グラフィクスとCAD　73－6
（１９９５．２．１７）

レイトレーシング演算の誤差解析
——FPとLNSによる楕円体演算の比較——

黒河富夫

愛知工業大学

レイトレーシングによるの画像生成の計算は比較的複雑であり相当程度の計算精度が必要であると考えられる。本研究では浮動小数点演算法（ＦＰ）と対数利用の演算法（ＬＮＳ）によるレイトレーシング演算を行い、両者でどの程度の誤差が生じ、またその間の差異がどの程度であるかを調べた。演算対象物体として楕円体を例に、ＦＰ及びＬＮＳで計算した場合の演算誤差式を導出し、それらを使用ビット長ごとに数値評価し比較した。一方シミュレーション演算により計算した誤差と比較し、導出誤差式が正しいことを確認した。また、ＦＰとＬＮＳの間の比較を行い、ＬＮＳの方が多少精度が良いことを誤差数値と描画画像の目視により確認した。

Error Analysis of Ray-Tracing Computations: Ellipsoids with Floating Point and Logarithmic Arithmetics

Tomio Kurokawa

Aichi Institute of Technology

1247 Yachigusa, Yagusa-cho, Toyota 470-03 Japan

It is supposed that high accuracy is required to do ray-tracing computation. This paper is intended to make clear how much error exists for ray-tracing computation and which one is more accurate, FP or LNS. Using FP and LNS, theoretical error expressions were derived for the ray-tracing computation of an ellipsoid. They were evaluated numerically and then examined by the experiments. Comparisons were made between the theory and the experimennt for each word length of both FP and LNS. They agreed very well. The comparisons between FP and LNS were also made by evaluating the numerical error size and by checking the generated pictures visually. It turned out that with same word length, LNS is a little more accurate though it is less than a single bit.

1　はじめに

筆者らは対数利用の演算法（ＬＮＳ）のコンピュータグラフィックスへ応用とその誤差解析を浮動小数点演算（ＦＰ）と比較しながら行ってきた[1, 2, 3]。[2]は非常に簡単な計算でできる円描画についての誤差解析で、[3]はＦＰについてだけであるが、複雑な計算が必要なレイトレーシングによる楕円体演算を扱った。本報告は[3]にＬＮＳについての解析を追加し、ＦＰとＬＮＳを比較したものである。

ＬＮＳは高速の演算法と言われてきたが、高精度の演算のためには大量のメモリーを必要とするため、高精度化は不可能であると考えられてきた。しかし最近の報告[4, 5]では、少メモリでも３２ビットＦＰに匹敵する高精度化が可能になってきている。そこで、複雑な演算を必要とするレイトレーシングの演算誤差について解析し、ＦＰとＬＮＳについて比較検討する。

2　楕円体演算の定義

基本立体の内では比較的計算が複雑な楕円体を例として扱う。式 (1) でそれを定義する。

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \tag{1}$$

レイトレーシングの計算で誤差が問題になるところは二つあり、一つは画像の形の生成であり、もう一つは濃度の計算である。前者については描画物体と背景などの境界の区別においてである（境界区別の計算が複雑な場合）。境界付近では計算誤差が大きければ、視線と物体の交点の存在が不確かなものとなり、存在するはずの交点が計算では存在せず背景として計算されたり、あるいは逆に本当には物体との交点など存在しないのに計算誤差のために視線と物体の交点が存在するものとして計算されたりする。後者については本研究では扱わない。

楕円体の描画における視線と物体の交点の計算において、計算順序は、通常の数学式の通りとすると、以下の通りの計算式となる[6]。視点を $(x_v, y_v, z_v) = (0, 0, z_v)$，楕円体の中心を (x_c, y_c, z_c), 画面上の描画点を $(x_p, y_p, z_p) = (x_p, y_p, 0)$ とし、視線の方向余弦を (i, j, k) とすると、

$$d = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2) + z_v^2} \tag{2}$$
$$i = x_p/d \tag{3}$$
$$j = y_p/d \tag{4}$$
$$k = (-z_v)/d \tag{5}$$

