

不確定な形状を処理する確率的立体モデリング

山口 泰

東京大学 教養学部 情報・図形科学教室

従来の形状モデリングシステムは決定的な表現と操作からなっていた。つまり、ユーザは正確な形状情報のみを曖昧さなく入力することが要求された。しかし、形状設計の初期における形状は、デザイナーの感性によるイメージに過ぎない。このイメージを徐々に具体化して確定形状とするのが設計過程である、ということもできる。つまり、設計の初期段階の形状は不確定であり、従来の形状モデリングシステムで取り扱うことは困難であった。このような感性に基づくような形状を扱うために確率的立体モデリングを提案する。確率的立体モデリングでは、不確定な形状の表現として、確率場の考えを利用する。また集合演算や局所変形操作を定義する。さらに曲面形状を扱うための手法についても考察する。

Probabilistic Solid Modeling for Handling Uncertain Shapes

Yaushi YAMAGUCHI

Department of Graphic and Computer Science
College of Arts and Sciences
The University of Tokyo

Conventional geometric modeling systems are based on deterministic representations and operations. This means that operators are required to input exact shapes without any uncertainties. However, in the early stage of a geometric design, the shape is just an image in the designer's mind and not completely fixed yet. The designer gradually reduces this image to a well-defined shape during a designing process. Thus, shapes in the early stage of the design are so uncertain that conventional modeling systems are not convenient for handling them appropriately. In order to solve this problem, we propose a new solid modeling scheme, i.e., *probabilistic solid modeling*, which can explicitly represent and manipulate uncertain shapes with the use of a probability field. We have defined set operations and local modifications in a uniform manner. We performed some experiments by applying this scheme to the geometric design with curved surfaces.

1 はじめに

従来の形状モデリングシステムにおいては、決定的な表現と操作が基礎となっていた。立体モデリングについて言うと、既に位相や寸法が定まった立体が対象であった。つまり、ユーザは正確な形状情報を入力することが要求され、不確定な形状情報を扱えなかった。しかるに形状設計初期における形状は、デザイナーの感性に基づくイメージに過ぎない。つまり、大きさや寸法どころか外形すら変わりうる不確定な形状である。デザイナーは、形状設計の過程において、このイメージを徐々に具体化し、形状を確定していく。つまり、設計初期段階での形状は不確定であり、従来の形状モデリングシステムで取り扱うことは困難であった。

本研究では、このような感性に基づくイメージ的な形状を扱うべく確率的立体モデリングを提案する。確率的立体モデリングは不確定な形状を扱うための数学的な枠組であり、この枠組のもとでユーザは不確定な形状の生成・操作が可能となる。

2 確率的立体モデリング

前にも述べたように、従来の立体モデルでは確定形状のみが扱えるのに対して、イ

メージなどは形状として不確定である。これを本研究では「決定的立体 (deterministic solid)」「確率的立体 (probabilistic solid)」と呼んで区別することにする。これを概念的に描いたものが図1である。

決定的立体は3次元ユークリッド空間 E^3 における点集合とみなせる。このような点集合 \hat{A} は、 $G_{\hat{A}} : E^3 \rightarrow \{0,1\}$ なる特徴関数 (characteristic function) によって定義できる [8]。特徴関数とは、次のような2値関数である。

$$G_{\hat{A}}(x) = 1 \quad \text{if } x \in \hat{A}$$

$$G_{\hat{A}}(x) = 0 \quad \text{if } x \notin \hat{A}$$

つまり、もし与えられた点 x が点集合 \hat{A} に属するのであれば1、さもなければ0を返す関数である。これによりすべての点は立体内部ないし立体外部に決定される。

