グラフィクスとＣＡＤ 60－12
(1992. 12. 18)

パターン認識の数学的理論
第27部 モデル構成作用素による EXTENDED DYNAMIC AXES WARPING (1)

鈴木昇一
文教大学湘南キャンパス情報学部情報システム学科
〒253 神奈川県茅ヶ崎市行谷1100番地

あらまし 1パラメータ・リー群歪をもつパターンを各カテゴリの代表パターンのいずれかに可能な限り一致させる過程を，SS理論でのaxiom1を満たすという意味でモデル構成作用素と呼ばれるもので表現している。この手法をリー群の近似表現で置きかえると，従来のDynamic Time Warping（DTW）が得られるため，本手法はDTWの拡張となっている。

和文キーワード 1パラメータ・リー群 時間伸縮 最小歪測度 モデル構成作用素 変分法 軸伸縮関数

A MATHEMATICAL THEORY OF RECOGNIZING PATTERNS
PART 27 AN APPLICATION OF MODEL-CONSTRUCTION OPERATORS TO AN EXTENDED DYNAMIC AXES WARPING (1)

Shoichi SUZUKI
Department of Information Systems, School of Information,
BUNKYO UNIVERSITY
1100, Namegaya, Chigasaki City, Kanagawa Prefecture 〒253

Abstract Distortions between an input pattern and reference patterns may be eliminated by one-parameter Lie groups. A kind of model-construction operator suggested by S.Suzuki is represented as transforming the axes of the input pattern onto that of the other so that the maximum coincidence is attended between two patterns. This paper gives a unified-and-extended theoretical view of traditional ways of thinking about the dynamic time warping.

英文 key words one-parameter Lie groups dynamic time warping minimum distance-measure variational method axes-warping function

1. まえがき

動的計画法（dynamic programming technique）を用いて，入力系列（the test sequence）と各代表系列（the reference）との累積歪（cumulative distortion measure ; cumulative matching error）を最小にする時間軸伸縮関数（the time-warping function），つまり最適パス（an optimal path）を発見することの原理性（変分法），Lie 座標変換群による一般化，神経回路モデル化を研究しよう。

拡張された軸伸縮の最適化（an optimization of an extended axes warping）が次の3方法①，②，③ でなされる。

①変分法（variational approach）

②能率的な並列演算化構造としての緩和型神経回路モデル（a relaxation neural network model as an efficient parallelizable framework）

③逐次的方法としての動的計画法DP を用いた離散多段決定過程．　□

①：　squared matching error を停留値にする十分条件（the derived equation for finding an appropriate solution）が変分法の適用の下で導かれる。変分法は global optimality of the solution を保証しないが，DP はそうではない[6]

②：　画像の強度過程（intensity process）と画像の不連続を示すライン過程（line process）との相互作用をもつ緩和型神経回路モデルを考え，画像の最適な2値化を行う並列計算モデルも提案されている[7],[10] matching error（誤差によって定義されたエネルギー関数）を停留値にする緩和型ニューラルネットモデルが最急降下法（gradient descent method）を使って示される。

③：　$\min\{\cdots\}[\ ]$ は，$\cdots$ を動かしたときの $[\ ]$ の最小値の意として，

$$E(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum_{k=1}^{n-1} E_k(v_k, v_{k+1})$$

を最小にする state variable の組

$$v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*$$

を求めるのに，

the optimal value function $\{S_k\}_{k=1}^{n-1}$

を計算すれば良い。即ち，

a discrete multistage decision process using the dynamic programming as a sequential procedure

では，k を段階番号とし，v_k を状態変数とすると，

$$S_0(v) \equiv 0$$

として，

$$S_k(v_{k+1}) = \min\{v_k\}[S_{k-1}(v_k) + E_k(v_k, v_{k+1})],\ k = 1, 2, \cdots, n-1$$

を後向きに求めて行くと，

$$E(v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*) \equiv \min\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} E(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \min\{v_n\} S_{n-1}(v_n)$$

が成立する[6]。この性質に注目し，①での解析結果を使って，matching error を停留値にする a discrete dynamic programming algorithm が示される。

2. DTW法

音声波形は，10ミリ秒程度の周期（frame）で帯域フィルタ分析（BPF: Band-Pass Filtering）や線形予測分析[4]（LPC: Linear Predictive Coding）の手法が適用され，時系列特徴パターン（記号列）に変換される[5]。二つの記号列

$$A = a_1 a_2 \cdots a_i \cdots a_I$$
$$B = b_1 b_2 \cdots b_j \cdots b_J \qquad (2.1)$$

の照合は，座標変換関数（TWF : time-warping function）

$$F = f(1) f(2) \cdots f(k) \cdots f(K) \qquad (2.2)$$

ここに，$f(k) = \langle i(k), j(k) \rangle$

を想定し，A，B 間の距離（distance）

$$D(A, B) = \sum_{k=1}^{K} dis(f(k)) \cdot w(k) \Big/ \sum_{k=1}^{K} w(k) \qquad (2.3)$$

ここに，$dis(f(k)) = d(i(k), j(k))$ は $a(i(k)) = a_{i(k)}$ と $b(j(k)) = b_{j(k)}$ との間の距離（ひずみ測度），$w(k) \geq 0$ は重み

