グラフィクスとCAD 64－3
（1993．8．19）

フラクタル・レイトレーシング法

青山 智夫
日立コンピュータエンジニアリング（株）

複素漸化式を用いて複素力学系を定義しフラクタル画像を生成する方法がある．この方法は種々の修飾を行うことにより，ほとんど無限と思える図形を生成できる．この図形生成手段を，彩色，動画像化する際の問題点を考察した．

Fractal Ray－Tracing Method

Tomoo Aoyama
Hitachi Computer-Engineering Co.Ltd.
Horiyamashita 1, Hadano, Kanagawa, 259-13, Japan,

We had studied physical meanings of the complex dynamical-system, then, had found various modification techniques in order to generate fractal-patterns. The techniques gave many impressive ones that belong to the difference categories. In this paper, we try to study the painting method for the fractal-patterns.

First, we divide the method into two classes, the one has relation to the translation of the pixel-value, and the other is connected to the palette-register.

Second, we make the series of the painted patterns into a movie. Making the movie, we examine the physical meaning between the variables constructed fractal-patterns and the properties of the driving-time. During the examination, we found that the relation of cause and effect is important, and the causality become fixed on representations of the movie.

１．序

複素漸化式を用いて複素力学系を定義しフラクタル画像を生成する方法がある．[1)] 複素漸化式では種々のパラメータを式の中に埋め込み，それを変化させて無限の図形を生成できると言われている．しかしそういう方法では，画像に「フラクタルらしさ」が付きまとう．パラメータを換えていっても漸化式が同じならば，映像を構成する本質が同じなので画像に「それらしさ」が付きまとうのは当然かもしれない．

「らしさ」から逃れるためには，パラメータ導入とは違った方法で複素力学系を修飾する必要がある．その一つに生成する複素変数集合 $\{Z_j\}$ を仮想的な光線の複素平面上に記されたの跡になぞらえ，物理的な光線のさまざまな物体との相互作用の類推を仮想光線に適用して，複素漸化式に作用する演算子を追加していく方法がある．[2)] この方法をフラクタル・レイトレーシング（法）と言う．フラクタル・レイトレーシング法は「らしさ」のない画像をほとんど無限に生成するが，図形の彩色，動画化については何も示唆しない．
本論文はフラクタル・レイトレーシングの彩色，動画像化について考察する．

２．彩色法

色は物理的観測量とは言い難いので，これを何らかの量あるいは指標に変換してフラクタル画像に結びつけることに意味はない．しかしフラクタル画像を見やすくするための彩色を否定する根拠もない．
そこで科学的な目的から逸脱するがフラクタル画像を彩色する方法を考えることにしたい．彩色には明暗と色相の２つの側面がある．

まず明暗について論じる．出発点はフラクタル・レイトレーシング法から得られる画像である．これを元画像ということにする．この画像は従来のフラクタル生成法による画像を含む．元画像は描画領域に対応する生成複素変数の跡の集合 $\{Z_j\}$ と漸化式中断離散時間値 $\{j\}$ の２種類のデータで構成されている．フラクタル・レイトレーシングでは画像を構成するピクセルの明るさは，

$$G = g\,(Z_j,\ \eta,\ \theta,\ ,\ ,\ ), \qquad (1a)$$

$$G = g\,(j,\ \eta,\ \theta,\ ,\ ,\ ) \qquad (1b)$$

なる変換関数で計算される．η，θ，，，は変換関数を変形するパラメータである．集合 $\{G\}$ が画像である．
従来のフラクタル画像では式(1b)のみを使い $g=1$ あるいは $g=\mathrm{mod}$ といった何もしないか，せいぜい剰余によってレンジを拡大する程度の処理しかしていない．そういう方法は複素平面上の不動点近傍の複素力学系の振る舞いを調べるには適しているかもしれない．しかし集合 $\{G\}$ を絵として鑑賞するときには，限られた世界しか映像化していないので，最適な方法ではない．一例を挙げると，マンデルブロー集合フラクタルの場合，集合そのものより周辺の発散方向にある領域に見いだされる図形の方が興味深い形をしていることが多い．その周辺領域を強調して明示する方法を考えて見たい．

