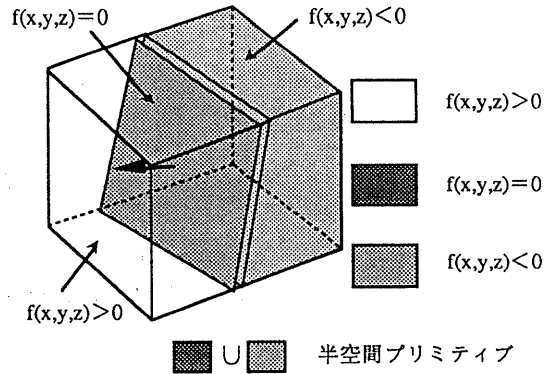


図1 半空間プリミティブの定義

は、 R_i の外部へ向かう向きに定める。このとき、空間は半空間プリミティブに対して内部、境界、外部と呼ばれる三つの点の集合に分けられる。

2.2 集合演算の定義

このように定義された半空間プリミティブに対する集合演算としては、和集合、積集合に加えて補集合の定義を少し修正した準補集合を定義する。

R_i を空間の点の集合とすると、 R_a と R_b の和集合

$$R = R_a \cup R_b \text{ を、記号 } R = (\text{or } R_a R_b) \text{ で表現する。}$$

同様に、 R_a と R_b の積集合

$$R = R_a \cap R_b \text{ を、 } R = (\text{and } R_a R_b) \text{ で表現する。}$$

R_i の補集合 $(R_i)^c$ に対して、新しく

準補集合を $(R_i)^{sc} \equiv (R_i)^c \cup (R_i)_{f=0}$ と定義し、 $(\text{not } R_i)$ で表す。 $(R_i)_{f=0}$ は半空間プリミティブ R_i のなかで $f_i(x,y,z)=0$ の

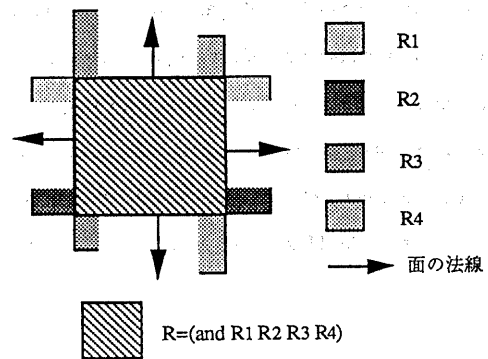


図2 半空間による形状定義

領域を表す。

2.3 形状表現の方法

物体の形状は、以上定義したプリミティブに対する集合演算で定義され、その記述式を以下、S式と呼ぶ。

2.4 3値演算の定義

光線追跡法において必要なことは、視線と物体表面に対する交点を計算し、視点にもっとも近い点を選ぶ事である。上記の定義においては、全ての面が視線との交点を持つから、その交点の定義形状に対する状態値判定をすることが必要である。そのために3値演算を利用する¹⁰⁾。

物体がある基本形状の集合演算で表現される場合、任意の点の定義物体に対する状態は、その点の各基本形状に対する状態値の集合演算で求められる。

半空間プリミティブ R_i に対する空間上の任意の点 P の状態値を表す関数 $R_i(P)$ を次のように定義する。

$$R_i(P): P \rightarrow \{B, I, O\}$$

但し、 B は R_i の境界、 I は内部、 O は外部の点であることを示す。

多面体に対する上記の形状表現(S式)に対して、計算された全ての状態値を式中の半空間プリミティブに代入し、3値論理評価する。

以下、単に論理評価と言う。この計算法では形状定義のS式が、そのまま交点判定の式として利用できる利点がある。例えば、

$$S \text{ 式 } (\text{and } R_1 R_2 R_3 R_4)$$

のとき、任意の点 P に対する論理評価式は、

$$F(P) : (\text{and } R_1(P) R_2(P) R_3(P) R_4(P))$$

となり、境界面は $F(P)=B$ である P の集合と言える。

さらに本定義、3値演算の利点としては、

2値演算の交点判定のミスを解消できること

定義が簡潔で、理解が容易であること

なども挙げられる。

一方、この表現の欠点は、目的とする多面体に対して、各面の平面パラメータと論理式という形の形状定義を導出しにくいことにある。このことは面数の大きい多面体

に対し、論理式や平面パラメータによる定義を人間の手によって行なうことを困難にする。また形状の対話的定義のためには、素早い形状把握の可能な表示方法、内部表現が必要である。