を最小にする F（これを $\hat{F}$ と書く）を求めることが必要とされる：

$$\hat{F} = \arg\min D(A, B) \qquad (2.4)$$

ここに，$\hat{F} = \hat{f}(1) \hat{f}(2) \cdots \hat{f}(k) \cdots \hat{f}(K)$

A を入力記号系列とし，n 個の標準記号系列

$$B_1, B_2, \cdots, B_n \qquad (2.5)$$

を導入し，

$$\hat{F}_l = \arg\min_{F_l} D(A, B_l),\ l = 1 \sim n \qquad (2.6)$$

を求め，

$$q = \arg\min_l D(A, B_l) \qquad (2.7)$$

とすると，入力は第 q 番目のカテゴリに帰属すると認識推断される（spoken word recognition）ことになる。[3]

問題は，式（2.4）を満たす式（2.2）のTWFを能率良く求める search technique を確保することである。

連続的な照合動作には変分法（calculus of variations）が用いられることがあるが，変分法は解の大域的な最適性（global optimality of the solution）を保証しない。それで，もともと離散的な照合動作は勿論として，離散多段決定過程としての動的計画法（DP algorithm）を用いて 求解過程 を実現することが必要とされる。[6]

上述の音声情報処理の場合，求解過程のDP化は例えば，次の様にして達成される。[3]

initial condition: $g(f(1)) \equiv g(1,1) = dis(f(1)) \cdot w(1)$

ここに，$f(1)=\langle i(1), j(1)\rangle$, $\quad$ (2.8)

$i(1)=1$, $j(1)=1$, $w(1)=2$

DP-equation (recurrence relation):

$$g_k(f(k)) = \min_{\{f(k-1)\}} [g_{k-1}(f(k-1)) + dis(f(k)) \cdot w(k)] \quad (2.9)$$

ここに，
$$f(k-1)=\begin{cases}\langle i(k), j(k)-1\rangle \\ \langle i(k)-1, j(k)-1\rangle \\ \langle i(k)-1, j(k)\rangle\end{cases} \quad (2.10)$$

$$w(k) = [i(k)-i(k-1)] + [j(k)-j(k-1)] \quad (2.11)$$

いいかえれば，

$$g_k(f(k))=g(i,j)=\min\begin{bmatrix} g(i,j-1)+d(i,j) \\ g(i-1,j-1)+2d(i,j) \\ g(i-1,j)+d(i,j)\end{bmatrix} \quad (2.12)$$

restricting condition (adjustment window) $|i(k)-j(k)| \leqq r$ $\quad$ (2.13)

terminal condition: $i(K)=I$, $j(K)=J$, $N=\sum_{k=1}^{K} w(k)=I+J$ $\quad$ (2.14)

result: $\min_{\{F\}} D(A,B)=\frac{1}{N}\cdot g_K(f(K))$,

つまり，$\min_{\{F\}} D(A,B)=\frac{1}{N}\cdot g(I,J)$ $\quad$ (2.15)

上述の $dis(f(k))=d(i(k),j(k))$ は局所ひずみ測度（local distortion measure），

$$g_k(f(k))=g(i(k),j(k)) \quad (2.16)$$

は累積ひずみ測度（accumulative distortion measure）と呼ばれる。 □

なお，遷移確率が等しい場合のガウス形自己回帰過程での HMM (Hidden Markov Model) を用いた最尤推定法（the maximum likelihood estimate of Gaussian autoregressive densities），つまり

the recognition by maximum probability procedure

は，線形予測ひずみ測度を用いた dynamic time warping (DTW) algorithm と等価になり得ることも示されている。[4]

3. 本研究内容の前提，位置づけ等

本論文では，Lie群の表現論[1],第26部 を適用し，変分法で得た結果を DP-equation に変換し，波形レベルでも通用する DTW手法，つまり，拡張された軸伸縮法（EAW法）を確立する。波形レベルでは，重ね合わせが可能なので，式（2.6）のごとく，標準パターンの個数だけのTWFを求める必要はない。唯1個のTWFを求めればよいので，この面から時間的に有利である。

1パラメータLie群 $\{e^{tA}\}_{-\infty<t<+\infty}$ の無限小変換Aは

$$A=\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1,\cdots,x_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.1)$$

と表現されるが，座標系 $x=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ から座標系 $y=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle$ へと変更した場合，

$$\partial/\partial x_k=\sum_{l=1}^{n}(\partial y_l/\partial x_k)\cdot\frac{\partial}{\partial y_l} \quad (3.2)$$

が成り立つので，Aは

$$A=\sum_{l=1}^{n}(Ay_l)\cdot\frac{\partial}{\partial y_l} \quad (3.3)$$

と再表現され，

$$\exists k(=1\sim n),\ Ay_k=1 \quad (3.4)$$

となる様な標準基本座標系 y を選ぶことができるが[1],第26部 本研究ではこの様に前以って変換しておくことは仮定しない。また，作用素 e^{tA} は各tに対しウニタリ作用素であるように，内積（，）を選んでおく必要はないという前提を採用して，論を展開する。

無限小変換Aを求めるということは式(2.2)でいう座標変換関数Fに相当するものを求めることになる。Aを前以って解析的に決定しておいて Lie群 $\{e^{tA}\}$ に不変なある種のモデル構成作用素Tを求める前研究[1],第26部 とは異なり，本研究では，式(2.2)のFに相当するAを決定し，今一つの別なモデル構成作用素Tを構成する。