複素力学系では漸化式を規定回数だけ計算すると描画範囲｛C｝に対応する｛Z_J｝を得る．計算の途中で｜Z_j｜がある値を超えると漸化式の計算を中断してDO制御変数の値jを得る．これが式(1b)のjである．ただしj≦Jである．Z_Jについてはほとんど画像生成に使用されていない．
そこで，jよりもZ_Jを主体に考えてみたい．マンデルブロー集合の内部は定義からいって均一な色で塗られるべきものである．しかしこれは無限の離散時間の場合である．フラクタル・レイトレーシングのように有限の離散時間，時空間を使用している場合は，不動点に収斂あるいは遠ざかる速さのような量に意味がある．すなわち「適当な関数によって集合の内部」を表示することが可能である．それには画像表現のダイナミックレンジ拡大が必要である．

画像の明暗階調数拡大といってもディスプレイの階調数（D）が増えるわけではないので，変換関数gに非線形なものを採用する．
非線形関数の中では反比例関係にある関数を考えてみたい．反比例関数は線形＝比例とはもっとも違う種類の一つである．いささか天下り式であるが，

$$G=\mathrm{mod}\left(\left[q\left(Z_r^{2}+\varepsilon\right)^{-1}+q\left(Z_i^{2}+\varepsilon\right)^{-1}\right],\ D\right), \tag{2a}$$

$$G=\mathrm{mod}\left(j,\ D\right) \tag{2b}$$

のように決める．ここでZ_r，Z_iはZ_Jの実部，虚数部である．実数定数qは計算される画像をみて決定する．εは除算のオーバフローを防止する正の小さい数である．[]はガウス記号である．
式(2a)はZ_Jが原点に近いとき急激に大きくなる性質がある．フラクタル漸化式では $J\to\infty$ で $Z_J\to 0$ となる傾向があるので，それを打ち消し，Zの原点近傍の複雑な様相を示す機能を期待する．

また j 値については，化学などで非常に広範囲の現象を図示するときに使う対数圧縮法，

$$G=\mathrm{mod}\left(\left[q\times\log(j)\right],\ D\right) \tag{3a}$$

$$G=\mathrm{mod}\left(\left[q\times\{\log(j)\}^{1/2}\right],\ D\right) \tag{3b}$$

$$G=\mathrm{mod}\left(\left[q\times\left|\log\{\log(j)\}\right|\right],\ D\right) \tag{3c}$$

が有効である．qは実数係数である．マンデルブロー集合のようなフラクタルでは，$J\to\infty$ で $Z_J\neq\infty$ となる近傍でj値の増大が著しく単純剰余関数ではランダムドットパターンになってしまうが式(3a)～(3c)はそれを巧く表現する．式(2a),(3b)を使用した画像を付録の図1,2に示す．

次に色相について論じる．元画像は変換関数のよって「なんらかの順序」に変換されて画像｛G｝を構成している．ここまでは｛G｝要素は単なる順序の意味をもつ数字である．この数字の順序を人間が認識できる実際の色彩に変換するのがパレットレジスタである．表現色はパレットレジスタ数に依存する．パレットレジスタ数は計算機アーキテクチャによって決まっている．色彩の順序性には特に定説はないようである．従ってレジスタにどういうRGB値を設定するかは個人の美的感覚による．表1にCIEのRGB表色系を

考慮した常識的な一例を示した．これが良いという根拠はない．ディスプレイには個体差が相当あるのでカスタマイズする方が良い．

上記に示した変換関数とパレットレジスタ変換によって，複素力学系の計算結果がディスプレイに表示でき，それを絵として鑑賞できるようになる．

表１．８色／4096色の場合のパレットレジスタ値（ＢＧＲ順，16進表示）

	sober-full-color	mild gray	series between red and yellowish-white
PL(0)	000000	000000	000000
PL(1)	060005	040304	000007
PL(2)	060400	060505	00020C
PL(3)	060901	080807	00060F
PL(4)	0D0E0A	090A09	00080F
PL(5)	070E0E	0A0C0C	000C0F
PL(6)	000A0C	0C0D0E	080E0F
PL(7)	000108	0E0E0F	0D0F0F

