グラフィスクとCAD 63－4
（1993. 7. 15）

# 微分幾何構造を用いた曲面変形

木村 昌弘
斎藤 隆文
新谷 幹夫
NTT ヒューマンインタフェース研究所

オフセットすることにより曲面を修正する際、その変形は直感的なものであるべきである。また、その結果としてできる形状は初期形状の大域的な特徴を反映しているべきである。physically-basedアプローチは直感にあう変形を生成することができるが、わかりやすい幾何学的解釈をもたない。本論文ではこの変形を、拘束条件下での最適化問題として考察し、幾何学的かつ物理的意味をもつような、ラプラシアンに基づいたエネルギー汎関数を提案する。$G^1$接続という拘束条件の下で、この問題に対する解を具体的に計算する。

# Surface Deformation with Differential Geometric Structures

Masahiro Kimura
Takafumi Saito
Mikio Shinya
NTT Human Interface Laboratories

**When modifying surfaces by offsetting, the deformation should be intuitive and their resultant shapes should reflect global features of their initial shapes. Physically-based approaches can generate intuitive deformation, but do not necessarily have a comprehensible geometric interpretation. This paper therefore considers this deformation as a constrained optimization problem, and proposes a Laplacian-based energy functional that has both geometric and physical meaning. Analytical solutions to this problem are presented under $G^1$-connections constraints.**

# 1 はじめに

曲面モデリングでは、様々な幾何拘束が要求される。例えば、作成される曲面が、指定された点や曲線や領域を補間していなければならないとか、周囲の曲面と滑らかに接続していなければならないとか、また、その曲面の曲率が至る所正でなければならない（すなわち凸曲面である）等があげられる。多くの場合曲面モデリングでは、すでに作成された曲面を修正することにより、望みの曲面形状が作成される。

すでにデザインされた曲面が存在する場合を想定する。その曲面をその法線方向に変形する（以後、このような変形をオフセットと呼ぶ）ことにより、要求された幾何拘束を満足させる場合について考察する。特に、幾何拘束として $G^1$ 接続を考える。このとき、その変形は直感的なものであるべきである。また、その結果としてできる曲面形状は、デザイナーによって与えられた元形状の大域的な特徴を反映しているべきである。すなわち、変形に、わかりやすい大域的な幾何学的意味と物理的意味が必要である。

この問題は、拘束条件下でのエネルギー最小化問題として定式化される。エネルギーとして、変形量の $L^2$ ノルムを採用する方法（スプライン曲面に対しては、制御点が移動した距離の 2 乗和で近似される）、（cf. [2], etc.）、弾性体の変形エネルギーを採用する方法（通常、計算では、その近似モデルが使われる）、（cf. [4], [5], etc.）等が提案されている。前者は、最も自然な量ではあるが、わかりやすい幾何学的、物理的解釈をもたない。後者は、わかりやすい物理的解釈をもつが、わかりやすい幾何学的解釈をもたない。また、近似を行うことにより、変形エネルギーは、もはや、初期曲面の幾何学的量を反映していない。

本論文では、初期曲面の微分幾何構造であるラプラシアンに基づいた変形エネルギーを提案する。この変形エネルギーが、初期曲面とオフセット曲面の平均曲率の全体的な差異を測定しているという大域的な幾何学的意味をもつことと、等質的弾性膜の復元力を測定しているという物理的意味をもつことが示される。また、$G^1$ 接続を満足するオフセット全体のアフィン空間に対して、考慮するオフセットを、その有限次元部分空間に制限するならば、この変形エネルギーを最小にするオフセットは一意的に存在することが示される。さらに、その部分空間の基底を用いて、そのエネルギー最小のオフセットが具体的に計算できることが示される。特に、初期曲面が、2 個の滑らかな境界をもち、矩形領域からの写像の像として表現されるパラメトリック曲面の場合に、具体的に考慮するオフセットの有限次元アフィン空間を設定して、目的のオフセット曲面を計算している。