確率的立体の考え方は、ファジー集合の考え方に似ている。つまり、確率的立体は

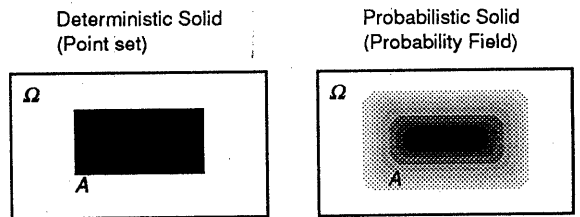


図 1: 決定的立体と確率的立体

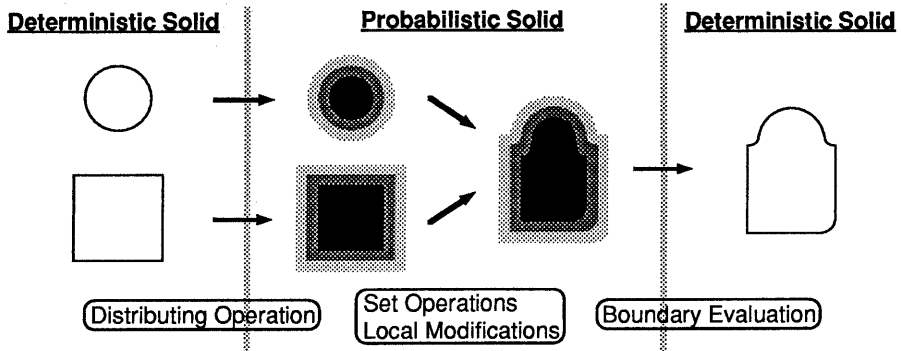


図 2: 確率的立体モデリングの流れ

メンバーシップ関数 $P_A : E^3 \rightarrow [0,1]$ によって定められるファジー点集合と考える。このメンバーシップ関数 $P_A(x)$ は点 x が立体 A に属する確率を与える。したがって厳密に言うと、確率的立体は、点集合ではなく、確率場というべきである。

3 モデリング操作

確率的立体モデリングにおいて、モデリング操作は非常に重要なポイントを占める。図2は確率的立体モデリングの流れを示したものである。確率的立体は決定的立体に「分布操作 (distributing operation)」を施すことによって生成される。確率的立体に対しては「集合演算 (set operation)」や「局所変形操作 (local modification)」などが適用できる。図の例では和の演算と丸め操作が実行されている。モデリングの最終段階では確率的立体から決定的立体を生成することも可能である。これを「境界評価 (boundary evaluation)」と呼ぶことにする。本節ではこれらの操作について説明していく。

3.1 分布操作

分布操作は決定的立体から確率的立体を生成する操作であり「境界面分布 (surface distribution)」と「立体分布 (solid distribution)」の2種類がある。図3にこれらのイメージを示してある。

境界面分布は立体の境界をなす面をそれぞれ独立に不確定に分布させる操作である。境界面分布によるメンバーシップ関数 P_A は、境界面の確率密度関数 $\rho(l)$ によって定められる。 $\rho(l)$ は予め与えられた基準面からの距離 l の関数であり、以下の式を満たす。

$$\int_{l_{\min}}^{l_{\max}} \rho(l) dl = 1$$

l_{\min} と l_{\max} は、基準面からの分布範囲を示すもので、本研究では有限範囲に分布す

ることを仮定している。このときメンバーシップ関数 $P_A(x)$ は、確率密度関数 $\rho(l)$ の積分の形で、以下のように定められる。

$$P_A(x) = 1 - \int_{l_{\min}}^{l_{\theta A}(x)} \rho(l) dl$$

ここで、 $l_{\theta A}(x)$ は点 x と基準面との距離を与える関数である。ここでの距離は最小距離でもよいし、ある方向に沿った距離であっても構わない。仮に最小距離をとった場合には、結果として得られる確率場の等値面は、基準面からの等距離面 (オフセット面) になる [5]。ある方向に沿って距離をとる場合には、確率場の等値面は基準面を平行移動したものになる。