	series between blue and pale-white	pale-green-series	series between brown and yellowish-green	wine-red series
PL(0)	000000	000000	000000	000000
PL(1)	070000	000700	00070A	010005
PL(2)	0C0200	020C00	00090E	030007
PL(3)	0F0600	060F00	000C0E	060009
PL(4)	0F0800	080F00	000F0F	08010B
PL(5)	0F0C00	0C0F00	070E0C	0A020D
PL(6)	0F0E08	0E0F08	0A0E0C	0A0A0E
PL(7)	0F0F0D	0F0F0D	0D0E0D	0F0E0E

３．動画化

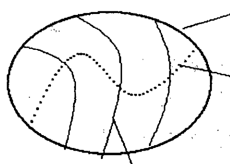
フラクタル画像を動画化する場合，単にフラクタル画像を並べて連続的にディスプレイに表示すれば良いというものではない．そういうことを行っても，動画化によって何が，どういう構造が明らかになったのかということに答えていない．

ある事象を動画によって表示するという前提に，動画操作を進行させうる時間が存在し，それが一瞬一瞬の画像を構成した変数とどういう係わり合いを持っているのかを定義できる必要がある．その考察時，因果律を検討する必要がある．

現象を目撃したとき，原因は何かという疑問が常に生じる．あまりにも
そういう物の見方に慣れさせられてしまったので，無意識のうちに事象の変遷を
原因と結果という観点で理解してしまう．そういうことに意味があるのは原因が
限定された範囲にある多数の結果を生じるときである．多数の結果を得ることの
背景に現象の再現可能性が要請されている．すべての原因が再現されたとき，
結果はその本質的な様相で再現されなければならない．それらが満足され，範囲
が極めて限定され，多くの測定の結果が１点に収斂するような振る舞いをする
とき，原因は１つの結果を生じるという．このときは因果律が成立する．
原因が複数の結果を必ず生成し，結果が観測対象量の張る空間の内部に特定の
構造を呈することなく分布し，構造を算出するいかなる方法も存在しないこと
が証明されるか自明ならば，因果律が成立するとは言えない．しかし
そのような状況であっても，自然界に一定不変に存続し続けるものはなく，
あらゆるものは絶えず変換し運動し，変化し，既存の存在がない無から変化を
生じるものはなく，またいかなるものもその後に痕跡を残さず消滅することは
ないという自然の性質に矛盾することはない．[5] 自然の質的な無限性を表わそう
とする物理法則からみれば，現象を表わす変数の間に完全な一対一応を考え得る
ことは一つの抽象にすぎないのであって，無限の時空間に当てはまるものでは
ない．運動の基準尺度の時間ですら，永遠の過去から未来に永久に流れてゆく
変量ではない．[4]

マンデルブロー集合を生成する漸化式 $Z_{j+1}=Z_j^2+C$ は離散時間の表象
ｊが大きくなるときは，複素平面上の一点から一点を生じる．
しかし時間を逆にｊを小さくなる方向に進めると，$Z_j=\pm(Z_{j+1}-C)^{1/2}$．
ゆえに，Z_{j+1}になるZ_jは２つある．２つのZ_jは対等で他方を必要とせずに，
Z_{j+1}を生成する．これは「現象が生じる原因が複数ある系」の記述である．
これは一例であるが，該当する複素力学系は非常に多い．
漸化式と離散時間を結合した複素力学系では時間の方向について非対称で，
過去に向かって原因を追跡する操作は発散する．運動方程式，相対論，量子力学
のような物理法則は時間対称であるが，熱力学では事実上非対称になっている．
しかし複素力学系は熱力学のように相変化によって新しい質的変化を生じると
云う訳ではない．多原因一結果の場合も因果律が成立するが，その系の動画像は
たまたまそういう画像変遷が可能であったことを示す一例にすぎない．