本論文では、多様体論とリーマン幾何学の言葉が使われる。それらについては、例えば [3], [1] 等を参照されたい。

# 2 $G^1$ 接続

$M$ を、滑らかな境界 $\partial M$ をもつ、連結でコンパクトな滑らかな曲面とする。曲面 $M$ はその境界 $\partial M$ において、別の曲面 $S$ と交わっているとする。曲面 $M$ をその境界を固定してオフセットすることにより、境界上で曲面 $S$ と $G^1$ 連続に交わらせたい。ここに、曲面 $M$ と曲面 $S$ が $G^1$ 連続に交わるとは、交線上でお互いの接平面が一致する場合を言う。曲面 $S$ の単位法ベクトルを $N_S$ とする。問題は、曲面 $M$ をオフセットした曲面の単位法ベクトル場を、境界 $\partial M$ 上で、ベクトル場 $N_S$ と符号を除いて一致させることである。この章では、このような変形を実現する曲面 $M$ 上の関数族を決定する。

曲面 $M$ の単位法ベクトル場を $N$ とする。$\nu$ を曲線 $\partial M$ 上定義された曲面 $M$ に接する零でないベクトル場で、曲

線 $\partial M$ には接しないものとする。また、3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の標準計量を $\langle\,,\,\rangle$ とする。曲面 $M$ のオフセットは、次のような $M$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 $F$ である:

$$F(p) = p + f(p)N(p), \ \forall p \in M$$

ここに $f$ は、曲面 $M$ 上の $C^2$ 級関数である。以後、このような写像 $F$ のことを関数 $f$ による曲面 $M$ のオフセットと呼ぶ。また、曲面 $F(M)$ のことを $f$ による曲面 $M$ のオフセット曲面と呼ぶ。

$$\mathcal{F} = \{f \in C^2(M) \mid f = 0, \ \nu f = -\frac{\langle \nu, N_S \rangle}{\langle N, N_S \rangle} \text{ on } \partial M\}$$

とおく。

**定理 1** $f \in C^2(M)$ による境界を固定する曲面 $M$ のオフセットを $F$ とする。オフセット曲面 $F(M)$ が、曲面 $M$ の境界 $\partial M$ 上で曲面 $S$ と $G^1$ 連続に交わるための必要十分条件は、$f \in \mathcal{F}$ である。

**証明** $p \in M$ における写像 $F$ の微分は、

$$(dF)_p(X) = X + (df)_p(X)N(p) + f(p)(dN)_p(X) \tag{1}$$

となる。ここに、$X$ は任意の $T_pM$（曲面 $M$ の点 $p$ における接空間）の元である。$p$ を $\partial M$ 上の任意の点とし、$X$ を零でない $T_p\partial M$ の元とする。$\{X, \nu(p)\}$ は $T_pM$ の基底になることに注意しておく。式 (1) より、

$$(dF)_p(\nu(p)) = \nu(p) + (\nu f)(p)N(p) \tag{2}$$

である。$\partial M$ 上では、$F$ は恒等写像だから、

$$(dF)_p(X) = X \tag{3}$$

である。ところで、$\langle \nu(p), N(p) \rangle = \langle X, N(p) \rangle = 0$ だから、$\{(dF)_p(\nu(p)), \ (dF)_p(X)\}$ は、$T_{F(p)}F(M)$ の基底になる。$\langle X, N_S(p) \rangle = 0$ だから式 (3) より、$\langle (dF)_p(X), N_S(p) \rangle = 0$。したがって、曲面 $F(M)$ と曲面 $S$ が $\partial M$ 上で $G^1$ 連続に交わるための必要十分条件は、$\langle (dF)_p(\nu(p)), N_S(p) \rangle = 0$ である。ゆえに $\mathcal{F}$ の定義と式 (2) より、定理の主張が成り立つことが容易にわかる。■

集合 $\mathcal{F}$ はアフィン空間である。すなわち、$f_1 \in \mathcal{F}$ が与えられたならば、

$$\mathcal{F} = f_1 + \{f \in C^2(M) \mid f = \nu f = 0 \text{ on } \partial M\}$$

とかける。アフィン空間 $\mathcal{F}$ の有限次元部分空間は、ある $f_0 \in \mathcal{F}$ に関して、$f_0 + \mathcal{F}_0$ とかける。ここに、$\mathcal{F}_0$ はベクトル空間 $\{f \in C^2(M) | \ f = \nu f = 0 \text{ on } \partial M\}$ の有限次元部分空間である。