立体分布は立体全体の位置や姿勢を不確定なものとして分布させる操作である。立体分布によるメンバーシップ関数 P_A は、点の確率密度関数 $\varphi(v)$ によって定められる。これはもとの点を原点において分布させたときの点 v における確率密度関数であり、以下の式を満たす。

$$\iiint_R \varphi(v) dv = 1 \quad (1)$$

ここで、 R は分布の範囲を示している。たとえば、立体分布が等方的で距離にのみ依存するのであれば、点の確率密度関数は

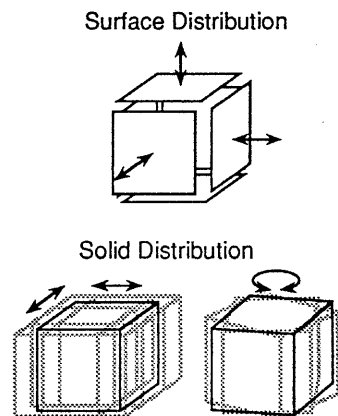


図3: 境界面分布と立体分布

距離の関数となり、 $\varphi(v) \equiv \varphi_d(|v|)$ である。このとき、(1)式は次のようになる。

$$\int_0^{r_{\max}} 4\pi r^2 \varphi_d(r) dr = 1$$

r_{\max} は点の分布の最大範囲を示している。立体分布のメンバーシップ関数 $P_A(x)$ は、点の確率密度関数 $\varphi(v)$ の畳み込みになる。

$$P_A(x) = \iiint G_A(v) \varphi(v-x) dv \quad (2)$$

ここで $G_A(x)$ は、分布させるもとの立体(点集合) \hat{A} の特徴関数である。立体分布の結果として、もとの立体が確率的に平行移動ないし回転したときの立体の存在確率場が生成される。また(2)式において、特徴関数 $G_A(x)$ をメンバーシップ関数 $P_A(x)$ に置き換えると、確率立体にも立体分布を施せる。

3.2 集合演算

本節では、確率立体に対する、和演算、差演算、積演算などの集合演算を定義する。決定的立体の場合には、点集合に対して正規化ブール集合演算が定義された[11]。しかし、確率的立体は点集合というよりは、確率場にすぎないので、正規化ブール集合演算をそのまま用いるわけにはいかない。そこで、確率立体用の集合演算の定義が必要となる。

集合演算を定義する前段階として、確率的立体の補立体を考える。図4は、確率立体 A とその補立体 \bar{A} を図示したものである。つまり、確率立体の補立体を、確率論における補事象の確率と同じように定義する。この定義はファジー集合の補集合とも同じである。補立体 \bar{A} のメンバーシップ関数 $P_{\bar{A}}$ は以下のように与えられる。なお、以後 $P_{\bar{A}}(x)$ を $P_{\bar{A}}$ のように略記する。

$$P_{\bar{A}} = 1 - P_A$$

ここで P_A は、もとの立体 A のメンバーシップ関数である。

上記の補立体の定義を用いると、積演算の定義から和演算と差演算も定義できる。つまり、2立体 A と B の和演算はそれぞれの立体の補立体間で積演算した結果の補立体となり、2立体 A と B の差演算は立体 B の補立体と立体 A を積演算した結果となる。これを式で表すと、和演算 \oplus と差演算 \ominus は次のように定義される。

和:

$$\begin{aligned} P_A \oplus P_B &= P_{A \cup B} = P_{\overline{A \cap B}} \\ &= 1 - (1 - P_A) \otimes (1 - P_B) \end{aligned}$$

差:

$$\begin{aligned} P_A \ominus P_B &= P_{A \setminus B} = P_{A \cap \bar{B}} \\ &= P_A \otimes (1 - P_B) \end{aligned}$$

ここで \otimes は積演算を表し、

$$P_A \otimes P_B = P_{A \cap B}$$

である。

確率的立体の積演算の定義は様々に考えられる。ただ、決定的立体の積演算との関係を考えると、以下の条件を満たすことが望ましい。

$$\begin{aligned} P_A \otimes P_B &= 1 && \text{if } P_A = P_B = 1 \\ P_A \otimes P_B &= 0 && \text{if } P_A = 0 \text{ or } P_B = 0 \end{aligned}$$