4. variational solution for optimization — Lie groups —

Lie群によるパターンマッチング用モデル構成作用素（収縮写像）T を構成しよう。座標軸方向伸縮の作用（の一般化）を SS理論[1]でのTの，Lie群論的表現[1],第26部 に関連して研

究しよう。

処理の対象とするパターンφの集合Φを考える。φは実数値パターンとする。1パラメータLie座標変換群 $\{e^{tA}\}_{-\infty<t<+\infty}$ の作用は，

$\varphi(y) = \exp[tA]\varphi(x)$

$\wedge\ \exp[tA]x_k = y_k \quad (k=1\sim n)$

ここに，$y=\langle y_1, y_2, \cdots, y_n\rangle$，$x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$，$Ax_j = a_j(x_1,\cdots,x_n)\ (j=1\sim n)$

$$e^z = \exp[z] = \Sigma_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}\cdot z^n \qquad (4.1)$$

と表現される。ここに，Aは無限小変換であり，

$$A = \Sigma_{k=1}^{n} a_k(x_1,\cdots,x_n)\cdot \partial/\partial x_k \qquad (4.2)$$

であるとしている。具体的には

$$\exp[tA]\varphi(x) = \varphi(\exp[tA]x) \qquad (4.3)$$

と表現されることに注意しておく。よって，式(4.1)での

$$x_k \longrightarrow \exp[tA]x_k = y_k,\ k=1\sim n \qquad (4.4)$$

の意味する変換がいわば，

"古典的な"時間軸の伸縮変換

の一般化に相当し，式(4.3)での

$$\{\varphi(x)\mid x\in M\} \rightarrow \{\varphi(y)\mid y\in M\} \qquad (4.5)$$

がパターン$\varphi=\varphi(x)$の伸縮変換に相当する。

例えば，$n=2$として，

$a_1=a_1(x_1,x_2)=1,\ a_2=a_2(x_1,x_2)=0$

と採れば，

$$(e^{tA}\varphi)(x_1,x_2) = \varphi(x_1+t,\ x_2),\ -\infty<t<+\infty \qquad (4.6)$$

となり，この場合のLie座標変換群は平行移動群である。

さて，n次元Euclid空間R^nの可測部分集合Mでの座標系を $x=\langle x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n\rangle \in M$ として，内積

$(\varphi, \eta) = \int_M dm(x)\,\varphi(x)\cdot\bar{\eta}(x)$，$\bar{\ }$は複素共役

とし，ノルム $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ とを導入し，Hilbert空間 $\mathfrak{H} = L_2(M; dm)$ を導入する。$\Phi\subset\mathfrak{H}$である。なお，

M上のいたるところで，$\Sigma_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(a_k p)=0$ (4.7)

を満たす様に，正値Lebesgue−Stieltjes式測度 $dm(x)=dx\,p(x)$ での密度関数 $p=p(x)=p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を決定しておけば，

$$\forall\varphi\in\mathfrak{H},\ \forall t,\ \|e^{tA}\varphi\| = \|\varphi\| \qquad (4.8)$$

が成立し（文献(1)の第26部，補定2.1，定理4.1（付録1）），e^{tA}はユニタリ作用素になるが，このユニタリ性は以下では仮定されない。

規格化条件

$0<p(C_j)$，$\Sigma_{j\in J}\,p(C_j) = 1$

を満たす生起確率 $p(C_j)$ をもつ第$j\in J$番目のカテゴリC_jの代表パターン $\omega_j=\omega_j(x)\in\Phi$ を導入しておく。更に，全カテゴリ集合 $C=\{C_j\mid j\in J\}$ 上の平均化パターン

$$\xi(x) = \Sigma_{j\in J}\,p(C_j)\cdot\omega_j(x)\|\omega_j\|^{-1}\in\Phi \qquad (4.9)$$

も導入しておく。

任意ではあるが，固定したパターン$\varphi\in\Phi$の，非零実定数C，実パラメータt，無限小変換Aについての汎関数(an objective function)

$$K(C,\ t,\ A;\ \varphi) = \Sigma_{j\in J}\|\eta_j(x) - C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)\|^2 \qquad (4.10)$$

を考える。ここに，mismatch between the target η_j and the adjusted pattern $Ce^{tA}\varphi$ は $\|\eta_j - Ce^{tA}\varphi\|^2$ であり，第$j\in J$番目の理想目標出力パターン $\eta_j\in\Phi$ も実数値である。以下では，#Jは集合J内の要素の総数（カテゴリ総数）である。

［定理4.1］（非零実定数C，Lie群の実パラメータt，無限小変換Aの決定定理；minimizing an objective function）

任意ではあるが，固定したパターン$\varphi\in\Phi$につき，

$\forall x\in M,$

$(1/\#J)\cdot\Sigma_{j\in J}\,\eta_j(x) = C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)$

$\vee\ [\ (e^{tA}\varphi)(x)=0\ \wedge\ (Ae^{tA}\varphi)(x)=0$

$\wedge\ \{\forall m(=1,2,3,\cdots),\ (\Sigma_{\ell=0}^{m-1}A^{\ell}BA^{m-\ell-1}\varphi)(x)=0\}\ ]$ (4.11)

を満たす非零実定数C，実パラメータt，無限小変換Aについて $K(C,\ t,\ A;\ \varphi)$ は停留値をとる。ここに各$\psi_k(x)$を任意関数として，Bは $B\equiv\Sigma_{k=1}^{n}\psi_k(x)\,\partial/\partial x_k$ 。

