

球の最密充填とDelaunay網による曲面の自動三角形メッシュ分割

嶋田 憲司

日本アイ・ビー・エム株式会社 東京基礎研究所

242 大和市下鶴間1623-14

曲面を解析用の三角形メッシュに自動分割する新しい手法を提案する。入力として、複数のトリム曲面上にわたって定義された領域と三角形の大きさの望ましい分布関数が与えられると、出力として以下の条件を満たす三角形メッシュが生成される：(a) 三角形要素の大きさの制御、(b) 曲面パッチ境界上でのメッシュの整合性、(c) 歪みが小さいメッシュ要素形状、(d) 反復的/局所的再メッシュ分割の機能。ここで提案する方法は、「隙間と重なりを最小化するように最密に球を配置してできるパターンは、歪みが小さいDelaunay 三角形と双対な Voronoi 多角形に似ている」というヒューリスティクスにもとづいて構成されたものである。

Automatic Surface Triangulation
via Close Packing of Spheres and Delaunay Net

Kenji Shimada

IBM Research, Tokyo Research Laboratory, IBM Japan, Ltd.

1623-14 Shimotsuruma, Yamato-shi, Kanagawa, 242, Japan

This paper describes a new computational method of fully automated triangulation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis. The method takes as input domain geometry and a node spacing function and then generates a mesh, or a set of connected triangles, which satisfies basic requirements such as: (a) precise control over node spacing, or triangle size, (b) node placement that is compatible to domain boundaries, (c) generation of well-shaped triangles, and (d) continuous remeshing and local remeshing capability. The proposed algorithm is developed based on the observation that a pattern of tightly packed spheres mimics Voronoi polygons, from which well-shaped Delaunay triangles are created by connecting the center points of these spheres.

1 はじめに

近年、形状の美しさと機能の向上を目的として、自動車や家庭電化製品を始めとする製品形状に複雑な自由曲面が多く使われるようになってきた。一般に、これらの曲面は設計時には Bezier, B-スプライン, NURBS などのパラメトリック曲面として CAD システム内で表現されるが、他方、解析のために有限要素法などを用いて製品性能を確認する際には別の形状表現、すなわちメッシュが必要となる。したがって設計と解析の工程を有機的に結ぶためには、CADにおける曲面形状から三角形メッシュへの効率良い自動変換の方法が求められている。

本論文では複数のトリム曲面パッチ — 部分的にトリミング曲線で切り取られたパラメトリック曲面パッチ — で表現された領域を、有限要素法などのための三角形メッシュに自動的に変換する方法を提案する。この方法の基本的な考え方は、我々が[1][2]で提案したバブル・メッシュ分割法（以下、b法と呼ぶ）であるが、本稿では複数のトリム曲面上領域の取り扱い方と、解析用の三角形メッシュに不可欠な以下の要件をいかに実現するかについて述べる。

三角形要素の大きさの制御

有限要素法などを用いた解析において、計算時間や記憶空間を増やさずに解精度を改善するには、領域全体にわたりノード間距離（すなわち三角形の辺の長さ）を連続的な分布関数にしたがってに変化させなければならない。この際、解析解の値が急に変化する領域では細かな三角形要素を、それ以外では粗い要素を使うことが大切となる。

メッシュの整合性

与えられたトリミング曲線上や、特に指定された点や曲線上にノードが正確に置かれていること。また、解析においてこれらの曲線上で境界条件を与えることができるように、各曲線の形状が三角形の辺の列としてメッシュ内に表現されていないとてはならない。

歪みが少ない三角形要素形状

一般に、メッシュを構成する三角形は可能な限り等辺に近いことが望ましい。なぜなら著しく歪んだ三角形要素は解析解の精度悪化を招くからである。

反復的・局所的再メッシュ分割

大変形を扱う解析などにおいては、メッシュ分割すべき領域形状と要求される三角形要素の大きさが徐々に変化することがある。この場合には、メッシュ分割を繰り返す必要があるが、この際に新しいメッシュを全く最初から