## 3 変形エネルギー

初期曲面 $M$ の $f \in \mathcal{F}$ によるオフセットに対して、その変形エネルギー $E(f)$ を次のように定義する:

$$E(f) = \int_M (\Delta f)^2 dA$$

ここに、$\Delta$ はリーマン多様体 $(M, \langle\, , \rangle)$ のラプラシアンで、$dA$ はその面積要素である。ラプラシアン $\Delta$ は、div grad なる曲面 $M$ の微分幾何構造（リーマン構造）から決定される $M$ 上の2階楕円型微分作用素である。grad $f$ は $M$ 上のベクトル場であって、$M$ の各点において、方向としては関数 $f$ の最も増加する方向をもち、大きさとしてはその増大度をもっている。$M$ 上のベクトル場 $X$ に対して、div $X$ は $M$ 上の関数であって、$M$ の各点において、$X$ が生成する流れによる曲面 $M$ の面積の無限小歪み量を表わしている。$x = (x_1, x_2, x_3)$ を $\mathbf{R}^3$ の標準座標系とする。$(u_1, u_2)$ を $M$ の局所座標系とすれば、ラプラシアン $\Delta$ は局所的に次のようにかける:

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial u_i} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \log G}{\partial u_i}\right) \frac{\partial f}{\partial u_j},$$

ここに、$1 \leq i, j \leq 2$ に対して、

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \rangle$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},\ G = \det(g_{ij})$$

である。また、

$$dA = \sqrt{G}\, du_1\, du_2$$

である。（詳しくは、[1]、[3] を参照）

$f \in \mathcal{F}$ によるオフセット $F$ により、曲面 $M$ の単位法ベクトル場 $N$ から決定される、オフセット曲面 $F(M)$ の単位法ベクトル場を $N_f$ とする。$H, H_f$ をそれぞれ曲面 $M$, オフセット曲面 $F(M)$ の単位法ベクトル場 $N$, $N_f$ に対する平均曲率とする。

**定理 2** $M$ の各点 $p$ に対して、

$$|H_f(F(p)) - H(p) - \frac{1}{2}(\Delta f)(p)| \to 0$$

*as* $|f(p)|, |(\textit{grad } f)(p)| \to 0$ である。

**証明** $D$ を $\mathbf{R}^3$ の標準接続、$\nabla$ を $D$ から誘導された $M$ の接続、$B$ を曲面 $M$ の単位法ベクトル場 $N$ に対する第2基本形式とする。$M$ の点 $p$ を1つ固定する。点 $p$ の周りの $\mathbf{R}^3$ の局所正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を、$M$ 上では $e_1$, $e_2$ が $M$ に接し $e_3 = N$、となるようにとる。$\alpha$ は 1, 2, 3 をとり、$i, j$ は 1, 2 をとるものとする。すると、

$$H(p) = \frac{1}{2}(B_{11}(p) + B_{22}(p))$$

ここに、

$$B_{ij} = B(e_i, e_j) = \langle D_{e_i} e_j, e_3 \rangle$$

また、

$$H_f(F(p)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \hat{g}^{ij}(F(p)) \widehat{B}_{ij}(F(p))$$

ここに、

$$\hat{g}_{ij}(F(p)) = \langle dF(e_i(p)), dF(e_j(p)) \rangle,$$

であり、$(\hat{g}^{ij}(p)) = (\hat{g}_{ij}(p))^{-1}$,

$$\widehat{B}_{ij}(F(p)) = \langle D_{dF(e_i(p))}dF(e_j), N_f(F(p))\rangle$$

である。$dF(e_j) = e_j + fD_{e_j}e_3 + df(e_j)e_3$ であり、$\langle D_{e_j}e_3, e_\alpha\rangle = -\langle e_3, D_{e_j}e_\alpha\rangle$ だから、

$$dF(e_j(p)) = e_j(F(p)) - f\sum\nolimits_k B_{jk}(p)e_k(F(p)) + f_j(p)e_3(F(p)) \tag{4}$$