であるから、二次方程式 (6) の判別式 (10) が0のところがその楕円体の境界線である。式 (2)~(10) の括弧等は計算順序を明確にするためである。

$$At^2 + Bt + C = 0 \tag{6}$$

$$A = (ai^2 + bj^2) + ck^2 \tag{7}$$
$$B = \{(2a)(-x_c)i + (2b)(-y_c)j\} + (2c)(z_v - z_c)k \tag{8}$$
$$C = \{(ax_c^2 + by_c^2) + c(z_v - z_c)^2\} - 1 \tag{9}$$
$$D = B^2 - (4A)C \tag{10}$$

3　ＦＰについての誤差解析

3.1　ＦＰの定義

後述の実験などで精度が問題となるので、ここでＦＰを定義する。語長は全体のビット数を $n + m + 2$ とし、指数部に $m + 1$ ビット（符号も含む２の補数表現）、仮数部に $n + 1$ ビット（符号も含む２の補数表現、仮数部は符号１ビット、小数点以下 n ビット、値は１未満1/2以上の正規化）使用する。いわゆるけち表現ではない。従って、けち表現に比べて１ビット分精度が悪い。

3.2　ＦＰによる計算の誤差式

浮動小数点での計算では通常（ビット精度が十分な場合）変換誤差は発生しないが、その他全ての計算（加算、減算、乗除算、平方、平方根）で誤差が生じる。しかし、２倍、４倍の計算では誤差は発生しない。誤差を伴って計算された $d, i, j, k,\ A, B, C, D$ の計算結果を $d'_f,\ i'_f, j'_f, k'_f,\ A'_f, B'_f,\ C'_f, D'_f$ とすると、それらは以下のようになる。

$$d'_f = \Big[[\{x_p^2(1 + e_{fx_p^2}) + y_p^2(1 + e_{fy_p^2})\}(1 + e_{fa_1}) + z_v^2(1 + e_{fz_v^2})](1 + e_{fa_2})\Big]^{1/2}(1 + e_{fr}) \tag{11}$$

$$i'_f = x_p(1 + e_{fdv1})/d'_f \tag{12}$$

$$j'_f = \frac{y_p}{d'_f}(1 + e_{fdv2}) \tag{13}$$

$$k'_f = \frac{(-z_v)}{d'_f}(1 + e_{fdv3}) \tag{14}$$

$$A'_f = \Big[\{ai'^2_f(1 + e_{fi^2})(1 + e_{fa\cdot i^2}) + bj'^2_f(1 + e_{fj^2})(1 + e_{fb\cdot j^2})\}(1 + e_{fa_3}) + ck'^2_f(1 + e_{fk^2})(1 + e_{fc\cdot k^2})\Big](1 + e_{fa_4}) \tag{15}$$

$$B'_f = \Big[\{(2a)(-x_c)i'_f(1 + e_{f2a\cdot x_c})(1 + e_{f2ax_c\cdot i}) + (2b)(-y_c)j'_f(1 + e_{f2b\cdot y_c})(1 + e_{f2by_c\cdot j})\}\cdot (1 + e_{fa_5}) + (2c)(z_v - z_c)k'_f(1 + e_{fs_1})(1 + e_{f2c\cdot z_{vc}})\cdot (1 + e_{f2cz_{vc}\cdot k})\Big](1 + e_{fa_6}) \tag{16}$$

$$C'_f = \Big[[\{ax_c^2(1 + e_{fx_c^2})(1 + e_{fa\cdot x_c^2}) + by_c^2(1 + e_{fy_c^2})(1 + e_{fb\cdot y_c^2})\}(1 + e_{fa_7}) + c(z_v - z_c)^2(1 + e_{fs_1})^2(1 + e_{fz_{vc}^2})(1 + e_{fc\cdot z_{vc}^2})](1 + e_{fa_8}) - 1\Big](1 + e_{fm1}) \tag{17}$$

$$D'_f = \{B'^2_f(1 + e_{fB^2}) - (4A'_f)C'_f(1 + e_{f4A\cdot C})\}\cdot(1 + e_{fs_2}) \tag{18}$$