そのために多面体の半空間プリミティブとS式を自動的に決定するシステムを開発した。このシステムでは基本形状として凸多面体のサーフェスマodelを使用してCSG表現を決定し、その集合演算によって複雑な形状を構成した後、それに対応するCSG表現が決定される。表示にはサーフェスマodelを利用したポリゴンの陰面消去表示を用いて、形状把握を高速に行ない、対話的に操作ができるようにした。

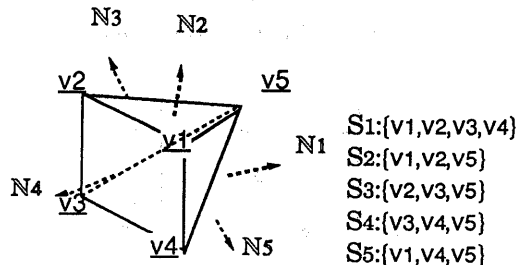
3 多面体の内部表現

本システムで多面体を定義するためには、まず、サーフェスマodelの凸多面体を作り、それに対する半空間プリミティブとS式を決定する。従って、多面体はCSG表現とサーフェスマodel構造を持つ。なお、サーフェスマodelは各面を構成する面集合からなり、各面はその面を構成する頂点集合からなる(図3)。例えば、 m 面体 K についてその内部表現は

$$S \text{ 式 } F_K(P)$$

$$\text{平面パラメータ } N_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\} \quad (1 \leq i \leq m)$$

$$\text{面集合 } S_i \quad (1 \leq i \leq m)$$



$$S\text{-exp} = (\text{and } R_1 R_2 R_3 R_4 R_5)$$

$$f_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad (d_i > 0)$$

$$N_i : (a_i, b_i, c_i)$$

$$R_i : f_i(x, y, z) \text{ によって決まる半空間プリミティブ}$$

図3 多面体の内部表現

頂点集合 V_{ij} ($1 \leq j \leq V_{imax}$) $V_{imax} = (S_i \text{の頂点数})$
となる。

4 凸多面体のCSG表現データの決定

このように任意の位置にあるサーフェスマデル表現された凸多面体に対し、CSG表現データを決定する。決定するのは、多面体の各面の平面パラメータと、その平面を境界面とする半空間プリミティブによって構成される形状のS式である。

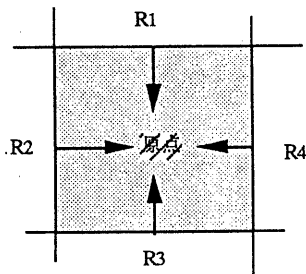
4.1 平面パラメータの決定方法

各面の平面パラメータは各面の頂点のうちの任意の3点から計算される。このとき、平面パラメータの符号を $d_i > 0$ となるように定める。

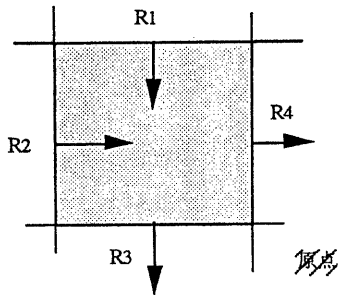
4.2 S式の決定方法

半空間プリミティブは平面に対して0以下の値をとるような点の集合であるから、一つの平面に対し二つの半空間 R_i と R_i の準補集合(not R_i)が定義される。

S式の決定方法を考える前に、凸多面体の定義について



$$(\text{and } (\text{not } R_1) (\text{not } R_2) (\text{not } R_3) (\text{not } R_4))$$



$$(\text{and } (\text{not } R_1) (\text{not } R_2) R_3 R_4)$$

図4 同一形状の位置によるS式の違い

て考える。m面の凸多面体を考え、各面に対応する半空間プリミティブを R_1, R_2, \dots, R_m とおけば、S式は一般に

$$\left(\text{and } \left(\begin{array}{l} R_1 \\ (\text{not } R_1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} R_2 \\ (\text{not } R_2) \end{array} \right) \right. \\ \left. \dots \left(\begin{array}{l} R_m \\ (\text{not } R_m) \end{array} \right) \right)$$

