

NURBS 境界 Gregory 曲面を用いた 曲面の形状制御

渡辺大地*、北川健二*、千代倉弘明*、曾根順治**

*慶應義塾大学環境情報学部、**東芝生産技術研究所

アブストラクト

工業製品の形状デザインには多様な曲面形状が使われているため、デザインにおいて容易に曲面を表現できる3次元CADシステムが必要とされている。本論文ではその新しい手段として、NURBS 境界 Gregory 曲面を用いて形状を制御する方法を提案する。この曲面は4本のNURBS曲線を境界線とし、NURBS曲面と容易に接合することができる。本論文では曲面形状を制御する2つの手法を述べる。一つめは、境界上の接線ベクトルの値を変化させて制御する方法である。もう一つは、曲面上のある一点を移動させることにより曲面の中央部分を制御する方法である。また、このシステムを用いると曲面のパラメータ線や曲率を表示しながら、リアルタイムに曲面の制御ができる特徴を持つ。我々はこの機能を3次元ソリッドモデラ DESIGNBASE 上に構築した。

Surface Control using a NURBS Boundary Gregory Patch

Taichi Watanabe*, Kenji Kitagawa*, Hiroaki Chiyokura*, Junji Sone**

*Faculty of Environmental Information, Keio University,

5322 Endo, Fujisawa, Kanagawa 252 Japan

TEL 0466-47-5111, FAX 0466-47-5041. E-mail: t90635tw@sfc.keio.ac.jp

**Manufacturing Engineering Research Center, TOSHIBA Corporation,

33 Shinisogo, Isogo-ku, Yokohama, Kanagawa 235 Japan

Abstract

Since the body shape of industrial products has various kinds of free form surfaces, designers need the 3D CAD system in which they can easily design the surfaces. This paper proposes a new method of modeling the free form surface with a NURBS boundary Gregory patch. This patch bounded by four NURBS curves can be easily joined with the other surfaces with G^1 continuity. In this paper, two methods of modifying the surface shape are described. In one method, modifying the direction and the length of the tangent vector on the boundary, the surface is changed. The other method is to control the center area shape of the surface, moving the point on the surface. We have developed these capabilities on the solid modeling toolkit: DESIGNBASE. This system enable designers to dynamically control the surface shape, observing the parametric lines and curvature radii.

1 はじめに

最近の多くの CAD システムでは自由曲面の表現法として Bézier 曲面 [1, 2, 3] や NURBS [14] 曲面が用いられている。Bézier 曲面を用いたこれまでの手法では、曲面を生成する前に多くの交差点からなる曲線メッシュを生成しなければならない。形状修正を行う場合、メッシュを構成する多くの曲線を整合して変形する必要がある、その作業は非常に困難なものである。複数の曲面をなめらかに接続するためには、 G^1 あるいは G^2 連続性を保つように Bézier 曲面の制御点を移動する必要がある。その場合、好ましくないうねりが生ずる可能性がある。

NURBS 曲面は 4 本の曲線列によって構成される境界稜線により、大きな面を表現することが可能である。NURBS 曲面は局所変形が容易であるという大きな利点を持っているが、面内の広い領域を制御するためには多くの制御点を整合させて移動させる必要がある。一方、4 本の曲線列からなる境界線から曲面を生成する手法として一般 Coons 曲面 [8, 9] がよく使用される。この曲面は境界を横断する微分ベクトルの他に角におけるツイストベクトルを与える必要がある。ツイストベクトルの幾何的な意味が不明瞭なことから、一般 Coons 曲面の制御は容易ではない。

それらの曲面生成および制御法の問題点を解決する手法として、NURBS 境界 Gregory (NBG) 曲面を用いた曲面生成手法を提案する。NBG 曲面は境界稜線、微分ベクトルともに NURBS 曲線を表す制御点によって表現されるので、この曲面の形状把握は容易である。さらに、それぞれの境界曲線の次数は同じでなくてもよく、ノットベクトルも一致させる必要はない。このことから NURBS 曲面を生成する場合に行なうノット挿入や次数上げの必要はない。NBG 曲面では単純な NURBS 関数によって境界稜線上の微分ベクトルを表現するため、NBG 曲面間の接続は容易である。