作り直すのではなく、直前のメッシュを活用して効率良く再メッシュ分割することが望まれる。また、特定の部分領域だけを局所的に再メッシュ分割する機能も解析用モデル作成の効率化に役立つ。

本論文の目的は、主に解析用のメッシュ作成を自動化するために、上記の要件を満たすような自動メッシュ分割法を提案することである。ただし、ここで述べる方法は、コンピュータ・グラフィックスにおける曲面表示や、新しい製造技術として近年注目を集めている三次元造形法（ラビッド・プロトタイピング）など、曲面の多面体近似を必要とする他の応用分野にも適応可能である。

2 従来のアルゴリズム

計算力学やCGの分野では、以下のような要素技術と、これらを組み合わせたメッシュ分割方法が提案されてきた。

- ・ Delaunay 網によるノード結合法 [3][4]
- ・ 中間軸 (medial axis) を用いた領域分割法 [5][6]
- ・ 関数写像法 [7][8]
- ・ アドバンシング・フロント法 [9][10]
- ・ 空間格子分割法 [11][12]

各詳細については[1][2]で述べたので本稿では繰り返さないが、従来法の典型的な問題点として：(a) 二次元平面領域が三次元領域のために開発されたためにトリム曲面に直接的には適用できない、(b) 領域境界近傍に歪んだ要素が集中して生成される、(c) 要素の大きさが連続的に制御できない、(d) 有効な再メッシュ分割の方法が考慮されていない、(e) 隣接する曲面パッチの境界上で隙間や重なりができる、などの問題点が挙げられる。

3 b法による曲面の三角形メッシュ分割法

3.1 トリム曲面三角形分割問題

ここでは、本論文で扱うメッシュ分割問題を明確にするために、アルゴリズムへの入力である「曲面上領域 G 」と「ノード間距離分布 $d(x,y,z)$ または $d(u,v)$ 」と、その出力である「三角形メッシュ」について説明する。

まず、メッシュ分割される曲面上領域 G は、複数の曲面パッチ上にわたる領域として与えられる。各曲面パッチは、二つのパラメータ u, v が張るパラメータ空間から三次元空間への写像 $S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ として定義されている。

曲面パッチ上の限定された領域を表現するために、各パッチの領域境界はトリム曲線 $C_i(s) = (x(s), y(s), z(s))$ によって与えられる。さらに、これ以外にも、領域内部に内部曲線 $C_i(s) = (x(s), y(s), z(s))$ や内部頂点 $V = (x, y, z)$ を必要に応じて定義できる。また、すべての曲線の両端には頂点 $V = (x, y, z)$ が存在するものとする。

もう一つの入力であるノード間距離分布 d は、メッシュを構成する三角形の大きさ、すなわち辺の長さの望ましい分布をパラメータ空間あるいは三次元空間の位置の関数として与えたものである。

このように曲面上領域 G とノード間距離分布 d が与えられると、出力として三角形メッシュが生成される。メッシュを構成する各三角形は、隣接する三角形とは二ノードとその間の一辺のみで接続されなければならない。また、次節で述べるように、b法においては、最密充填されたバブル（球）の中心点をとってメッシュのノードとするので、「ノード」と「バブル」は文脈から混乱がない場合には区別なく用いるものとする。

3.2 三角形分割手順

b法は、次の二つのステップからなる：(1) バブル（半径がノード間距離関数 d で与えられる球）を領域内に最密に充填する、(2) 各バブルの中心点にノードを配置し、これらを領域境界を考慮した Delaunay 三角分割法（制約付き Delaunay 法と呼ぶ）で結んで三角形メッシュを生成する。この方法は「バブル相互間の隙間や重なりを最小にするように最密に配置してできるパターンは、歪みが小さい Delaunay 三角形と双対な Voronoi 多角形に似ている」というヒューリスティクスから着想されたものである。