の形をとる。

ここで、各プリミティブ R_i か準補集合(not R_i)をとるか、そうでないかは、多面体の位置によって決定される(図4)。従って、凸多面体を表すS式を導くには、S式における半空間プリミティブが準補集合であらわされるか、そうでないかを決定する必要がある。

[任意の位置にある凸多面体のS式の決定方法]

定義より、凸多面体は各面を表す式 $f(x,y,z)=0$ に対して $f(x,y,z) \leq 0$ をみたす点の集合の積集合であるから、多面体の頂点 (x,y,z) は、各面の式 $f(x,y,z)=0$ に対して $f(x,y,z) \leq 0$ を満たす。これを利用して、

(1)各面の平面パラメータを4.1の手順で求める。

(2)多面体のS式の半空間プリミティブを各面の方程式 $f_i(x,y,z)=0$ に対する半空間プリミティブ R_i で与え、これを多面体の初期記述とする。

(3)定義した多面体の頂点に対し、各半空間プリミティブに対する状態値を調べる。各頂点は、各半空間プリミティブに対して内部、または境界にあるはずである。

(4)外部と判定する半空間が存在すれば、その点を内部と判定するように、そのS式の対応する半空間表現を準補集合表現に変更する。

(5)これを全ての頂点に対して、および、全ての面に対して行ない、S式を決定する。

5 多面体間の集合演算

5.1 S式の決定

本システムでは、二つの多面体を使った集合演算によって、より複雑な多面体を構成する。集合演算に使われる多面体は、3節で定義された内部表現をもつ。

二つの多面体間の集合演算によって作られる多面体の

S式は各多面体のS式とその間の集合演算子を用いて表現される。

例えば、多面体Aと多面体Bの論理和 $A \cup B$ の場合、AのS式を F_a 、BのS式を F_b とすると、論理和 $A \cup B$ のS式は $(or F_a F_b)$ となる。

論理差を $A \cap B^{SC}$ と定義する。上と同様にA、BのS式を決定すると、

論理差 $A \cap B^{SC}$ のS式は $(and F_a (not F_b))$

論理積 $A \cap B$ のS式は $(and F_a F_b)$

となる。

5.2 演算結果のサーフェスモデルの作成

次に集合演算によって作られる多面体のサーフェスモデル表現を決定する^{algorithm}。図5より、集合演算に伴って、

○演算の前後で面の数は増えない。

○面の形状（各面を構成する頂点）については、演算の前後で変化し、穴のあいた形状が生まれたり、分割さ

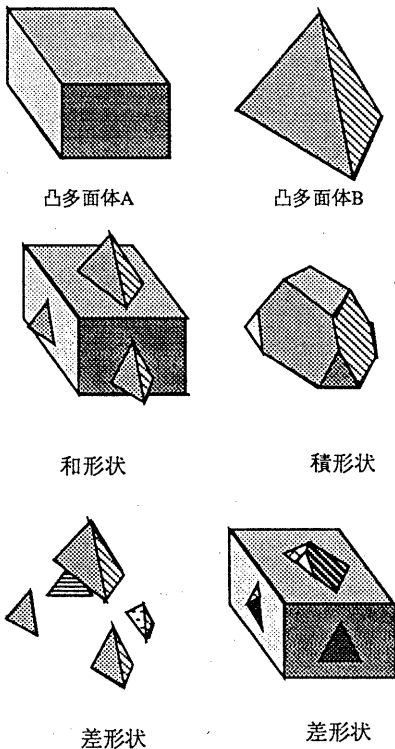


図5 凸多面体を基本形状とする集合演算

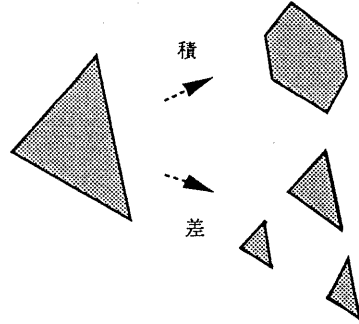


図6 図5の集合演算に伴う、凸多面体Bのある面の面形状（頂点集合）の変化

れる場合がある(差形状の場合)と考えられる(図6)。

従って、集合演算の結果、各面の形状は変化し、それに対応して、各面を構成する頂点が変更される。図5を見ればわかるように、新しい頂点は、二つの多面体の辺と面の交点である。よって演算結果のサーフェスモデルを決定するためには、多面体間の交点を計算する必要がある。また、集合演算に用いた各多面体の頂点も演算結果の多面体の頂点として残る場合がある。