このような条件を満たす定義として、たとえば次のような定義が考えられる。

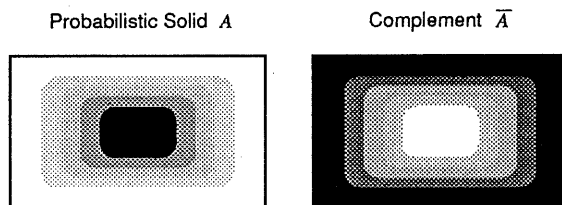


図4: 確率立体の補立体

定義 1:

$$P_A \otimes P_B = \min(P_A, P_B)$$

$$P_A \oplus P_B = \max(P_A, P_B)$$

$$P_A \ominus P_B = \min(P_A, 1 - P_B)$$

定義 2:

$$P_A \otimes P_B = P_A P_B$$

$$P_A \oplus P_B = P_A + P_B - P_A P_B$$

$$P_A \ominus P_B = P_A - P_A P_B$$

定義 1 は確率値の小さい方の値を採るというものである。これはファジー集合における積演算の定義と同じである。このとき、結果として得られるメンバーシップ関数は C^0 連続性のみを保証し、決定的立体における積演算と似た結果が得られる。定義 2 は確率値の積として、確率立体の積演算を定義している。これは 2 つの独立事象が生起する場合の確率の計算と同じである。このとき、和演算、差演算、積演算の結果として得られるメンバーシップ関数は、いずれももとの立体のメンバーシップ関数を要素とする多項式となる。したがって、結果のメンバーシップ関数はもとの立体のメンバーシップ関数の C^n 連続性を保持する。この定義に基づいた集合演算は 2 立体を滑らかに接続できる。

3.3 局所変形操作

ここでは確率立体の局所変形操作について説明する。図 5 は「盛り操作 (heaping)」と「削り操作 (shaving)」 「ブレンド操作 (blending)」という 3 種類の局所変形を示したものである。盛り操作はもとの立体 O に膨らみをつける操作、削り操作はもとの立体 O にへこみをつける操作である。このときユーザは、膨らみないしへこみをつけたい部分として「有効領域 (effective zone)」 \mathcal{E} を指定する。ブレンド操作はもとの立体 O のうちの有効領域 \mathcal{E} を目的立体 T にブレンドする操作である。図の場

合、円柱 O と円錐 T がブレンドされているが、有効領域 \mathcal{E} として円錐の先端部付近が指定されているため、結果の形状には円錐の先端部のみが現れることになる。

盛り操作と削り操作は定義 2 に基づく和演算と差演算に他ならないから、上記の 3 つの操作は次のように表現される。

盛り操作:

$$P_R = P_O \oplus P_{\mathcal{E}}$$

$$= 1 P_{\mathcal{E}} + P_O P_{\bar{\mathcal{E}}}$$

削り操作:

$$P_R = P_O \ominus P_{\mathcal{E}}$$

$$= 0 P_{\mathcal{E}} + P_O P_{\bar{\mathcal{E}}}$$

ブレンド操作:

$$P_R = P_T P_{\mathcal{E}} + P_O P_{\bar{\mathcal{E}}}$$

これから、すべての局所変形操作は同じ形式 $P_T P_{\mathcal{E}} + P_O P_{\bar{\mathcal{E}}}$ で表現されることがわかる。つまり、局所変形操作の局所性は有効領域 \mathcal{E} によって指定される。

局所変形操作として「丸め操作 (rounding operation)」も考えられる。確率的立体モデリングにおいては「大域的丸め操作 (global rounding operation)」と「局所的丸め操作 (local rounding operation)」が定