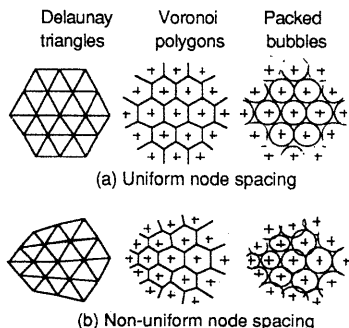


図1 充填されたバブルと Voronoi 図

図1に、充填されたバブルと Delaunay 三角形、そして Voronoi 多角形の関係を (a) ノード間距離が一定の場合と、(b) そうでない場合、について示した。同図(a) から分かるように、接する三つの球の中心点を結んで三角形を一つ構成するので、二球の中心点間距離が三角形の辺の長さに対応する。よって本研究では、指定されたノード間距離分布 d に忠実な三角形の大きさを得るために、バブルの直径をこの関数の値と等しくなるように調整している。

さて、ここでの主要な問題は、バブルを詰める際にできる隙間や重複をいかに最小化するかということである。本研究ではこの問題を以下のような方法で解いた。

- ・階層的空間分割によってバブル初期位置を算出 (3.3節)
- ・近接度にもとづくバブル間力を定義 (3.4節)
- ・バブル間力が均衡する位置を動力学シミュレーションにより算出 (3.5節)
- ・動力学シミュレーション中に過密部のバブルを破壊し、過疎部のバブルを分裂させることにより領域を過不足なく充填 (3.6節)

図2にも示したように、本稿で提案する曲面パッチ上領域の三角形メッシュ分割手順は以下のとおりである。

- (1) 全ての頂点 V にバブルを配置する。
- (2) 全てのトリム曲線 $C_i(s)$ と内部曲線 $C_i(s)$ 上にバブルを配置する。
- (3) 全てのトリムされた曲面パッチ $S(u, v)$ 上にバブルを配置する。
- (4) 制約付き Delaunay 法でバブル中心点を結んで、三角形メッシュを得る。

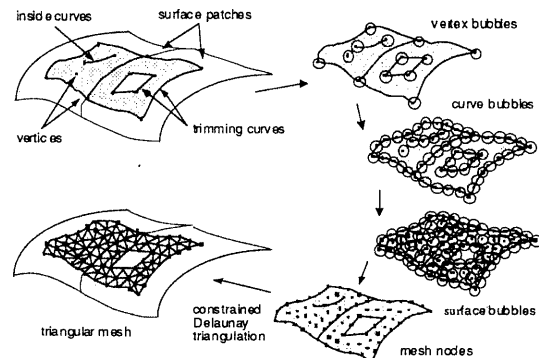


図2 複数の曲面パッチ上領域の三角形メッシュ分割手順

3.3 バブル初期配置

動力学シミュレーションに先立って適切な初期配置を求めることには、二つの理由がある。第一に、スピードを最優先する場合には、初期位置をそのまま使ってメッシュ分割をすることができること、そして第二に、適切な初期位置を与えることにより力の平衡状態に至るまでの動力学シミュレーションに要する計算時間が大幅に短縮されることである。

パラメータ範囲 $s_1 \leq s \leq s_2$ において定義された曲線 $C(s)$ 上にバブルを初期配置する場合を考える。まず、図3(a)のように、曲線のふたつの端点 $p_1 = C(s_1)$, $p_2 = C(s_2)$ 上にバブルを置き、各々の直径を、 d_1 と d_2 とする。ここで、三次元空間における端点間距離 $\overline{p_1 p_2}$ の大きさを、二つのバブルの半径の合計、すなわち $d_1/2 + d_2/2$ と比較する。もし前者が後者より大きければ（ケース1）、二つのバブルはほぼ曲線を覆っているものと仮定してこれ以上の処理をしない。そうでなければ（ケース2）、曲線の midpoint の位置に新たにバブルを発生し、これによって二分割されてできる部分曲線、すなわち $s_1 \leq s \leq (s_1 + s_2)/2$ と $(s_1 + s_2)/2 \leq s \leq s_2$ の両者に対して上記のケース分けを繰り返す。このような処理を曲線の全ての部分がケース1になるまで再帰的に繰り返すことにより曲線上に初期バブルを配置することができる。