従って、二つの多面体の集合演算で生ずる多面体の頂点を決定するためには、多面体間で、面と辺が交差するときの交点を計算することと、二つの多面体の頂点の中から、演算結果の多面体の頂点になるものを選ぶことが必要である。この頂点の決定に3値演算を利用した。(図7)。3値演算は、光線追跡法において、ある視線と多面体を構成する全平面との交点のうち、S式で記述された形状に対して境界面上に存在するものを求めるのに用いたが、交点だけでなく、空間上の任意の点の論理評価を行なうことも可能である。そこで、二つの多面体の頂点を5.1で決定されるS式によって論理評価すれば、演算結

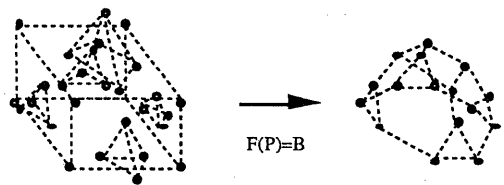
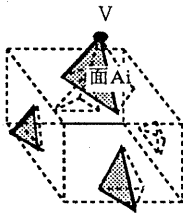


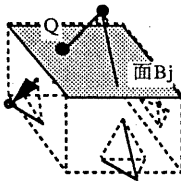
図7 3値演算判定による頂点決定

多面体Aと多面体Bの集合演算を考える
 結果の多面体をCとし、S式をF(P)、
 新しい面集合をAとBの和になるように決定する。



面の頂点を論理評価する。

$F(V)=B$ ならば C_i の頂点集合に加える。



辺との面の交点を計算する。

$F(Q)=B$ ならば、
 C_i の頂点集合と C_j の頂点集合に
 加える。

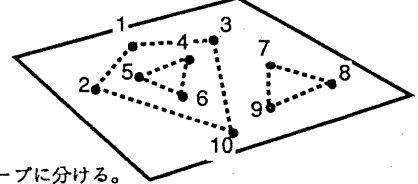
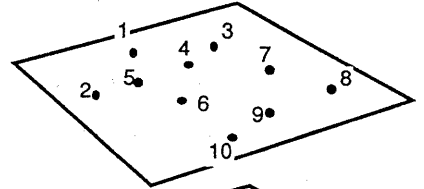
図8 頂点の決定手順

果の多面体の頂点が決定できる。また、二つの多面体間の辺と面との交点は、一方の多面体の各辺の2頂点を結ぶ直線の方程式と、もう一方の多面体の面を含む平面の方程式との交点として、計算される。このときこの交点が多面体を構成する面の辺上、または面の内部にあるとは限らない。従って、計算された交点に対しても、論理評価を行なう。この演算結果の多面体の頂点を決定するための処理を各面の頂点集合を決定するために、面単位で行ない、各面の新しい頂点集合が決定される。(図8)

6 論理判定による辺判定

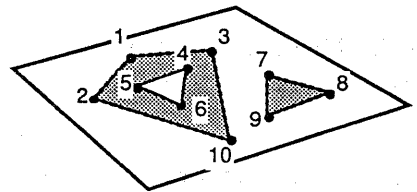
6.1 辺の判定方法

前節の処理で二つの多面体の演算結果として生じる多面体の各面の頂点集合が得られる。次にこの頂点集合を、各面を囲む辺でできるループごとに分けたり、同一面上にある点集合別に分けたりする必要がある(図9)。そ