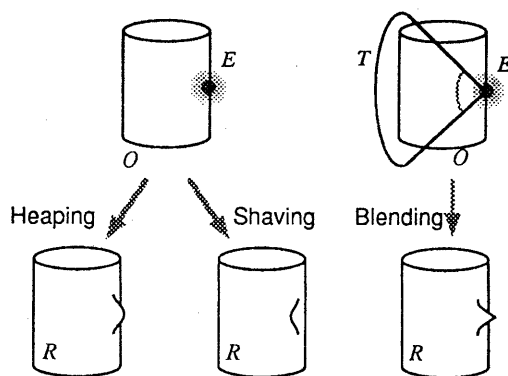


図 5: 局所変形操作

義できる。局所的丸め操作は大域的丸め操作をもとに次のように定義できる。

$$P_R = P_{GR(O)}P_E + P_O P_E$$

ここで $GR(O)$ はもとの立体 O に大域的丸め操作を施した立体である。局所変形操作の一般形式を用いて、有効領域部分のみを丸めるものである。一方、大域的丸め操作は画像処理工学のボカシとして実現できる。このボカシは畳み込み計算であるから、大域的丸め操作は立体分布と全く同じ計算で実現できる。確率立体に立体分布が施せることは前に述べたとおりである。

3.4 境界評価

確率的立体は単に確率場に過ぎず、立体の境界となる面の情報は持たない。各種の応用では面の情報が利用されることが多いため、確率的立体を決定的立体に変換する境界評価が必要となる。たとえば可視化にあたっては面情報は有用である。

境界評価にはいくつかの定義方法が考えられるが、もっとも有効な方法の1つとして等値面がある [7]。確率の値には特別な意味を持つものがある。たとえば、確率値 1 を与える点集合は必ず立体に含まれる点の集合である。また、確率値が非零の点集合は立体に含まれる可能性のある点の集合となる。確率値が $1/2$ 以上の点集合は平均的な立体と言えるであろう。

4 実行例

確率的立体、すなわち確率場、を計算機内部で厳密に表現することには、非常に困難であると思われる。CSG 木に似た表現法などが考えられるが、表示や境界評価などに多大の計算コストを要するものと想像される。そこで、本研究ではボクセル表現を用いて、確率場を表現することとした。ボクセル数は $64 \times 64 \times 64$ 、各ボクセルには 1Byte を割り当てた。

操作としては、集合演算、局所変形操作、畳み込みによる操作、つまり立体分布と丸め操作、1方向の境界分布などを実現した。これらの操作を用いて作った形状の例を図6に示す。この形状はもとの形状として、直方体2個、円筒1個、ベジエ曲面1枚を用いた。まず最初に直方体2個と円筒に立体分布を適用した。このなかではレンズ部分の寸法は機能的に要求が厳しくなると想定して、円筒は直方体にくらべて狭い範囲での立体分布を行なった。さらに小さい方の直方体には局所丸め操作を施した。以上の操作によって生成された3つの

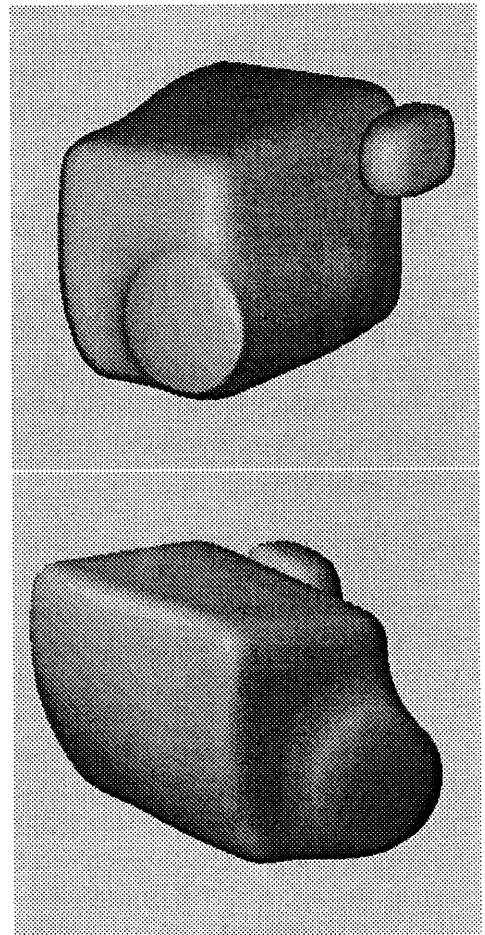


図6: 形状生成例

確率的立体を和演算で合成した。一方ベジエ曲面に境界面分布を施して、半空間立体的形状を生成した。この確率的立体と先に合成した確率的立体の積演算をとった。最終的に生成された確率的立体を等値面表示したものが図6である。