曲面上のバブルの初期配置を得るには、曲線の場合と同様に、(a) 再帰的分割と、(b) バブルが曲面の部分覆っているかどうかのチェックを繰り返せばよい。ただし、曲面の場合には、特に以下の二点を考慮した。一つは再帰的分割を行う際の単位となる形状である。力の平衡状態に近い初期位置を生成するために、矩形ではなく内角が 60° と 120° の菱形を用いた。もう一点は、再帰的分割に伴って新たなバブルを発生させる際に、各バブルが曲面領域 G の内部かどうかの判定をして、内部のものだけを残すという処理を加えたことである。

3.4 バブル間力

前節の方法で生成した初期配置では、比較的大きなバブル間の隙間や重複が避けられない。そこで、これらを減ずる位置にバブルを移動させるために、近接度にもとづいてバブル間力を定義する。

図4(a)のように三バブルが、相互に接してこれらの中心点を結ぶことで、三角形ができるような状況を考える。

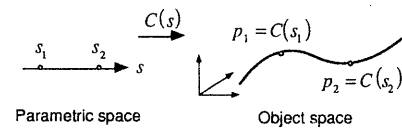
隣接する二バブル i と j の位置を各々 (x_i, y_i, z_i) と (x_j, y_j, z_j) とすると両者の間の安定距離 r_0 は半径の和として、

$$r_0 = \frac{d(x_i, y_i, z_i)}{2} + \frac{d(x_j, y_j, z_j)}{2}$$

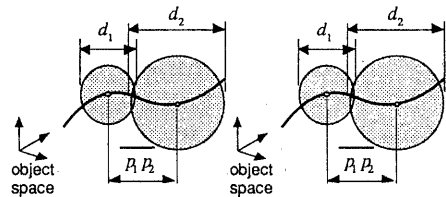
のように与えられる。この安定距離よりも、バブルが近くと斥力が、遠ざかると引力が働くようなバブル間力 $f(r)$ を定義するために、本研究では以下のような三次関数を用いた。

$$\begin{cases} f(r) = ar^3 + br^2 + cr + d, & 0 \leq r \leq 1.5r_0 \\ f(r) = 0 & 1.5r_0 < r \\ f(r_0) = 0, f(1.5r_0) = 0, f'(0) = 0, f'(1.5r_0) = -k_0 \end{cases}$$

ただし、 k_0 は安定距離においてバブル間力を線形バネに置き換えたときの弾性係数である。



(a) Parametric curve definition



$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \geq \overline{R_1 R_2}$$

(b) Case 1

$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} < \overline{R_1 R_2}$$

(2) Case 2

図3 曲線上への初期バブル配置

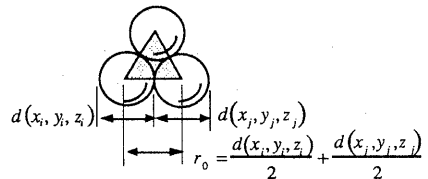


図3 バブル間の安定距離

3.5 動力学シミュレーション

動力学シミュレーションを行う目的は、前節で定義したバブル間力が均衡するように各バブルを移動させることである。

ここでいう力の均衡とは、各バブルに働く力の和ベクトルがその位置での曲面の法線ベクトルに平行になるということである。しかし、この条件を満たすようなバブル配置を、任意のノード間距離関数に対して、しかもすべてのバブルが領域内にあるという拘束の下で、汎用的に（Newton-Raphson 法などで）解くことは容易ではない。

そこで、b 法ではバブルの中心点に質点を定義し、移動速度に比例する粘性抵抗を仮定して物理モデルを構築し、この系が最終的に安定する状態を力の均衡状態とする。この系は各バブルが三自由度、全体で $3n$ 自由度をもち、その運動方程式は次のように書かれる。

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + c_i \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t), \quad i=1 \dots 3n$$

ここで、 m_i は質量、 c_i は粘性抵抗係数、 f_i はバブル間力のこの自由度方向の成分を表す。3.3 節で述べた初期配置から始めて、この運動方程式を四次の Runge-Kutta 法で数値積分して解くことにより、バブルが最密に詰まった状態を得る。この系のふるまいは m_i や c_i 、 k_0 などの物理パラメータにより決まるが、これらは、本来相反する系の「安定性」と「応答性」をバランス良く満たすように決めた。（具体的な方法については[1][2]を参照。）