ループに分ける。

$L1=\{1,2,10,3\}, L2=\{4,5,6\} L3=\{7,8,9\}$



面ごとに分ける。

$SubS1=\{1,2,3,4,5,6,10\}, SubS2=\{7,8,9\}$

図9 頂点集合に対するふたつの処理

のためには各面の任意の2頂点を結んだ線分が多面体の辺をなすのか、対角線をなすのか。そのどちらでもないのかを、判定する必要がある。

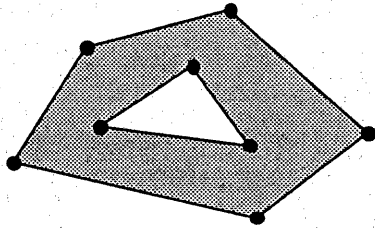
同一面上の任意の2頂点を結ぶ線分が辺と交差しないとき、その線分の中点 M_p について、次のことが言える。

中点 M_p と各半空間プリミティブ R_i との状態値 $R_i(M_p)$ を調べ、 $R_i(M_p)=B$ となるような R_i が2つ存在するとき、その中点 M_p は二つの半空間プリミティブの境界面の交線上にある。また、1つの場合、半空間プリミティブの境界面上にある。しかし、その中点 M_p が、一概に多面体の辺上、面上にあるとは言えない。論理評価を行なって、辺上か、面上なのかを判別する必要がある。

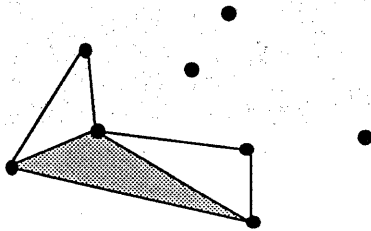
以上より、同一面上の任意の2頂点を結ぶ線分が間に辺との交点を持たない場合には、次のように場合分けできる。

(1)線分の中点 M_p が面の交線上に存在するとき、

$F(M_p)=B$ ならば、2頂点は稜線の端点



実際の形状



三角形の2辺から新しい三角形を作るための頂点を探す。

図10 穴あき形状面の描画

$F(M_p)=0$ ならば、2頂点は同一平面の別の面の頂点同士。

(2)線分の中点 M_p が面上に存在するとき、

$F(M_p)=B$ ならば、2頂点是对角線

$F(M_p)=0$ ならば、2頂点は同一平面の別の面の頂点同士。

6.2 論理評価について

先の光線追跡法においては、インタプリタ方式を用いて論理評価を行っていたが⁹⁾、今回は、S式をもとに、2分木リストを作成し、それを用いて評価を行なっている。S式に対するリストの作成は、一組の括弧で表現されるS式に対して、右部分木をつくることを基本動作とする再帰的手続きで行なわれる。括弧内の一組の括弧に対して、左ノードに右部分木を作成する。

このようにつくられる2分木に対する評価も同様に、一組の括弧で表現されるS式に対する評価を基本動作とする再帰的解析で行なわれる。

7 表示方法

このようにして決定された新しい頂点集合に基づき面

形状の表示にはワイヤフレーム表示、またはポリゴン表示を使って多面体を表示する。、ポリゴン表示の場合、面形状が、穴の開いた形状である場合、面上の3頂点を使った三角パッチで、塗りつぶしを行なっている。3頂点を選ぶ際にも、6.1で述べた2頂点間の判定法を用いている。その方法は以下の通りである。

面上の対角線または、辺の両端の2点を選び、三角パッチの3番目の頂点を求めるとき、両方の頂点に対して、辺と交差しない最短の点をそれとする。この新しい2辺を使って、再帰的に三角パッチをもとの三角形に重ならない様に生成していく。この手続きを条件を満たす点なくなるまで行なう。(図10)

7.1 表示例

本報告の内部表現を持つ多面体を作り、集合演算を行ない、結果を確かめた。演算結果の多面体に対し、決定されたCSG表現のデータをもとに光線追跡法を行ない、サーフェスマodelの結果を確認した。