ここで式(11)〜(18)の個別の誤差項 e_i はそれぞれ以下の相対誤差である。

1. $e_{fx_p^2}$: x_p^2 の平方誤差
2. $e_{fy_p^2}$: y_p^2 の平方誤差
3. e_{fa_1} : $x_p^2+y_p^2$ の加算誤差
4. $*e_{fz_v^2}$: z_v^2 の平方誤差
5. e_{fa_2} : $(x_p^2+y_p^2)+z_v^2$ の加算誤差
6. e_{fr} : $\sqrt{x_p^2+y_p^2+z_v^2}$ 平方根の誤差
7. e_{fdv1} : x_p/d の除算誤差
8. e_{fdv2} : y_p/d の除算誤差
9. e_{fdv3} : $(-z_v)/d$ の除算誤差
10. e_{fi^2} : i^2 の平方誤差
11. $e_{fa\cdot i^2}$: $a\cdot i^2$ の乗算誤差
12. e_{fj^2} : j^2 の平方誤差
13. $e_{fb\cdot j^2}$: $b\cdot j^2$ の乗算誤差
14. e_{fa_3} : ai^2+bj^2 の加算誤差
15. e_{fk^2} : k^2 の平方誤差
16. $e_{fc\cdot k^2}$: $c\cdot k^2$ の乗算誤差
17. e_{fa_4} : $(ai^2+bj^2)+ck^2$ の加算誤差
18. $*e_{f2a\cdot x_c}$: $(2a)\cdot(-x_c)$ の乗算誤差
19. $e_{f2ax_c\cdot i}$: $((2a)(-x_c))\cdot i$ の乗算誤差
20. $*e_{f2b\cdot y_c}$: $(2b)\cdot(-y_c)$ の乗算誤差
21. $e_{f2by_c\cdot j}$: $(2b(-y_c))\cdot j$ の乗算誤差
22. $*e_{fs_1}$: z_v-z_c の減算誤差
23. e_{fa_5} : $(2a(-x_c))i+(2b(-y_c))j$ の加算誤差
24. $*e_{f2c\cdot z_{vc}}$: $(2c)\cdot(z_v-z_c)$ の乗算誤差
25. $e_{f2cz_{vc}\cdot k}$: $\{2c(z_v-z_c)\}\cdot k$ の乗算誤差
26. e_{fa_6} : $((2a(-x_c))i+(2b(-y_c))j)+(2c(z_v-z_c))k$ の加算誤差
27. $*e_{fx_c^2}$: x_c^2 の平方誤差
28. $*e_{fa\cdot x_c^2}$: $a\cdot x_c^2$ の乗算誤差
29. $*e_{fy_c^2}$: y_c^2 の平方誤差
30. $*e_{fb\cdot y_c^2}$: $b\cdot y_c^2$ の乗算誤差
31. $*e_{fa_7}$: $ax_c^2+by_c^2$ の加算誤差
32. $*e_{fz_{vc}^2}$: $(z_v-z_c)^2$ の平方誤差
33. $*e_{fc\cdot z_{vc}^2}$: $c\cdot(z_v-z_c)^2$ の乗算誤差
34. $*e_{fa_8}$: $(ax_c^2+by_c^2)+c(z_v-z_c)^2$ の加算誤差
35. $*e_{fm1}$: $(ax_c^2+by_c^2+c(z_v-z_c)^2)-1$ の減算誤差
36. e_{fB^2} : B^2 の平方誤差
37. $e_{f4A\cdot C}$: $(4A)\cdot C$ の乗算誤差
38. e_{fs_2} : B^2-4AC の減算誤差

上記の個別相対誤差の内で＊の付いているものは定数間の演算による誤差である。D'_f の真の値は D であるから、D'_f の相対誤差を e_{fD} とすると、D'_f の絶対誤差 e_{af} は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
e_{af} &= D'_f - D && (19)\\
&= D\cdot e_{fD} && (20)
\end{aligned}
$$