［定理4.1の系］（非零実定数Cの推定値）

$K(C,\ t,\ A;\ \varphi)$を停留値とするC，t，Aの間に，

$C = (1/\#J)\cdot\Sigma_{j\in J}(e^{tA}\varphi, \eta_j)/(e^{tA}\varphi, e^{tA}\varphi)$

$\fallingdotseq (1/\#J)\cdot\Sigma_{j\in J}(\varphi, \eta_j)/(\varphi, \varphi)$ 。

（証明）Re[…]は…の実部，また，$\bar{\eta}$はηの複素共役の意とする。

$$r_j(x) \equiv \eta_j(x) - C\cdot(e^{tA}\varphi)(x) \qquad (4.12)$$

とおけば，Kは

$$K(C,\ t,\ A;\ \varphi) = \Sigma_{j\in J}\|r_j(x)\|^2 \qquad (4.13)$$

と表現される。$K(C,\ t,\ A;\ \varphi)$はC，t，Aにおいて停留値になるものとする。

(i)まず，ある実パラメータtが$K(C,\ t,\ A;\ \varphi)$に停留値を与える場合を考えよう。

$(\partial/\partial t)\|r_j\|^2$

$$=\int_M dx\, p(x)\cdot \frac{\partial}{\partial t}|\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)|^2 \quad (4.14)$$

$$=2\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\, p(x)\{\frac{\partial}{\partial t}[\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)]\}\cdot\overline{[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)]}]$$

を得，

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(e^{tA}\varphi)(x)\}=(Ae^{tA}\varphi)(x) \quad (4.15)$$

を適用すると，

$(\partial/\partial t)K(C,t,A;\varphi)$

$$=2\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\sum_{j\in J}\{\frac{\partial}{\partial t}[\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)]\}\cdot\overline{[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)]}] \quad (4.16)$$

$$=-2C\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)(Ae^{tA}\varphi)(x)\cdot\overline{\sum_{j\in J}[\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)]}] \quad (4.17)$$

がいえ，Cは非零実定数としているから，

$$\forall x\in M,\ (Ae^{tA}\varphi)(x)=0 \vee \sum_{j\in J}\eta_j(x)=\#J\cdot C(e^{tA}\varphi)(x)\Rightarrow(\partial/\partial t)K(C,t,A;\varphi)=0 \quad (4.18)$$

(ii) 次に，無限小変換Aについて考えよう。

今，式(4.2)のAについて，

$$a_k(x,\varepsilon)=a_k(x)+\varepsilon\cdot\psi_k(x) \quad (4.19)$$

とおき，εはその絶対値が十分小さいパラメータとし，

$A(\varepsilon)\equiv\sum_{k=1}^n a_k(x,\varepsilon)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}$

$B\equiv\sum_{k=1}^n\psi_k(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}$

を考えると，

$$A(\varepsilon)=A+\Delta A(\varepsilon),\ \Delta A(\varepsilon)=\varepsilon\cdot B。 \quad (4.20)$$

$$s_j(x,\varepsilon)=\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x) \quad (4.21)$$

$$K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)=\sum_{j\in J}\|s_j(x;\varepsilon)\|^2 \quad (4.22)$$

を導入すると，式(4.14)，式(4.16)，式(4.17)の導出と同様にして，

$(\partial/\partial\varepsilon)K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)$

$$=\sum_{j\in J}(\partial/\partial\varepsilon)\|s_j(x,\varepsilon)\|^2 \quad (4.23)$$

$$=\sum_{j\in J}\int_M dx\,p(x)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}|\eta_j(x)-C(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)|^2$$

$$=2\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\sum_{j\in J}\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)]\}\cdot\overline{[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)]}] \quad (4.24)$$

を得るが，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)]=-C\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x) \quad (4.25)$$

であるから，結局，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)=-2C\,\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\cdot[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)]\cdot\overline{\sum_{j\in J}[\eta_j(x)-C(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)]}] \quad (4.26)$$

が成り立つ。ここで，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{n=0}^\infty(n!)^{-1}[tA(\varepsilon)]^n\varphi(x)=\sum_{n=1}^\infty(n!)^{-1}t^n\frac{\partial}{\partial\varepsilon}A(\varepsilon)^n\varphi(x)$$

であり，

$$\forall n(=1,2,\cdots),\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}A(\varepsilon)^n\varphi(x)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(A+\varepsilon B)^n\varphi(x)$$

$$=[\sum_{\ell=0}^{n-1}(A+\varepsilon B)^\ell\cdot B\cdot(A+\varepsilon B)^{n-\ell-1}\varphi](x)$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(e^{tA(\varepsilon)}\varphi)(x)|_{\varepsilon=0}=\sum_{n=1}^\infty(n!)^{-1}t^n[\sum_{\ell=0}^{n-1}A^\ell BA^{n-\ell-1}\varphi](x) \quad (4.27)$$

であるから，2式(4.26)，(4.27)より，

$$(\partial/\partial\varepsilon)K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)|_{\varepsilon=0}=-2C\sum_{n=1}^\infty(n!)^{-1}t^n\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\cdot[\sum_{\ell=0}^{n-1}A^\ell B\cdot A^{n-\ell-1}\varphi](x)\cdot\overline{\sum_{j\in J}[\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)]}]$$