本論文では、面形状の変形法を 2 つ提案する。ひとつは、境界稜線上の任意の点に接線ベクトルを与える方法である。与えられた接線ベクトルの方向と長さを制御することにより、曲面の境界付近形状を容易に変化させることができる。もうひとつは、曲面上の任意の点を移動させることにより曲面形状を制御する手法である。この手法によって曲面の内部形状を変形することができる。これらの機能はソリッドモデラ DESIGNBASE の上で開発された。このシステムでは、パラメータ線や曲率をリアルタイムに表示しながら曲面形状を容易に制御することができる。

2 NURBS 境界 Gregory 曲面の構成方法

ここではまず、NURBS 曲線上に NURBS 曲面を張る上での問題点について述べる。次に NBG 曲面でのそれらの問題の解決法を示す。

2.1 NURBS 曲線からの曲面作成における問題点

図 1 は 4 本の NURBS 曲線 $C_i, i=0, \dots, 3$ によって囲まれた面を示している。これらはそれぞれ制御点数がお互いに異なり、ノットベクトルや次数も同様に異なるとする。このような面上に NURBS 曲面を構成する場合、次のような問題点が生ずる。

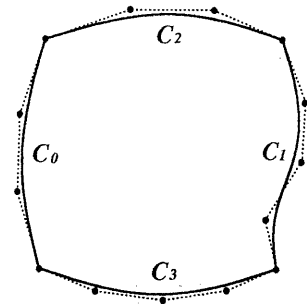


図 1 NURBS 曲線によって構成された曲面

1. 図 1 において、NURBS 曲面は C_0 と C_1 の制御点数、ノットベクトルおよび曲線次数のいずれをも一致させる必要がある。 C_2 と C_3 についても同様である。これらの条件を満たすためには、ノット挿入を行ったり曲線の次数を上げたりする必要がある [7]。この操作を行うと、多くの制御点が NURBS 曲面上に生成されてしまう。
2. 不規則なメッシュ上になめらかに曲面を生成する手法 [5, 12, 13] として様々な研究がなされている。これらの研究においては、すべて境界は多項式曲線に限られているため、NURBS 曲面のような有理式で表現された曲面には適用できない。
3. NURBS 曲面は次のような式で表される。

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j}}$$

ここで、 $N_{i,k}(u)$ 、 $N_{j,l}(v)$ は B-spline 基底関数を、 n と m はそれぞれ u 、 v 方向の制御点の数を、 k と

l はそれぞれ u , v 方向の次数を表している。また、微分ベクトル式 $S_u(a, b)$ を次のように定義する。

$$S_u(a, b) = \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=a, v=b}$$

このとき、微分式 $S_u(0, v)$ は非常に複雑なものであり、次数は元の曲面式のそれよりも上がってしまうため、連結手法は複雑なものとなる。

2.2 NURBS 境界 Gregory 曲面の定義

NBG 曲面は NURBS 曲線の境界稜線上に大きな曲面を表現することが可能である。図 2 に示されているように、8 列の制御点 $P_{i,j}$ によって NBG 曲面は構成される。 $P_{0,j}, P_{3,j}, P_{4,j}$ および $P_{7,j}$ の 4 列の制御点は曲面の境界線を表現する NURBS 曲線の制御点である。また、 $P_{1,j}, P_{2,j}, P_{5,j}$ および $P_{6,j}$ によって接線ベクトルが設定される。