ここに、$f_j = df(e_j)$ である。$\mathrm{grad} f$ の定義より $p$ の近傍では、$\mathrm{grad} f = f_1e_1 + f_2e_2$ である。次のことが知られている (cf. [1]): $\Delta f = \mathrm{tr}_{(\,,\,)}\nabla df$、すなわち、$\Delta f = f_{11} + f_{22}$。ここに、

$$f_{ij} = \nabla df(e_i, e_j) = df_j(e_i) - df(\nabla_{e_i}e_j)$$

である。式(4) より、

$$\langle D_{dF(e_i)}dF(e_j) - dF(\nabla_{e_i}e_j), e_3\rangle = B_{ij} - f_{ij} + Q(f, f_1, f_2)$$

ここに、$Q(f, f_1, f_2)$ は $f$, $f_1$, $f_2$ の定数項をもたない多項式である。$\langle dF(\nabla_{e_i}e_j), N_f\rangle = 0$ だから、

$$H_f(F(p)) = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{ij}\hat{g}^{ij}(F(p))\langle D_{dF(e_i(p))}dF(e_j) - dF(\nabla_{e_i(p)}e_j), N_f(F(p))\rangle \tag{5}$$

$N_f$ の定義から $N_f = \widehat{N}/|\widehat{N}|$ で、

$$\widehat{N} = \langle dF(e_1)\wedge dF(e_2), e_2\wedge e_3\rangle e_1 + \langle dF(e_1)\wedge dF(e_2), e_3\wedge e_1\rangle e_2 + \langle dF(e_1)\wedge dF(e_2), e_1\wedge e_2\rangle e_3$$

次がわかった:

$$\hat{g}^{ij}(F(p)) \to \delta_{ij},\ N_f(F(p)) \to e_3(p),\ Q(f(p), f_1(p), f_2(p)) \to 0$$

as $|f(p)| \to 0$, $|\mathrm{grad} f(p)| \to 0$, i.e., $|f_1(p)|$, $|f_2(p)| \to 0$. 式(5) と $H$, $\Delta f$ の定義より定理の主張が成立することが容易にわかる。■

したがって、$f$ によるオフセットが微小変形であるならば、変形エネルギー $E(f)$ は平均曲率の全体的な変化を測定している。

次に、提案する変形エネルギーの物理的意味について述べる。初期曲面 $M$ を等質的弾性膜の平衡状態の曲面とする。$t \in \mathbf{R}$ に対して、$f_t \in C^2(M)$ による、この膜の境界を固定した横微小振動（曲面 $M$ の法線方向の振動）は、よく知られているように、

$$\frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2} = \Delta f_t$$

なる波動方程式に従う (cf. [1])。よって、$\Delta f_t N$ は、時刻 $t$ における膜の加速度ベクトルを表わしている。したがって、$E(f_t)$ は、時刻 $t$ での膜の復元力を測定している。

## 4　エネルギー最小化

$G^1$ 接続を与える曲面 $M$ のオフセットの集合 $\mathcal{F}$ の有限次元部分アフィン空間 $f_0 + \mathcal{F}_0$ を考える。$\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ を $\mathcal{F}_0$ の基底とする。$f_1$, $f_2 \in C^0(M)$ に対して、

$$(f_1, f_2) = \int_M f_1 \ f_2 \ dA$$

によって、ベクトル空間 $C^0(M)$ 上に内積が定義される。

**定理 3** 有限次元アフィン空間 $\mathcal{F}' = f_0 + \mathcal{F}_0$ 上で、変形エネルギー $E$ を最小にする変形 $f$ は一意的に存在し、

$$f = f_0 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i$$

ここに、

$$\lambda_i = -\sum\nolimits_{j=1}^{n} c^{ij} (\Delta f_0, \Delta \phi_j),$$
$$c_{ij} = (\Delta \phi_i, \Delta \phi_j), \ (c^{ij}) = (c_{ij})^{-1}$$

$1 \leq i, j \leq n$。

**証明**　$\mathcal{F}' \ni f_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \leftrightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ によって、$\mathcal{F}'$ は $\mathbf{R}^n$ と同一視される。これにより $E$ は $\mathbf{R}^n$ 上の関数とみなされる。