がいえ，結局，

$$\forall x\in M,\ \{\forall m(=1,2,\cdots),(\sum_{\ell=0}^{m-1}A^\ell BA^{m-\ell-1}\varphi)(x)=0\}\vee\sum_{j\in J}\eta_j(x)=\#J\cdot C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)\Rightarrow(\partial/\partial\varepsilon)K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)|_{\varepsilon=0}=0 \quad (4.28)$$

(iii) 最後に，$K(C,t,A;\varphi)$を停留ならしめる非零実定数Cについて考えよう。

3式(4.14)，(4.16)，(4.17)の導出と同様にして，式(4.12)の$r_j(x)$について，

$$(\partial/\partial C)K(C,t,A;\varphi)=\sum_{j\in J}(\partial/\partial C)\|r_j(x)\|^2=\sum_{j\in J}\int_M dx\,p(x)\cdot\frac{\partial}{\partial C}|\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)|^2$$

$$=2\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\cdot\sum_{j\in J}\{\frac{\partial}{\partial C}[\eta_j(x)-C(e^{tA}\varphi)(x)]\}\cdot\overline{[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)]}] \quad (4.29)$$

であるが，

$$\frac{\partial}{\partial C}[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)]=-(e^{tA}\varphi)(x) \quad (4.30)$$

を代入すると，

$(\partial/\partial C)K(C,t,A;\varphi)$

$$=-2\cdot\mathrm{Re}[\int_M dx\,p(x)\cdot(e^{tA}\varphi)(x)\cdot\overline{\sum_{j\in J}[\eta_j(x)-C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)]}] \quad (4.31)$$

を得て，

$$\forall x\in M,\ (e^{tA}\varphi)(x)=0\vee\sum_{j\in J}\eta_j(x)=(\#J)\cdot C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial C}K(C,t,A;\varphi)=0 \quad (4.32)$$

が成立することがわかる。

結局，3式(4.18)，(4.28)，(4.32)を総合して，

$$\forall x\in M,\ \sum_{j\in J}\eta_j(x)=(\#J)\cdot C\cdot(e^{tA}\varphi)(x)\vee[(e^{tA}\varphi)(x)=0\wedge(Ae^{tA}\varphi)(x)=0\wedge\{\forall m(=1,2,\cdots),(\sum_{\ell=0}^{m-1}A^\ell BA^{m-\ell-1}\varphi)(x)=0\}]$$
$$\Rightarrow(\partial/\partial C)K(C,t,A;\varphi)=(\partial/\partial t)K(C,t,A;\varphi)=(\partial/\partial\varepsilon)K(C,t,A(\varepsilon);\varphi)|_{\varepsilon=0}=0 \quad (4.33)$$

(系1の証明) $(\partial/\partial C)K(C,t,A;\varphi)=0$とすれば式(4.31)より，

$$\sum_{j\in J}(e^{tA}\varphi,\eta_j)=\overline{C}\cdot(e^{tA}\varphi,e^{tA}\varphi)\cdot\#J$$

を得て，$\overline{C}=C$を考慮すると，これから明然。□

上述の定理4.1から次の系2，系3が得られる。

［定理4.1の系2］

任意に固定したパターン$\varphi\in\Phi\subset\Omega$につき，

$$\forall x\in M,\ (1/\#J)\cdot\sum_{j\in J}\eta_j(x)=C\cdot(e^{tA}\varphi)(x) \quad (4.34)$$

を満たす非零実定数C，実パラメータt，無限小変換Aに対し，式(4.10)の$K(C,t,A;\varphi)$

は停留値をとる。 □

式(4.34)が the derived equation for finding an appropriate solution である。

［定理4.1の系3］

式(4.9)の平均化パターン ξ に注目する。

任意に固定したパターン $\varphi \in \Phi \subset \Omega$ につき，

$$\forall x \in M,\ \xi(x) = C \cdot (e^{tA}\varphi)(x) \qquad (4.35)$$

を満たす非零実定数 C，実パラメータ t，無限小変換 A に対し，

$$K(C, t, A; \varphi) \equiv \Sigma_{j \in J} \| \#J \cdot p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x) \|\omega_j\|^{-1} - C(e^{tA}\varphi)(x) \|^2 \qquad (4.36)$$

は停留値をとる。

（証明） 定理4.1の系2において，$\forall j \in J$ 番目の理想目標パターン $\eta_j \in \Phi$ を

$$\eta_j(x) = \#J \cdot p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x) \|\omega_j\|^{-1} \qquad (4.37)$$

とおいたものである。 □

5. リー群とモデル構成作用素

SS理論[1]における次の axiom 1[1),第2部] を満たす写像 $T: \Phi \to \Phi$ を Φ についてのモデル構成作用素 (model construction operator) という。

$\hat{R}$ を正実数の集合とする。

Axiom 1 (i) $\varphi = 0 \in \Phi$ は T の不動点である：$\varphi = 0$ ならば $T\varphi = \varphi$。

(ii) $\forall \varphi \in \Phi,\ \forall a \in \hat{R},\ T(a\varphi) = T\varphi$。