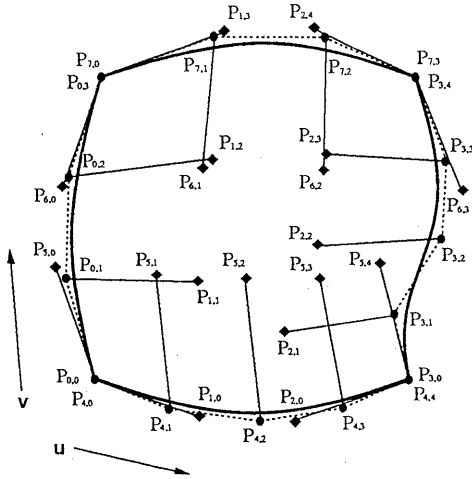


図 2 NURBS 境界 Gregory 曲面の概要図

境界曲線式は次のように表される。

$$S(0, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_0} N_{0,i}(v)w_{0,i}P_{0,i}}{\sum_{i=0}^{n_0} N_{0,i}(v)w_{0,i}}$$

$$S(1, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_3} N_{3,i}(v)w_{3,i}P_{3,i}}{\sum_{i=0}^{n_3} N_{3,i}(v)w_{3,i}}$$

$$S(u, 0) = \frac{\sum_{i=0}^{n_4} N_{4,i}(u)w_{4,i}P_{4,i}}{\sum_{i=0}^{n_4} N_{4,i}(u)w_{4,i}}$$

$$S(u, 1) = \frac{\sum_{i=0}^{n_7} N_{7,i}(u)w_{7,i}P_{7,i}}{\sum_{i=0}^{n_7} N_{7,i}(u)w_{7,i}}$$

ここで、 $N_{j,i}(v)$ は B-Spline 基底関数を示す。また、 n_0, n_3, n_4, n_7 はそれぞれ境界曲線上の制御点の数を、 $P_{0,i},$

$P_{3,i}, P_{4,i}, P_{7,i}$ は境界曲線上の制御点を、 $w_{0,i}, w_{3,i}, w_{4,i}, w_{7,i}$ は制御点の重みを表す。

このとき、それぞれの境界曲線上の微分ベクトル関数は次のように表される。

$$S_u(0, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_0} N_{0,i}(v)w_{0,i}(P_{1,i} - P_{0,i})}{\sum_{i=0}^{n_0} N_{0,i}(v)w_{0,i}}$$

$$S_u(1, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_3} N_{3,i}(v)w_{3,i}(P_{3,i} - P_{2,i})}{\sum_{i=0}^{n_3} N_{3,i}(v)w_{3,i}}$$

$$S_u(u, 0) = \frac{\sum_{i=0}^{n_4} N_{4,i}(u)w_{4,i}(P_{5,i} - P_{4,i})}{\sum_{i=0}^{n_4} N_{4,i}(u)w_{4,i}}$$

$$S_u(u, 1) = \frac{\sum_{i=0}^{n_7} N_{7,i}(u)w_{7,i}(P_{7,i} - P_{6,i})}{\sum_{i=0}^{n_7} N_{7,i}(u)w_{7,i}}$$

このように、NBG 曲面は容易に制御点の指定ができる。

2.3 NURBS 境界 Gregory 曲面の構成法

NBG 曲面は一般境界 Gregory 曲面 [11] の拡張である。NBG 曲面は三つの曲面式から構成される。

$$S(u, v) = S^a + S^b - S^c.$$

三つの曲面式の制御点を図 3 に示す。 S^a は NBG 曲面の境界曲線 $S(0, v), S(1, v)$ および接線ベクトル $S_u(0, v), S_u(1, v)$ より表現され、その境界曲線と接線ベクトル式は NURBS によって表現される。 S^b に関して同様に、 $S(u, 0), S(u, 1), S_v(u, 0), S_v(u, 1)$ によって表現される。 S^a の計算法は次のとおりである。

$$S^a(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i(u)C_i(v)}{\sum_{i=0}^3 B_i(u)w_i(v)}$$

ここで、

$$C_j(v) = \sum_{i=0}^{n_j} N_{j,i}(v)w_{j,i}P_{j,i},$$

$$w_j(v) = \sum_{i=0}^{n_j} N_{j,i}(v)w_{j,i}, \quad j = 0, \dots, 3.$$

ここで、 $B_j(v)$ は Bernstein 基底関数である。次に S^b の計算法を示すと次のとおりである。

$$S^b(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i(v)C_i(u)}{\sum_{i=0}^3 B_i(v)w_i(u)}$$