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 2(\Delta f_0, \Delta \phi_j) + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\Delta \phi_i, \Delta \phi_j) \tag{6}$$

$(1 \leq j \leq n)$。また、$1 \leq i, j \leq n$ に対して、

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 2(\Delta \phi_i, \Delta \phi_j) \tag{7}$$

$\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbf{R}$ に対して、$M$ 上 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \Delta \phi_i = 0$ とする。$\mathcal{F}_0$ の定義から、$\partial M$ 上 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi_i = 0$ である。最大値の原理 (cf. [1]) より、$M$ 上 $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi_i = 0$ である。ゆえに $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$。これは $\Delta \phi_1, \cdots, \Delta \phi_n$ が $C^0(M)$ で一次独立であることを示している。よって、行列 $(c_{ij})$ は正定値対称であり、式 (7) より $E$ のヘッシアンは $\mathbf{R}^n$ 上正定値である。また式 (6) から、方程式系 $\partial E / \partial \alpha_j = 0 \ (1 \leq j \leq n)$ は一意解 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ をもつ。これらの結果は定理の主張を証明している。■

## 5　実験例

初期曲面 $M$ を次のような 2 個の境界をもつパラメトリック曲面であるとする:

$$M = \{x(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^3 \,|\, a_1 \leq u_1 \leq b_1, \ a_2 \leq u_2 \leq b_2\}$$

ここに、$x$ は $[a_1, b_1] \times \{a_2\}$ と $[a_1, b_1] \times \{b_2\}$ を同一視する非特異な滑らかな写像である。であるとする。$M$ 上の量を写像 $x$ を通して、矩形領域 $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ の量と同一視する。オフセット曲面もこの矩形領域 $\Omega$ からの写

像として表現されることに注意しておく。$G^1$ 接続を与える曲面 $M$ のオフセットの集合の有限次元部分空間 $f_0 + \mathcal{F}_0$ を、$\Omega$ 上定義された双 3 次 $B$ スプライン関数を用いて、次のように設定する: 4 以上の整数 $m_1$, $m_2$ を固定する。区間 $[a_1, b_1]$ を $m_1$ 等分し、区間 $[a_2, b_2]$ を $m_2$ 等分する。整数 $j$ に対して $u_j^{(i)} = a_i + r_i j$ とし、

$$B_j^{(i)}(u_i) = \frac{1}{6{r_i}^3} \sum_{\alpha=0}^{4} (-1)^k \begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix} (u_i - u_{j+k}^{(i)})_+^3$$

とする。ここに、$r_i = (b_i - a_i)/m_i$, $i = 1, 2$ であり

$$(s)_+^3 = \begin{cases} s^3 & (s \geq 0) \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

である。このとき、

$$f_0(u_1, u_2) = \frac{b_1 - a_1}{m_1}((-B_{-3}^{(1)}(u_1) + B_{-1}^{(1)}(u_1))h_a(u_2)$$
$$+(-B_{m_1-3}^{(1)}(u_1) + B_{m_1-1}^{(1)}(u_1))h_b(u_2))$$

とする。ここに $u_2 \in [a_2, b_2]$ に対して、

$$h_a(u_2) = -\frac{\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}(a_1, u_2),\, N_S(a_1, u_2)\rangle}{\langle N(a_1, u_2),\, N_S(a_1, u_2)\rangle},$$

$$h_b(u_2) = -\frac{\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}(b_1, u_2),\, N_S(b_1, u_2)\rangle}{\langle N(b_1, u_2),\, N_S(b_1, u_2)\rangle}$$