(iii) $\forall \varphi \in \Phi,\ TT\varphi = T\varphi$。

(iv) $T\varphi \neq 0$ を満たす $\varphi \in \Phi$ が存在する。□

上の axiom 1 を満たすパターン集合（動作領域；operating region）Φ と写像 $T: \Phi \to \Phi$ との対 $\langle \Phi, T \rangle$ を導入する。この Φ は，SS理論を適用して，$\varphi \in \Phi$ を処理するパターン情報システムを構築するならば，再帰領域方程式

$$\Phi = \Phi_B \vee [T \vee \hat{R}] \cdot \Phi \qquad (5.1)$$

の解であるとしてよい。[1),第4部] ここに，Φ_B は基本動作領域である。

定理4.1の系3に注目しよう。3式(4.10)，(4.36)，(4.37)をあらためて，

$$K(c, t, A; \varphi) \equiv \Sigma_{j \in J} \| \eta_j(x) - C \cdot (e^{tA}\varphi)(x) \|^2$$
$$= \Sigma_{j \in J} \| \#J \cdot p(\mathcal{C}_j)\, \omega_j(x) \|\omega_j\|^{-1} - C(e^{tA}\varphi)(x) \|^2 \qquad (5.2)$$

ここに，$\eta_j(x) \equiv \#J \cdot p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x) \|\omega_j\|^{-1}$

と導入しよう。ここで，

$J = \{j\},\ \#J = 1$

とおき，定理4.1の系3から定まる C, t, A を C_j, t_j, A_j とすれば，つまり，

M' を M の有限部分集合として，

$$p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x) \|\omega_j\|^{-1} = C_j(e^{t_j A_j}\varphi)(x) \qquad (5.3)$$

が成り立つ点 $x \in M' \subset M$ が可能な限り多くなるように，

C_j, t_j, A_j を決定すれば，

$$(S_j\varphi)(x) \equiv C_j(e^{t_j A_j}\varphi)(x) \qquad (5.4)$$

と定義されるパターン $S_j\varphi$ は，パターン $\varphi \in \Phi \subset \Omega$ の，$\forall j \in J$ 番目のカテゴリ $\mathcal{C}_j$ に関するモデルと考えても良いことに注意しておく。

任意の非零実定数 C，任意の実パラメータ t，任意の無限小変換 A について，

$\eta = C \cdot \exp[tA]\varphi$ とおけば，

$\varphi = C^{-1} \cdot \exp[-tA]\eta$ を得て，

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow \eta = C \cdot \exp[tA]\varphi = 0 \qquad (5.5)$$

が成立することに注意すれば，次の定理5.1の成立が確かめられる。

［定理5.1］（Lie群 $\{e^{tA}\}_{-\infty<t<+\infty}$ による座標伸縮に関するモデル構成作用素 T の構成定理）

式(4.10)の汎関数 $K(C, t, A; \varphi)$ を停留値にする非零実定数 C，実パラメータ t，無限小変換 A を求め，写像 $T: \Phi \to \Phi$ を

$$(T\varphi)(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \varphi = 0 \\ \dfrac{(\exp[tA]\varphi)(x)}{\|(\exp[tA]\varphi)(x)\|} & \text{if } \varphi \neq 0 \end{cases} \qquad (5.6)$$

と定義すれば，この T は axiom 1 を満たし，モデル構成作用素である。 □

式(5.2)，定理4.1の系3並びにその証明からわかることは，次の通りである：

定理5.1での，パターン $\varphi \in \Phi$ のモデル（synthetic pattern） $T\varphi \in \Phi$ は，

$\forall j \in J$ 番目の理想目標パターン η_j が

$\eta_j(x) = \#J \cdot p(\mathcal{C}_j) \cdot \omega_j(x) \cdot \|\omega_j\|^{-1}$

である場合，等式

$$\xi(x) = C \cdot (\exp[tA]\varphi)(x) \qquad (5.7)$$

が出来るだけ多くの有限個の点 $x \in M' \subset M$（M' は M の有限部分集合）において成立する様に，いいかえれば，

$$\int_M dx\, p(x) \cdot |\xi(x) - C(e^{tA}\varphi)(x)|^2 = \|\xi - C \cdot (\exp[tA]\varphi)\|^2 \qquad (5.8)$$

が極小値をとる様に，非零実定数 C，実パラメータ t，無限小変換 A を決定することで得られる。 □

式(5.6)のモデル$T\psi \in \Psi$は，式(4.9)の平均化パターンξと

a global pattern matching by one-parameter Lie group

を行なって得られているといえよう。⇒オ28部へ

文　献

(1) 鈴木昇一：パターン認識の数学的理論，PRL84-6（第Ⅰ部），PRL84-30（第Ⅱ部），…，PRU92-25（第26部），電子（情報）通信学会技研報［パターン認識と学習，パターン認識と理解］

(2) 鈴木昇一：認識工学（上），柏書房，1975

(3) HIROAKI SAKOE AND SEIBI CHIBA：Dynamic Programming Algorithm Optimization for Spoken Word Recognition, IEEE TRANS. ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSING, VOL. ASSP-26, No.1, pp. 43-49, 1978-02

(4) B.-H. JUANG：On the Hidden Morkov Model and Dynamic Time Warping for Speech Recognition — A Unified View, AT&T Bell Labs. Tech. J., Vol.63, No.7, pp.1213-1243, 1984-09

(5) 畑岡信夫，市川熹：2-2 音声認識におけるアルゴリズム，電子通信学会誌，Vol.69, No.4, pp.306-311, 1986-04

(6) AMIR A. AMINI, TERRY E. WEYMOUTH AND RAMESH C. JAIN：Using Dynamic Programming for Solving Variational Problems in Vision, IEEE TRANS. ON PAMI, Vol.12, No.9, pp.855-867, 1990-09