ここで、

$$C_j(u) = \sum_{i=0}^{n_j} N_{j,i}(u)w_{j,i}P_{j,i},$$

$$w_j(u) = \sum_{i=0}^{n_j} N_{j,i}(u)w_{j,i}, \quad j = 4, \dots, 7.$$

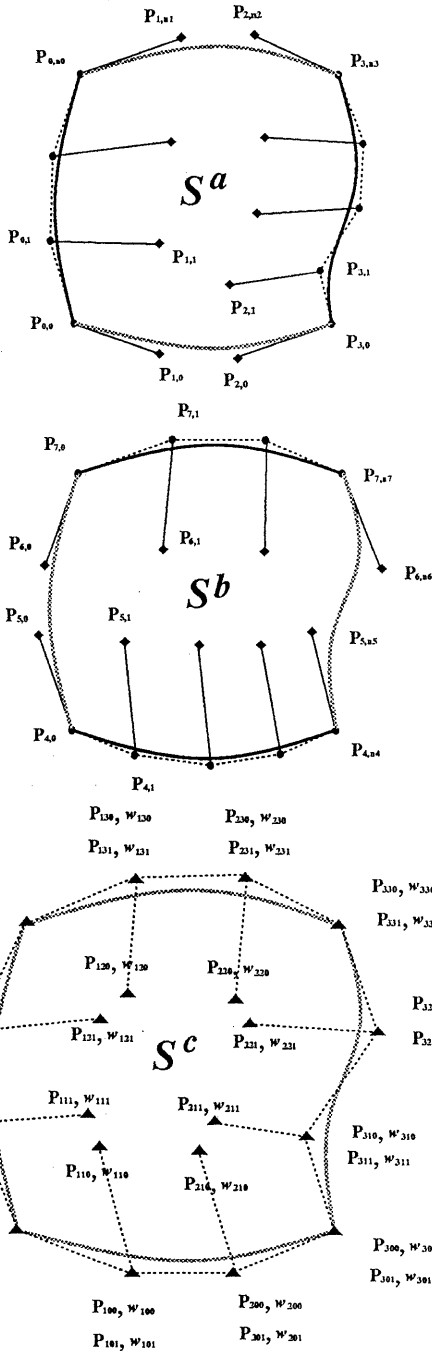


図3 NURBS 境界 Gregory 曲面の3個の構成要素曲面

S^c は S^a と S^b の共通成分であり、3次の有理境界 Gregory (RBG) 曲面 [10, 4, 6] である。 S^c の制御点とその重みは S^a と S^b から設定される。その計算法は次に示すとおり

である。

$$S^c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(u) B_j(v) Q_{ij}(u, v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(u) B_j(v) w_{ij}(u, v)},$$

if $i = 0, 1$ and $j = 0, 1$,

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{u^2 P_{ij0} w_{ij0} + v^2 P_{ij1} w_{ij1}}{u^2 + v^2},$$

$$w_{ij}(u, v) = \frac{u^2 w_{ij0} + v^2 w_{ij1}}{u^2 + v^2},$$

if $i = 2, 3$ and $j = 0, 1$,

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{ij0} w_{ij0} + v^2 P_{ij1} w_{ij1}}{(1-u)^2 + v^2},$$

$$w_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{ij0} + v^2 w_{ij1}}{(1-u)^2 + v^2},$$

if $i = 0, 1$ and $j = 2, 3$,

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{u^2 P_{ij0} w_{ij0} + (1-v)^2 P_{ij1} w_{ij1}}{u^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{ij}(u, v) = \frac{u^2 w_{ij0} + (1-v)^2 w_{ij1}}{u^2 + (1-v)^2},$$

if $i = 2, 3$ and $j = 2, 3$,

$$Q_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 P_{ij0} w_{ij0} + (1-v)^2 P_{ij1} w_{ij1}}{(1-u)^2 + (1-v)^2},$$