さて、上記の運動方程式を解くうえで、もうひとつ考慮すべきことは、曲線上のバブルは曲面上に、曲面領域内のバブルは曲面パッチ上に拘束されねばならないという点である。一般に、数値積分して得たバブルの次の位置はもはや曲線上、あるいは曲面上にはないので、これをもとの曲線、曲面上の戻す必要がある。曲線の場合については本研究では以下の手順で解いた。（図5 参照）

- (1) 数値積分で時刻 t から $t+\Delta t$ までのバブルの移動ベクトル $\Delta \mathbf{x}$ を算出する。
- (2) 時刻 t におけるバブル中心位置での曲線の単位接線ベクトル $C^s/|C^s|$ を算出する。
- (3) バブルの移動ベクトルと単位接線ベクトルの内積をとり、これを接線ベクトルの大きさでさらに割ることによりパラメータ空間での移動量 Δs を得る。
すなわち、

$$\Delta s = \frac{\Delta \mathbf{x} \cdot C^s}{|C^s|^2}$$

- (4) Δs を用いて、曲線上に拘束された新しいバブルの時刻 $t+\Delta t$ における位置は $x(t+\Delta t) = C(s+\Delta s)$ と算出できる。

曲面の場合にも、二つのパラメータごとに接線ベクトル S^u と S^v を用いて同様の処理をしている。

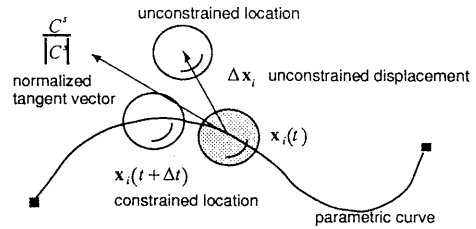


図4 曲線上へのバブルの拘束

3.6 バブル個数の適応制御

各曲面や曲線に対して、過不足ないバブル個数を与えるために、動力学シミュレーションと同時に個数の適応制御を行っている。各バブル毎に、近隣バブルとの重なりや隙間の度合いを調べて、重なりが多い場合には二つに一つの割合でバブルを破壊して個数を減らし、隙間が多い場合にはそのバブルを二つに分裂させて個数を増やす。

本研究では、この重なりや隙間の度合いを以下のように定量化する。あるバブルの「重なり度」は、このバブルを囲む近隣バブルとの重複距離を合計し、これを注目しているバブルの半径で割ったものをいう。これが例えば 1.4 を越えたバブルについては、重なりが大き過ぎるものとしてこれを破壊する。「隙間度」は、バブルの径を二倍に膨らませたものを考え、これと近隣バブルとの重複距離の合計を注目しているバブルの半径で割ったものをいう。この値が例えば 6.0 を越えると隙間が大き過ぎるので、バブルを分裂させて個数を増やす。

3.7 反復的/局所的な再三角形分割

b 法の特長のひとつに、反復的な再三角形分割が効率良く行えるということがある。この機能は、三角分割される領域形状 G や望ましいノード間距離分布 d が徐々に

変化する場合、例えば大変形の解析問題などにおいて非常に重要な機能である。このような反復的な再分割は、直前のバブル配置を初期値として動力学シミュレーションをすることで実現できる。

もう一つの特長は局所的な再三角形分割ができることである。形状やノード間距離分布が限定された領域においてのみ変化する場合は、図6に示したようにあらかじめ基本的な形状に対して定義されているメッシュを組み合わせる場合に、再分割が必要な部分領域にあるバブルだけを動力学シミュレーションで動かせばよいので効率が良い。

3.8 メッシュの不完全さ

規則的な正三角形格子においては、全てのノードが六つの隣接ノードに接続され、全ての三角形の内角が 60° である。しかし、任意の領域形状とノード間距離分布が与えられた場合には、このような完全なメッシュを生成することは一般に不可能であるので、なるべく位相的、幾何的にこれに近いものを実現することが目標となる。