(7) 曽根原登：画像の最適2値化を行う緩和型神経回路モデルとその並列コンピュータによる実現，電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol. J74-D-II, No.6, pp.678-687, 1991-06

(8) 田中栄一：構造をもつものの距離と類似度，情報処理，Vol.31, No.9, pp.1270-1279, 1990-09

(9) Durbin, R. & Willshaw, D.：An Analogue Approach to the Travelling Salesman Problem Using an Elastic Net Method, Nature, Vol.326, No.6114, pp.689-691, 1987-04

(10) 曽根原登，平山亮：3.2 超並列コンピュータによる神経回路モデル処理，情報処理，Vol.32, No.4, pp.388-400, 1991-04

$\boxed{\text{付録}}$（オ26部からの続き；補定2.1の証明）

定義されているものとしよう。Mのいかなる部分領域においても恒等的に0とならない$z_1,\cdots,z_n$の関数$Q(z_1,\cdots,z_n)$に対し，関係式

$$Q(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_n))=0$$

がMにおいて恒等的に成り立つとき，式(4.6)の関数系はMにおいて関数的に従属であるという。これに対し，式(4.6)の関数系が$x_1,\cdots,x_n$のとる値の各々の組の近傍において任意に独立の値をとって変化し得るとき，式(4.6)の関数系は関数的に独立であるという。

行列$A=(a_{ij})$に対し，その行列式を$\det(a_{ij})$と書くことにしよう。

［補助定理4.2］　関数$Y_j=g_j(x_1,\cdots,x_n)$ $(j=1\sim n)$及びその1階までの偏導関数がすべて連続とすれば，次のi，iiは同値である：

(i) 関数系$Y_j=g_j(x_1,\cdots,x_n)$, $j=1\sim n$はMにおいて関数的に従属である。

(ii) 関数行列式(Jacobian)

$$\partial(g_1,\cdots,g_n)/\partial(x_1,\cdots,x_n)=\det(\partial g_k/\partial x_l)$$

はMにおいて恒等的に0である。□

初期条件として，式(4.3)を考え，式(4.4)の微分方程式系の解Y_jを，式(3.2)のごとく，

$$Y_j=g_j(x_1,\cdots,x_n;t),\ j=1\sim n \qquad (4.7)$$

と書こう。F_j, $j=1\sim n$に対する2条件(a),(b)から式(4.7)のごとく表現できる解Y_j, $j=1\sim n$は唯一つしか存在しなくて，然も各g_jは式(4.3)の初期値$X=(x_1,\cdots,x_n)$について1階までの連続な偏導関数をもつ関数であることが示せる。それで，次の結論が得られる：

初期条件式(4.3)から

$$g_j(x_1,\cdots,x_n;t)\big|_{t=0}=x_j,\ j=1\sim n \qquad (4.8)$$

が満たされている。また，関数系g_j, $j=1\sim n$は$x_1,\cdots,x_n$について独立な関数系であり，補助定理3.2を適用して，

$$\partial(g_1,\cdots,g_n)/\partial(x_1,\cdots,x_n)\neq 0 \qquad (4.9)$$

も成立していることが知れ，式(4.7)を逆に解いて，$Y_1,\cdots,Y_n$から$x_1,\cdots,x_n$を得ることができ，式(4.7)の逆変換が存在している，即ち，微分方程式系(4.4)の解が一意的であることから，式(4.7)で定まる座標変換g_j, $j=1\sim n$はM上の1対1変換であることが知れ，更にすべてのt_1,t_2に対し，群性質(group property)

$$g_j(g_1(x_1,\cdots,x_n;t_1),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_n;t_1);t_2)$$

$= g_j(x_1, \cdots, x_n; t_1 + t_2), \ j = 1 \sim n \quad (4.10)$

を満たしている。従って，

$F_j, j = 1 \sim n$ に対する定理4.1の2条件(a)，(b)の下では式(4.4)の微分方程式系の解である式(4.7)から定まる関数系g_j, $j = 1 \sim n$ は，

M上の1対1座標変換としての，1パラメータtの移動変換群(one-parameter group of shift transformations)

を定義しているといえる。

さて，座標 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ が微分方程式系(4.4)に従って運動し，今一つの座標 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ に移動した場合，処理対象としてのパターン $\varphi(X) = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ は $\varphi(Y) = \varphi(Y_1, \cdots, Y_n)$ に変換されたと考えることができる。

（定理4.1の証明）

Mの，任意の可測部分集合Nをとり，

$\varphi_N(X) = 1 \text{ if } X \in N, = 0 \text{ otherwise}$

とおく。また，式(3.16)の意味するところにより，

$\exp[tA]N = \{(Y_1, \cdots, Y_n) \in M \mid Y_j = \exp[tA] X_j, \ X = (X_1, \cdots, X_n) \in N, \ j = 1 \sim n\}$

とおく。$\exp[tA]$は2条件(a)，(b)より，Nの1対1変換であることに注意すれば，

$\| \exp[tA] \varphi_N \|^2 = (e^{tA}\varphi_N, e^{tA}\varphi_N)$
$= \int_{Y \in e^{tA}N} dY_1 \cdots dY_n \, p(Y_1, \cdots, Y_n) \ (= m(e^{tA}N))$
$= \int_{X \in N} dX_1 \cdots dX_n \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot p(Y_1, \cdots, Y_n) \quad (4.11)$