$$w_{ij}(u, v) = \frac{(1-u)^2 w_{ij0} + (1-v)^2 w_{ij1}}{(1-u)^2 + (1-v)^2}.$$

2.4 NURBS 境界 Gregory 曲面の特徴

NBG 曲面は次に挙げるような特徴を持っている。

1. 曲線列を補間する曲面式として一般 Coons 曲面が有名であるが、ツイストベクトルの設定が難しい。一方 NBG 曲面ではすべてが制御点で表現されているので、形状を容易に把握することができる。
2. NURBS 曲面に比べて曲面を表現する情報量が少ない。例えば、境界曲線が u 方向と v 方向にそれぞれ 20 個ずつの制御点を持つとき、NURBS 曲面においては 400 個の制御点が必要となる。このときノットベクトルが異なる場合は、ノット挿入の後 1600(40x40)個の制御点が必要とする。一方で NBG 曲面ではノット挿入の必要もなく、わずか 192 個の制御点で構成できる。
3. 接線ベクトル関数の次数はその境界曲線の次数と等しく、その表現式も簡単であるため、接線ベクトルによる曲面制御も容易である。その上、隣接する NBG 曲面と G^1 連続に接続することも容易に行える。

3 NURBS 境界 Gregory 曲面における形状制御方法

この章では、曲面の形状を制御する2つの方法を提案する。ひとつは、NBG 曲面の境界曲線上の任意の位置の微分ベクトルを制御する方法、もうひとつは、曲面の通過点を移動して、曲面中央付近の形状を制御する方法である。

3.1 曲面境界領域の形状制御

接線ベクトルを調整する方法を解説する前に曲面境界のパラメータ調整の方法について述べる。複合曲線に囲まれた領域になめらか曲面を張る時に、パラメータ調整は重要である。図4(a)は4個の複合曲線を内挿したNBG曲面を示す。図4(a)では、 P_1 のパラメータ値が、 P_2 の値と異なるために、曲面中のパラメータ線がうねっている。このねじれを防ぐため、 P_1 と P_2 が同じパラメータ値になるようにパラメータ調整を行う。まず、 P_1 と P_2 がNURBS曲線の制御点と一致するまで、境界曲線にノットを挿入する。次に、 P_1 と P_2 のノット値を等しくする。最後に、曲線全体のノットベクトル値を基の曲線形状を保つために比例配分する。図4(b)はパラメータ調整後の形状である。

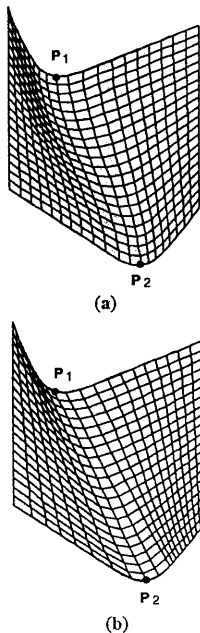
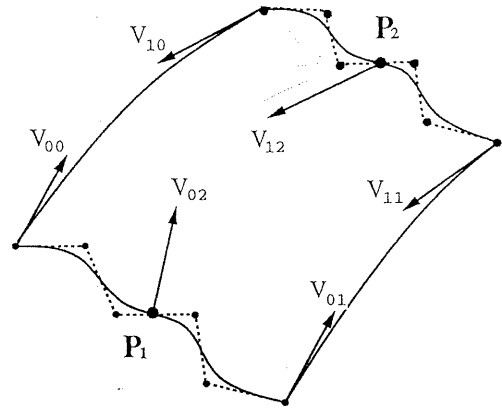
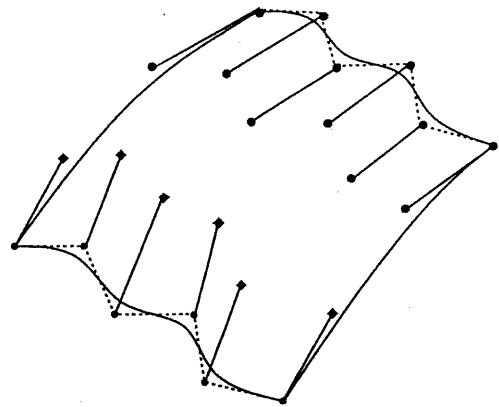