ここでは、メッシュの位相的不完全さを測る指標として「位相的不完全さ」 ε を以下のように定義しておく。

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |\delta_i - 6|$$

n は領域内部のノードの数、 δ_i は i 番目のノードに接続されているノードの数を表すものとする。

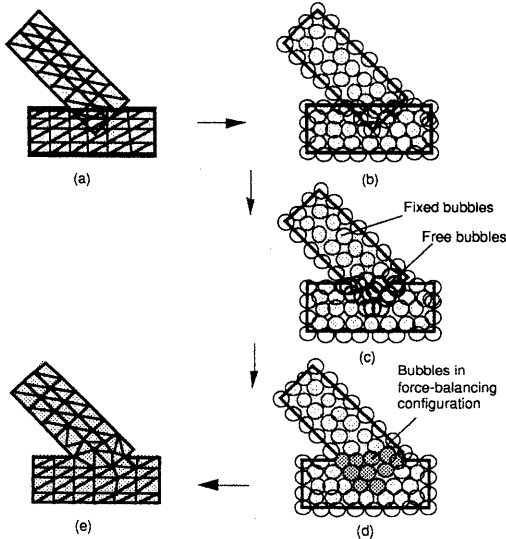


図6 局所的な再三角形メッシュ分割

すべての内部ノードが六つの隣接ノードをもつ場合にのみ位相的不完全さは0になるが、それ以外の場合には常に正の値であり、値が小さいほど規則的なメッシュであると考える。

4 結果

メッシュの位相的不完全さを小さくするには、(a) 適切な数のバブルを注入することと、(b) 力の均衡する場所に配置すること、の二つの条件が満たされることが重要となる。図7と図8に、それぞれの条件が、メッシュの位相的不完全さにどう影響するかを示した。

図7は、本手法を用いて正六角形の領域に異なる個数のバブルを力の均衡位置に配置した結果である。この領域については七個が最適な数であり、これよりも少なくとも多くても位相的不完全さが増加している。