使用機種はSilicon Graphics社のIRIS4D/60、使用言語はC言語である。

8 まとめ

多面体の、半空間プリミティブによるCSG表現を対話的に決定するシステムを開発した。

○二つの多面体の集合演算によって、より多数の面からなる複雑な形状の多面体を生成していく過程をシステム上に実現した。

○対話的な操作を行なうために、多面体をサーフェスマodelを使って表示し、任意の位置にある凸多面体のS式の対話的生成方式を示した。

○演算結果のサーフェスマodelを決定するために、頂点判定、辺判定に3値演算を用いた。

このシステムによって、従来生成するのが困難だった面の数の多い、複雑な形状の多面体に対する半空間プリミティブによるCSG表現を決定することができた。しかしながら、集合演算結果の各多面体は凸多面体による履歴情報を持っていないので、和演算、差演算の結果の

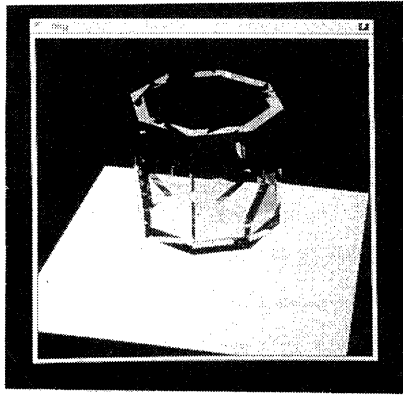


写真1 決定されたCSG表現の光線追跡法による表示

多面体を移動させることができない。そのため、あらかじめ、演算結果の多面体の位置を予想して凸多面体を配置しなくてはならず、モデリング形状に制限を与えている。これは今後の課題としたい。

謝辞

日頃大変熱心な御指導御討論を頂く鳥脳研究室の諸氏に感謝する。

参考文献

- (1)PIXEL 別冊No5 : CAD/CAM/CAEの基礎 (1985)
- (2)PIXEL No 13 : 3次元形状モデリングの実用化 (1983)
- (3)PIXEL No 24 : 3次元形状モデラの構造 (1984)
- (4)金、岡田、横井、鳥脳 : 半空間集合のCSG表現形状に対する光線追跡アルゴリズムの検討、信学技報、PRU88-129 (1989.2)
- (5)村上、松本 : CSG表現からの画像生成方式、情処全大講演論文集、pp.1533-1534 (1983)
- (6)床井、北橋 : 凸な立体の集合演算によって定義された形状のスキャンライン法による陰影画像生成、情処論、Vol.30, No1, pp.81-90 (1989)
- (7)川上、嘉数、仲野 : CSGモデルにおける可視面抽出に関する研究、情処研資、CAD29-7, pp.47-54 (1987)

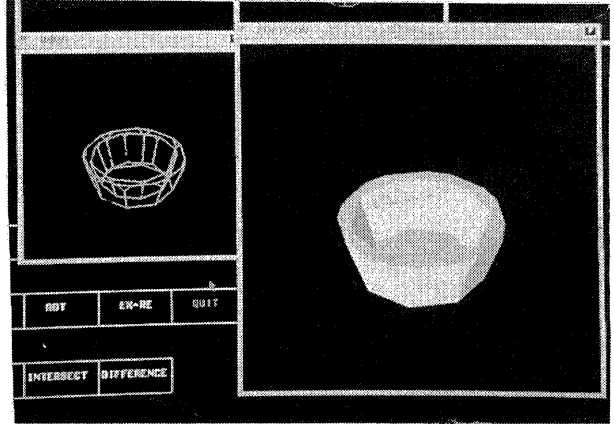


写真2 システムの演算結果の表示例

- (8)A.S.Glassner : An Introduction to RAY TRACING, Academic Press (1989)
- (9)J.Goldfeather : Near Real Time CSG Rendering Using Tree Normalization and Geometric Pruning, IEEE CG&A, Vol 9, No 3, pp.20-28 (1989.5)
- (10)R.B.Tilove : Set Membership Classification : A Unified Approach to Geometric Intersection Problems, IEEE Tr.COMPUTERS, Vol C-29, No10, pp.874-883 (1980.10)
- (11)若林、鶴岡、木村、三宅 : LISPによるソリッドモデラの開発、情処研資,CAD25-4 (1987)
- (12)長田、小堀、西岡 : ソリッドモデラ(Kenel-Solid)における立体集合演算の一手法、情処研資,CAD23-7 (1987)
- (13)PIXEL No 32 : 形状モデルと知識工学 (1985)