図4 対角の2頂点間の曲面のパラメータ調整



(a) Tangent vectors assigned by a designer



(b) Control points of an NBG patch

図5 接線ベクトル関数の構成方法

次に、境界曲線上の接線ベクトルの長さや方向を変化させて、曲面の形状を制御する方法を述べる。これは、境界付近の曲面形状制御に有効な方法である。図5(a)にNURBSで表された境界曲線とユーザーが指定した接線ベクトル V_{02} と V_{12} を示す。接線ベクトルの始点 P_1 と P_2 は、パラメータ調整を施して、同じパラメータ値を持つように調節されている。 V_{00} 、 V_{01} 、 V_{10} と V_{11} は、境界曲線の端点の接線ベクトルを示す。接線ベクトル V_{02} が決まると、 V_{00} 、 V_{02} と V_{01} をたとえば3次のBézier関数で補間して接線ベクトル関数を得ることができる。NBG曲面では、それぞれの辺の境界稜線と接線ベクトル関数の間で、ノットベクトルおよび曲線次数が一致している必要がある。そのため、接線ベクトル関数

の分割を行なう。図 5(b) は接線ベクトル関数の制御点を示す。本システムでは、指定した 2 ベクトル間のパラメータ線の変化をリアルタイムに観察しながら、接線ベクトルの長さや方向を修正し、曲面の形状を制御することができる。また、そのとき同時にパラメータ線の曲率も表示する。曲率は曲面上のうねりを発見するのに役立つ。図 6 は接線ベクトルの修正による曲面の制御例である。図 6(a) において、曲率の変化はスムーズではない。図 6(b) に示すように接線ベクトルの終点 P を P' まで持ち上げることで、曲率変化の少ない形状を得ている。

図 7(a) はフィレットを含む曲面を示す。これまでは、このような曲面は複数の曲面に分けて構成していたが、NBG 曲面を用いると 1 つの曲面で表現できる。ここで、フィレット形状を保持するために、境界曲線上にいくつかの接線ベクトルを設けている。図 7(b) は曲面のパラメータ線と曲率を示している。

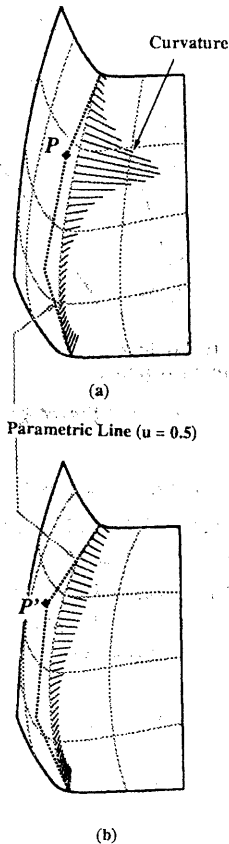
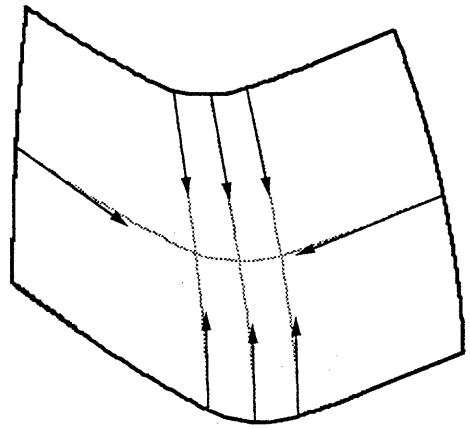
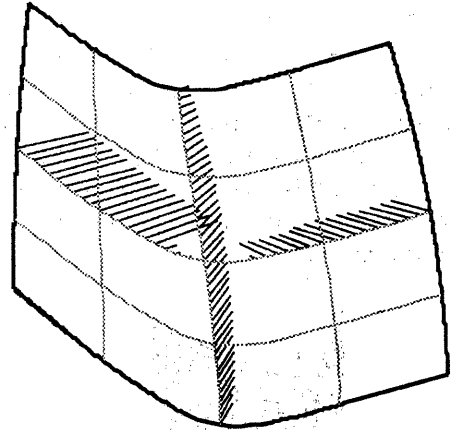