が成りたつ。このとき，式(4.4)より

$\left(\dfrac{d}{dt}\right)\dfrac{\partial Y_j}{\partial X_k} = \dfrac{\partial}{\partial X_k}\dfrac{d}{dt}Y_j = \dfrac{\partial}{\partial X_k}F_j(Y_1, \cdots, Y_n)$
$= \sum_{\ell=1}^{n} \dfrac{\partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial Y_\ell} \cdot \dfrac{\partial Y_\ell}{\partial X_k}$

を満たすから，

$\delta_{ik} = 1 \text{ if } i = k, = 0 \text{ if } i \neq k$

という Kronecker delta記号δ_{ik}を導入して，

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_j, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_{j-1}, \frac{d}{dt}Y_j, Y_{j+1}, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)}$
$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \dfrac{\partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial Y_\ell} \cdot \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_{j-1}, Y_\ell, Y_{j+1}, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)}$
$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \dfrac{\partial F_j}{\partial Y_\ell} \cdot \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_{j-1}, Y_j, Y_{j+1}, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot \delta_{\ell j}$
$= \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial Y_j} \cdot \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)}$
$= \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial Y_j}$

と計算され，結局，

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} = \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial Y_j} \quad (4.12)$

が成立している。

さて，初期条件式(4.3)の下で

$\partial(Y_1, \cdots, Y_n)/\partial(X_1, \cdots, X_n)|_{t=0} = 1$

であるから，式(4.12)を解けば，

$\partial(Y_1, \cdots, Y_n)/\partial(X_1, \cdots, X_n) = \exp[\int_0^t ds \sum_{j=1}^{n} \partial F_j(Y_1, \cdots, Y_n)/\partial Y_j] > 0 \quad (4.13)$

が得られる。

よって，式(4.11)に注目すると，

$\forall N \subset M, \forall t, \| e^{tA}\varphi_N \|^2 = \| \varphi_N \|^2$
$\Leftrightarrow \forall N \subset M, \forall t, \dfrac{d}{dt}\| e^{tA}\varphi_N \|^2 = 0$
$(\Leftrightarrow \forall X \in M, dm(e^{tA}X) = dm(X))$
$\Leftrightarrow \forall Y = (Y_1, \cdots, Y_n) \in M, \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot p(Y_1, \cdots, Y_n)\right] = 0 \quad (4.14)$

が成立するが，式(4.12)，式(4.4)を考慮すると，

$0 = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot p(Y_1, \cdots, Y_n)\right]$
$= \left[\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)}\right] \cdot p(Y_1, \cdots, Y_n) + \partial(Y_1, \cdots, Y_n)/\partial(X_1, \cdots, X_n) \cdot \dfrac{d}{dt}p(Y_1, \cdots, Y_n)$
$= \partial(Y_1, \cdots, Y_n)/\partial(X_1, \cdots, X_n) \cdot \left[\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial F_j}{\partial Y_j} \cdot p + \sum_{j=1}^{n} (\partial p/\partial Y_j) \cdot \dfrac{dY_j}{dt}\right]$
$= \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial F_j}{\partial Y_j} \cdot p + \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial p}{\partial Y_j} \cdot F_j\right]$
$= \dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial Y_j}[p(Y_1, \cdots, Y_n) \cdot F_j(Y_1, \cdots, Y_n)]$

を得るが，式(4.13)を考慮すれば，次の関係式が成立する：$\forall Y \in M, 0 = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial(Y_1, \cdots, Y_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_n)} \cdot p(Y_1, \cdots, Y_n)\right]$

$\Leftrightarrow \forall Y \in M, \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial Y_j}[p(Y_1, \cdots, Y_n) \cdot F_j(Y_1, \cdots, Y_n)] = 0. \quad (4.15)$

この式(4.15)から，式(4.14)は次の様に書き直される：

$\forall Y \in M, \sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial Y_j}[p(Y_1, \cdots, Y_n) \cdot F_j(Y_1, \cdots, Y_n)] = 0$
$\Leftrightarrow \forall N \subset M, \forall t, \| e^{tA}\varphi_N \|^2 = \| \varphi_N \|^2. \quad (4.16)$

初期条件式(4.3)の下での微分方程式系(4.4)からいえる式(3.12)を考慮すると，

$\forall N \subset M, \forall t, \| e^{tA}\varphi_N \|^2 = \| \varphi_N \|^2$
$\Leftrightarrow \forall N \subset M, \forall t, m(e^{tA}N) = m(N)$
$\Leftrightarrow \forall X \in M, \forall t, dm(e^{tA}X) = dm(X)$
$\Leftrightarrow \forall \psi, \forall t, \| e^{tA}\psi \|^2 = (e^{tA}\psi, e^{tA}\psi)$
$= \int_M dm(X) |(e^{tA}\psi)(X)|^2$
$= \int_M dm(e^{tA}X) \cdot |(e^{tA}\psi)(X)|^2$
$= \int_M dm(e^{tA}X) \cdot |\psi(e^{tA}X)|^2$
$= \int_{Y \in e^{tA} \cdot X} dm(Y) \cdot |\psi(Y)|^2 = \int_M dm(X) \cdot |\psi(X)|^2 = (\psi, \psi) = \| \psi \|^2$

$\Leftrightarrow$ 任意の実数tについて e^{tA}はユニタリ作用素。

を得て，証明が完了した。（第2部了） □