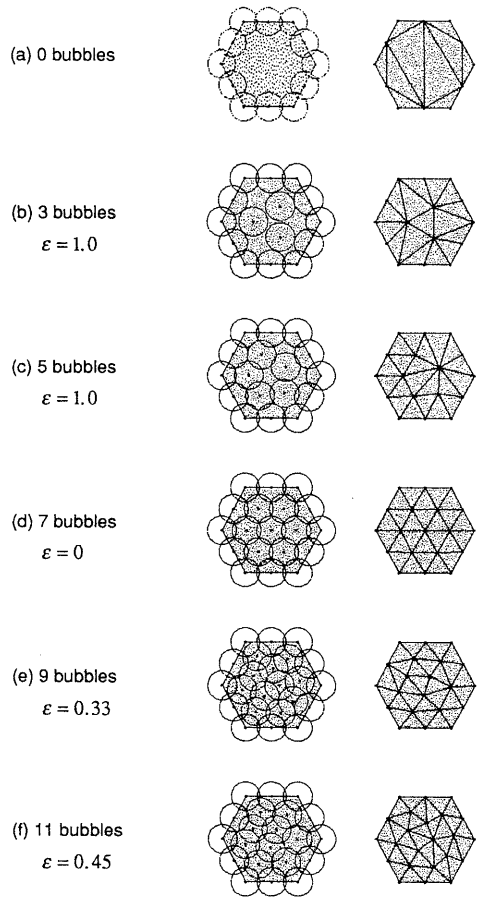


図7 バブル個数とメッシュの位相的不完全さ

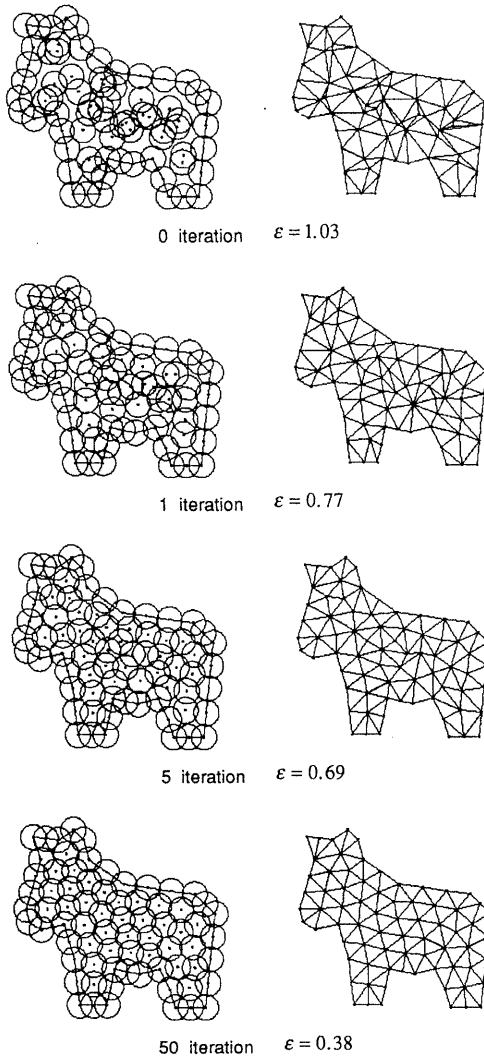


図8 動力学シミュレーションによる位相的不完全さの減少

図8では適切な個数のバブルを領域内部にランダムに初期配置した場合に、力の均衡状態に近づくにつれて、位相的不完全さが減少してゆく様子を示している。

図9では、3.3節で述べた階層的空間分割による初期バブル配置とその中心点をつないでできるメッシュと、これが動力学シミュレーションによってどのように改善されたかを示す。この例では、曲率が大きい部分ではノード間距離を小さく、曲率が小さい部分ではノード間距離を大きくすることにより、曲面全体にわたって形状近似の誤差をほ

ぼ一定に保つようにしている。実際に図9において用いたノード間距離 d は以下のようなものである。

$$d(u,v) = 2\sqrt{2e\rho_{\min}(u,v) - e^2}$$

ただし、 $\rho_{\min}(u,v)$ は最小曲率半径を、 e は元の曲面と三角形メッシュとの平均的な誤差の基準を示す定数である。

図10は、三角形分割すべき領域が複数の曲面パッチにわたって定義されている場合について、(a) 四枚の曲面パッチとその上のトリム曲線、(b) 領域内に充填されたバブル、(c) バブルの中心点を制約付きDelaunay法で結んでできる三角形メッシュ、の結果を示している。同図(c)において、パッチ境界曲線上で整合性のあるメッシュが生成されていることが確認できる。

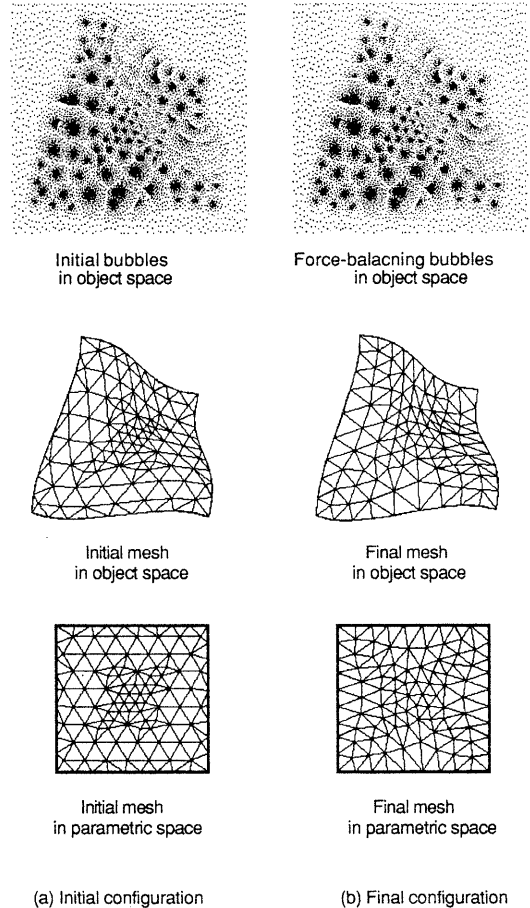
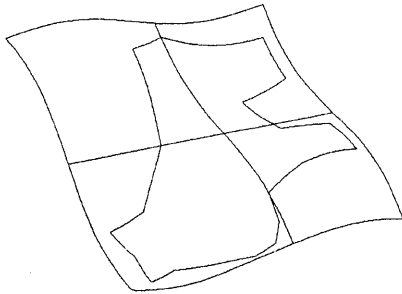
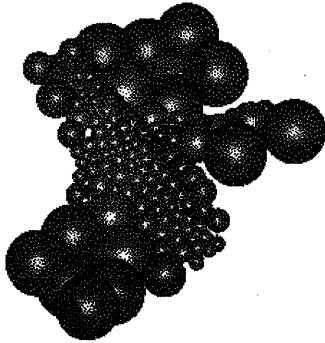