図 6 接線ベクトルの修正による曲面形状制御



(a) Derivative Vector



(b) Curvature radius

図 7 フィレット形状を持つ曲面

3.2 曲面中央部の形状制御

3 個の曲面から構成される NBG 曲面は境界曲線と接線ベクトル関数で構成されるため、曲面の中央部の形状制御が難しい。形状の制御性を向上させるため、共通曲面 S^c の次数上げを行う。共通曲面に 4 次の RBG 曲面を用いるならば、曲面の中央に制御点 P_{220} が現れ、中央部の形状を制御することができる。修正位置のパラメータ (u_0, v_0) と曲面の通過位置座標 P を任意に与えることによって、中央の制御点座標値 P_{220} を次式から求めることができる。

$$P(u_0, v_0) = S^a(u_0, v_0) + S^b(u_0, v_0) - S^c(u_0, v_0).$$

形状修正は、パラメータ線の動的変化を観察しながら曲面の通過点 P を修正する。また、パラメータ線の曲率も同時に評価できる。

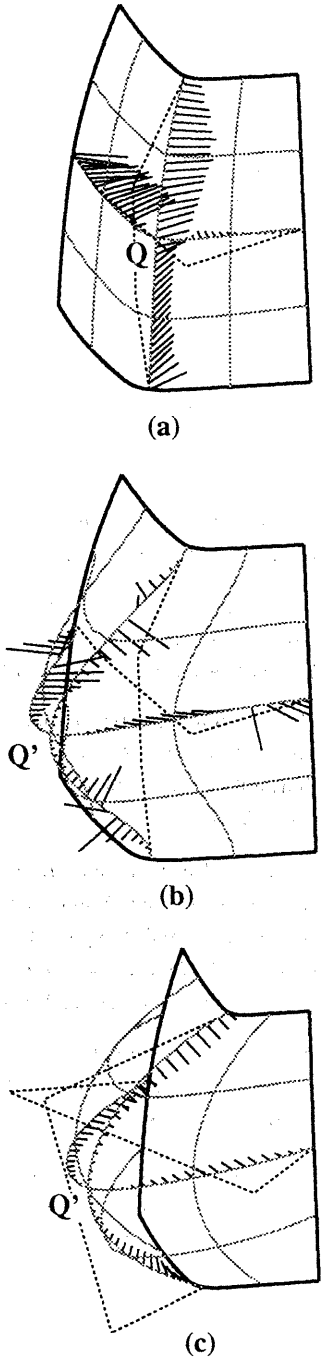


図8 中央通過点の修正による曲面形状制御

図8に中央通過点の修正例を示す。図中(a)は変形する前の形状と制御点 Q である。(b)は曲面中央の通過点 Q を法線方向に Q' まで移動した結果を示す。この図において、中央部の形状が盛り上がっている。(c)は境界の接線ベクトルを移動させて得た、スムーズな曲面を示す。このように、パラメータ線の曲率を観察することにより、曲面のスムーズさを評価することができる。

4 曲面作成の応用例

機械部品の設計において、輪郭稜線が五角形以上の面になる場合がある。そのような輪郭稜線によって囲まれた領域を表現するには、その領域を複数の4角形領域に分割して、分割したそれぞれの領域に曲面を生成するという方法があった。NBG曲面では、複数の曲線を一本の境界稜線として扱うことができるため4角形ではない領域も一枚の曲面として表現することができる。図9に五角形のNBG曲面の例を示す。