フラクタル画像の生成法を複素力学系とみなすとき，Ｚの添字ｊは系を
発展させる変数であった．この変数は整数で事象に独立な増加するだけの存在で
ある．フラクタル画像を生成した空間を一個の閉じた独立系とするならば，
現象 $\{Z_j\}$ を記述するのに便利な変数はZ_jを計算する関数に関連せずに
増加するだけのＺの添字ｊである．それを離散時間と仮称した．
時間，事象，空間を図示すれば，



である．

漸化式に多価関数が含まれるときは時間順行時に「複数の未来が存在する系」を記述することになる．そこでは因果律が成立しない．漸化式適用結果が1:nになるような複素関数を使っても，一つの Z_0 から可算無限個の位置 $\{Z_\infty\}$ が有限領域に収斂するならば，図形を描くことはできる．
しかし一般には収斂の保証はできない．従って多価関数を使って図形を得るのは極めて困難である．
この厄介な問題をマンデルブローは分解可能な力学系で，「異なる可能性の有限集合の中から選ぶ」ことが必要としている．[3]　選択の多様さがさまざまな画像を生成する基になる．

フラクタル生成の複素漸化式を力学系と言いたいのなら，情報の完全な記述から，ある種の変数の存在を何らかの手段で取り除いた不完全化が必要である．その不完全化がZの添字＝単なる変数を（離散）時間にする．[4]

複数のフラクタル画像を連結して一個の動画像とするときには時間Tが必要である．離散時間はTの関数となる．ここで時間Tとフラクタル・レイトレーシングの操作変数との関係を表2にまとめた．

表2．時間Tとフラクタル・レイトレーシング法の画像構成要素との関係

構成要素	連続関数	離散関数	因果律
漸化式（光線記述式）	○	△	
物体（影に関する）	○		○
〃（スペクトル変化）	○	△	○
〃（反射屈折）	○		○
離散時間		○	
描画領域	○		○
変換関数	○		
パレットレジスタ		○	

表2において○印は「それが可能なこと」を示す．△印は不可能ではないことを示す．

対象を離散関数にまで広げれば，フラクタル画像のどのような構成要素も動画化して表示できる．しかし動画化して自然に鑑賞できるのは因果律が余り不自然でない場合：フラクタル・レイトレーシングを実施した時空間内に，構成要素があたかも３次元空間内に物体が存在するような形態で存在し得る場合に限られる．それを右端に○印でしめした．この部分は実際に動画化し，動画像はデジタル情報として3M－DC2120(XIMAT)データカートリッジ，アナログ情報としてＶＨＳビデオテープに記録した．このときスキャン・コンバータを使用した．動画像のサイズは500×400ドットである．

無印の部分は時間Ｔと共に，

①仮想光線の運動方程式が変化する系，

②フラクタル・レイトレーシング法が成立している時空間容量の変化，

③現象を変換して画像化するシステム自体の変遷，

の映像が示されることになる．概念としては面白いが，実際に映像化してみても，人間の感覚からかけ離れているのでそれほど興味深くなかった．

４．まとめ

フラクタル・レイトレーシング法の彩色法，動画化を考察し，一試案を提示した．試案によって作成した画像を付録に示す（原画はカラー）．

フラクタル・レイトレーシング法はフラクタル概念を拡張したものではない．しかし複素数列生成を修飾する手段，生成数列から画像を構成する際に導入できる種々の変換手段を備えているので，映像表現力が従来のフラクタル生成法より飛躍的に大きくなっている．

文献

1)宇敷重広，「フラクタルの世界」，日本評論社（東京），1987.
西沢清子，関口晃司，吉野邦生，「フラクタルと数の世界」，海文堂（東京），1991.

2)青山智夫，水上真澄，「フラクタル・レイトレーシング法」，情報処理学会研究報告，93-CG-61,pp.17，1993.
青山智夫，「フラクタル・レイトレーシング法」，第46回情報処理学会全国大会講演論文集(2)，2-417，1993.

3)Ｂ．マンデルブロー，広中平祐監訳「フラクタル幾何学」，日経サイエンス（東京），1985.

4)佐藤文隆，「力学モデルにおける時間」，情報処理，vol.33，pp.326(1992).

5)Ｄ．ボーム，村田良夫訳，「因果性と偶然性」，東京図書（東京），1969.