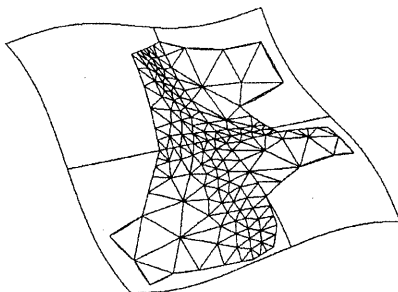
図9 初期メッシュと最終メッシュ



(a) Four trimmed parametric surface patches



(b) Closely packed bubbles on the surface



(c) Resulting triangular mesh

図10 複数の曲面パッチ上領域の三角形メッシュ分割

5 おわりに

複数のパラメトリック曲面パッチ上に定義された領域を自動的に三角形メッシュ分割する方法について述べた。本稿では、主に解析用のモデル作成の観点からこの問題を論じたが、同様な三角形分割を必要とする他の応用分野へも今後適応してゆく予定である。また、本手法の基本的な考え方は、三次元領域を四面体メッシュに分割する問題にも同様に適応できる。

謝辞

本研究について、MIT在学中にDavid C. Gossard教授、Alex P. Pentland教授、Nicholas M. Patrikalakis教授、またCADLABのメンバーから多くの助言と援助をいただいたことをここに感謝いたします。

参考文献

- [1] Shimada, K., "Physically-Based Mesh Generation: Automated Triangulation of Surfaces and Volumes via Bubble Packing," Ph.D. thesis Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1993.
- [2] 嶋田憲司, 物理モデルによる自動メッシュ分割, シミュレーション, 第12巻, 第1号, pp. 11-19, 1993.
- [3] Meshkat, S., J. Ruppert, and H. Li, "Three-dimensional Automatic Unstructured Grid Generation Based on Delaunay Tetrahedrization," The proc. of Third International Conference on Numerical Grid Generation, 1991.
- [4] Cavendish, J.C., "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, pp.679-696, 1974.
- [5] Patrikalakis, N.M. and H.N. Gursoy, "Shape Interrogation by Medial Axis Transformation," Advances in Design Automation, pp.77-88, 1990.
- [6] Srinivasan, V., L.R. Nackman, and J.-M. Tang, "Automatic Mesh Generation Using the Symmetric Axis Transformation of Polygonal Domains," IBM Research Report, RC16132, vol. , 1990.
- [7] Crawford, R.H., W.N. Waggenspack, and D.C. Anderson, "Composite Mappings for Planar Mesh Generation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp.2241-2252, 1987.
- [8] Zienkiewicz, O.C. and D.V. Phillips, "An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by Isoparametric² co-ordinates," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, pp.519-528, 1971.
- [9] Zhu, J.Z., et al., "A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pp.849-866, 1991.
- [10] Blacker, T.D. and M.B. Stephenson, "Paving: A New Approach To Automated Quadrilateral Mesh Generation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pp.811-847, 1991.
- [11] Shephard, M.S. and M.K. Georges, "Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pp.709-749, 1991.
- [12] Yerry, M.A. and M.S. Shephard, "A Modified-Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation," IEEE Computer Graphics & Application, vol. 3, pp.39-46, 1983.