図10に一枚のNBG曲面によって表現されるフィレットの例を示す。NBG曲面は、複雑なフィレット曲面を一枚の面として表現することが可能である。

NBG曲面を工業製品に応用した例を図11に示す。

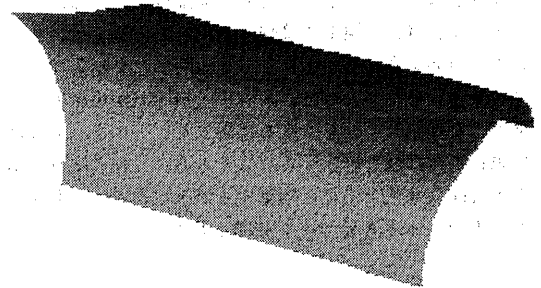


図9 五角形曲面

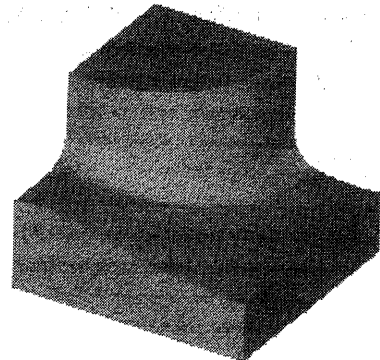


図10 フィレット例

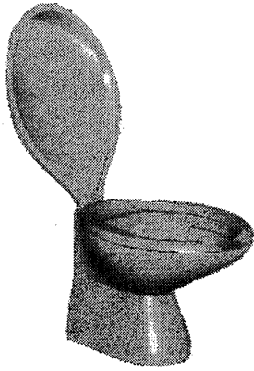


図 11 適用例 トイレ

5 まとめ

本論文では、NURBS 境界 Gregory 曲面を使った曲面のモデリング手法について述べた。

NBG 曲面を使うと、複数セグメントの輪郭線から一枚の大きな曲面を表現することが可能であり、かつ NURBS 曲面に比べてデータ量を少なく抑えることができる。さらに、微分ベクトルも単純で、曲面間の接続も容易である。

また、本論文では、二つの曲面制御方法を提案した。ひとつは、境界曲線上に接線ベクトルを設定して、その長さや方向を変えることによって曲面形状を制御する方法である。もうひとつは、ユーザーが曲面中央付近の一通過点を指定して、その点を移動することによって曲面中央付近の形状を修正する方法である。これらの制御法を CAD システム上に構築することによって、非常に有用なツールとなることが確認された。

謝辞

技術およびソフト開発についての研究討論をいただいた(株)リコー ソフトウェア事業部 今野晃市氏に、感謝の意を表す。

参考文献

[1] P. Bézier, *Numerical Control: Mathematics and Applications*, John Wiley & Sons, London, 1972.
 [2] P. Bézier, *The Mathematical Basis of the UNISURF CAD System*, Butterworths, London, 1986.

[3] P. de Casteljau, *Shape Mathematics and CAD*, Kogan Page, London, 1986.
 [4] H. Chiyokura and F. Kimura, Design of solids with free-form surfaces, *Computer Graphics*, 17, 1983.
 [5] H. Chiyokura, Localized surface interpolation for irregular meshes, *Advanced Computer Graphics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
 [6] H. Chiyokura, T. Takamura, K. Konno and T. Harada, G^1 Surface interpolation over irregular meshes with rational curves, *NURBS for Curve and Surface Design*, G. Farin, ed., SIAM, Philadelphia, 1991.
 [7] E. Cohen, T. Lyche and R. F. Riesenfeld, Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics, *Computer Graphics and Image Processing*, 14, 1980.
 [8] S. A. Coons, *Surface for Computer Aided-Design of space forms*, MIT Project MAC, TR-41, 1967.
 [9] A. R. Forrest, On Coons and other methods for representation of curved surfaces, *Computer Graphics and Image Processing*, 1, 1972.
 [10] J. A. Gregory, Smooth interpolation without twist constraints, *Computer Aided Geometric Design*, R. E. Barnhill and R. F. Riesenfeld, ed., Academic Press, New York, 1974.
 [11] K. Konno, T. Takamura and H. Chiyokura, A new control method for free-form surfaces with tangent continuity and its applications, *Scientific Visualization of Physical Phenomena*, N. M. Patrikalakis, ed., Springer-Verlag, Tokyo, 1991.
 [12] R. F. Sarraga, G^1 interpolation of generally unrestricted cubic Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, 4, 1987.
 [13] L. A. Shirman and C. H. Séquin, Local surface interpolation with Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design*, 4, 1988.
 [14] W. Tiller, Rational B-splines for curve and surface representation, *IEEE CG & A*, 3, (6), 1983.