である。また、$\mathcal{F}_0 = \mathcal{S}^{(1)} \otimes \widetilde{\mathcal{S}}^{(2)}$ とする。ここに、$\mathcal{S}^{(1)}$ は、$[a_1, b_1]$ 上の $C^2$ 関数で、各部分区間 $[u_{j-1}^{(1)}, u_j^{(1)}]$ では $u_1$ の 3 次多項式であり、$a_1$, $b_1$ において 2 階までの微分が零になるもの全体である。$\widetilde{\mathcal{S}}^{(2)}$ は、$[a_2, b_2]$ 上の $C^2$ 関数で、各部分区間 $[u_{j-1}^{(2)}, u_j^{(2)}]$ では $u_2$ の 3 次多項式であり、$a_2$, $b_2$ において 2 階までの微分が等しいもの全体である。このとき、$\mathcal{F}_0$ の基底 $\{\phi_{ij}\}$ $(0 \leq i \leq m_1 - 4,\ 0 \leq j \leq m_2 - 1)$ は

$$\phi_{ij}(u_1, u_2) = B_i^{(1)}(u_1)\widetilde{B}_j^{(2)}(u_2)$$

で与えられる。ここに、

$$\widetilde{B}_j^{(2)}(u_2) = B_j^{(2)}(u_2)\ (0 \leq j \leq m_2 - 4),$$

$$\widetilde{B}_j^{(2)}(u_2) = \begin{cases} B_j^{(2)}(u_2 + (b_2 - a_2)) & (u_2 \in [a_2, u_j^{(2)}]) \\ B_j^{(2)}(u_2) & (u_2 \in [u_j^{(2)}, b_2]) \end{cases}$$

$(m_2 - 3 \leq j \leq m_2 - 1)$ である。

領域 $\Omega$ の分割数 $m_1$, $m_2$ の決め方であるが、例えば、$M$ が双 3 次一様有理 $B$ スプライン曲面であるならば、領域分割をそのノット列から決まるものとする。分割 $m_1 \times m_2$ が固定されたとき、さらにそれを $2^k m_1 \times 2^k m_2$ のように再分割していくことによって、よりエネルギー $E$ の低い、$G^1$ 接続を満足する、オフセットを求めることができる。

以下に、本手法を適用した例を二つあげる。中央の曲面が変形される曲面を、両端の曲面が固定される曲面 $S$ をそれぞれ表わす。上図が変形前で下図が変形後である。分割数は $m_1 = m_2 = 12$ に採られている。

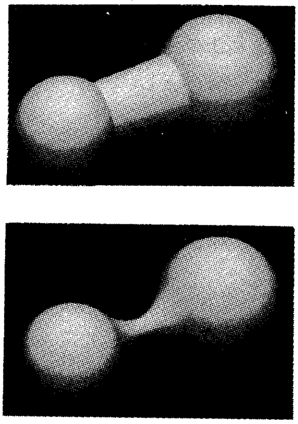

図 1: 初期曲面と本手法による変形曲面の例 1

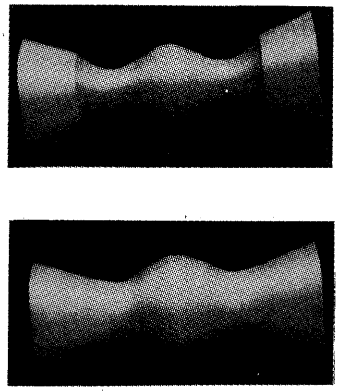

図 2: 初期曲面と本手法による変形曲面の例 2

## 6 おわりに

すでにデザインされた曲面が存在するとき、その曲面をオフセットすることにより、$G^1$ 接続を満たす曲面に変形する問題を、拘束条件下でのエネルギー最小化問題として考察した。わかりやすい大域的な幾何学的意味と物理的意味の両方をもち、かつ有限自由度の範囲では、それを最小にする変形が計算可能であるような変形エネルギーを提案した。これにより、$G^1$ 接続を満たす曲面であって、元形状の大域的な特徴を反映した曲面であり、また、それへの変形が直感とあう曲面が得られた。特別なパラメトリック曲面に対して、実際にそのような変形曲面を計算して、この手法の有効性をみた。

## 参考文献


[1] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1984.

[2] N. J. Lott and D. I. Pullin, Method for fairing B-spline surfaces, Computer-Aided Design, 20 (1988), 597-604.

[3] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[4] D. Terzopoulis, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer, Elastically deformable models, Computer Graphics 21 (1987), 205-214.

[5] W. Welch and A. Witkin, Variational surface modeling, Computer Graphics 26 (1992), 157-166.