5 従来の研究との比較

本節では確率的立体モデリングと他の研究とを比較する。本研究では確率的立体を確率のスカラ場として定義した。スカラ場を用いた研究は従来より沢山ある。半空間モデル [9] やメタボール [1] などの陰関数形式を基礎とする研究は、すべて関連したものと考えられる。確率的立体モデリングの基礎はスカラ場が確率を表すことであり、そのためスカラ値が $[0, 1]$ に正規化されている。この結果、ファジー集合 [12] のように、補立体や集合演算を定義することが可能となった。Bloomenthalらの研究 [2] は畳み込みを用いている点で、Payneらの研究 [10] は距離の考え方を用いている点や集合演算的操作がある点で、本研究と類似している。しかし、いずれも確率を前提としていないため、集合演算や局所変形操作を体系的に定義できない。

一方、ボクセル表現に関する研究 [6] も、確率的立体モデリングと密接な関連がある。Galyeanらはボクセル表現に基づいて対話的に3次元形状を操作する手法を提案している [4]。この手法では「盛り操作」「削り操作」「丸め操作」など、確率的立体モデリングと良く似た操作が提供されている。しかし、個々の操作はアドホックに決められている。

6 おわりに

本研究では不確定な形状を扱うための確率的立体モデリングを提案した。まず確率的立体を立体の存在する確率の場として定義した。次に確率的立体を生成するため

の境界面分布と立体分布という操作を定義した。また、確率的立体に対する操作として、集合演算と局所変形操作を定義した。さらに、この考え方をもとに試作システムを実現し、実験を行なった。

試作システムでは、確率場の表現法としてボクセル表現を用いた。ボクセル表現は、多様な表示法 [3] など、非常に多くの長所を持っている。しかし一方で、解像度が固定されること、軸方向とそれ以外で性質が異なることなどの短所もある。今後はボクセル表現以外の表現法についても考察を進めたい。また、今回は畳み込みを基本とする操作群を実現したが、距離を扱う操作、たとえば最短距離による境界面分布など、も非常に重要であり、今後は研究を進めていく予定である。

謝辞

本研究の実施にあたっては一部がEAGL事業推進機構からの助成によるものである。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- [1] J. F. Blinn. A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Transactions on Graphics*, 1(3):235-256, 1982.
- [2] J. Bloomenthal and K. Shoemake. Convolution surfaces. *SIGGRAPH'91 Conf. Proc., Computer Graphics*, 25(4):251-256, July 1991.
- [3] Computer Graphics. *Special issue on San Diego Workshop on Volume Visualization*, volume 24. ACM SIGGRAPH, November 1990.
- [4] T. A. Galyean and J. F. Hughes. Sculpting: An interactive volumetric modeling technique. *SIGGRAPH'91 Conf.*

- Proc., Computer Graphics*, 25(4):267–274, July 1991.
- [5] C. M. Hoffmann. *Geometric and Solid Modeling*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1989.
 - [6] G. J. Jense. Voxel-based methods for CAD. *Computer-Aided Design*, 21(8):528–533, 1989.
 - [7] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *SIGGRAPH'87 Conf. Proc., Computer Graphics*, 21(4):163–169, July 1987.
 - [8] M. Mantyla. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press, 1988.
 - [9] N. Okino, Y. Kakazu, and H. Kubo. TIPS-1: Technical information processing system for computer aided design and manufacturing. In J. Hatvany, editor, *Computer Languages for Numerical Control*, pages 141–150. North-Holland, 1973.
 - [10] B. A. Payne and A. W. Toga. Distance field manipulation of surface models. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(1):65–71, January 1992.
 - [11] A. A. G. Requicha. Representations for rigid solids: Theory, methods, and systems. *Computing Surveys*, 12(4):437–464, 1980.
 - [12] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.