これを展開し個別の相対誤差 e_{i_f} の２次以上の項（ビット数が多い場合は非常に小さいと見なされる）を無視すると、その絶対誤差 e_{af} は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
e_{af}\approx\ & -Di^2e_{fx_p^2} - Dj^2e_{fy_p^2} - D(i^2+j^2)e_{fa_1}\\
& -Dk^2e_{fz_v^2} - De_{fa_2} - 2De_{fr}\\
& -\{4aBx_ci + 8aCi^2\}e_{fdv1} - 4aBx_cie_{f2a\cdot x_c}\\
& -4aBx_cie_{f2ax_c\cdot i} - \{4bBy_cj + 8bCj^2\}e_{fdv2}\\
& -4bBy_cje_{f2b\cdot y_c} - 4bBy_cje_{f2by_c\cdot j}\\
& -4B(ax_ci + by_cj)e_{fa_5}\\
& +\{4cB(z_v-z_c)k - 8cCk^2\}e_{fdv3}\\
& +\{4cB(z_v-z_c)k - 8cA(z_v-z_c)^2\}e_{fs_1}\\
& +4cB(z_v-z_c)ke_{f2c\cdot z_{vc}} + 4cB(z_v-z_c)ke_{f2cz_{vc}\cdot k}\\
& +2B^2e_{fa_6} + B^2e_{fB^2} - 4aCi^2e_{fi^2} - 4aCi^2e_{fa\cdot i^2}\\
& -4bCj^2e_{fj^2} - 4bCj^2e_{fb\cdot j^2} - 4C(ai^2+bj^2)e_{fa_3}\\
& -4cCk^2e_{fk^2} - 4cCk^2e_{fc\cdot k^2} - 4ACe_{fa_4}\\
& -4aAx_c^2e_{fx_c^2} - 4aAx_c^2e_{fa\cdot x_c^2} - 4bAy_c^2e_{fy_c^2}\\
& -4bAy_c^2e_{fb\cdot y_c^2}\\
& -4A(ax_c^2+by_c^2)e_{fa_7} - 4cA(z_v-z_c)^2e_{fz_{vc}^2}\\
& -4cA(z_v-z_c)^2e_{fc\cdot z_{vc}^2} - 4A(C+1)e_{fa_8}\\
& -4ACe_{fm1} - 4ACe_{f4A\cdot C} + De_{fs_2} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

e_{af} の個別の演算相対誤差 e_{i_f} は全て独立、しかも全ての変数（係数）、例えば $-Di^2$ などは全て誤差変数とは独立と見なすことができる。誤差の評価には平均平方和の平方根（RMS）を使用することにし、その場合の平均平方和を

$E[e_{af}^2]$ とすると、以下のようになる。式 (21) の個別の演算相対誤差 e_{i_f} の平均はすべて0 であると考えられるので[7]（定数の変換誤差も統計的に扱って、確率変数とみなす）、$E[e_{af}^2]$ は分散（$VAR[e_{af}]$）でもある。

$$
\begin{aligned}
E[e_{af}^2] \approx VAR[e_{af}] \approx \\
& E[(Di^2)^2]E[e_{fx_p^2}^2] + E[(Dj^2)^2]E[e_{fy_p^2}^2] \\
& +E[(D(i^2+j^2))^2]E[e_{fa_1}^2] \\
& +E[(Dk^2)^2]E[e_{fz_v^2}^2] + E[D^2]E[e_{fa_2}^2] + 4E[D^2]E[e_{fr}^2] \\
& +E[(4aBx_ci + 8aCi^2)^2]E[e_{fdv1}^2] \\
& +E[(4aBx_ci)^2]E[e_{f2a\cdot x_c}^2] + E[(4aBx_ci)^2]E[e_{f2ax_c\cdot i}^2] \\
& +E[(4bBy_cj + 8bCj^2)^2]E[e_{fdv2}^2] \\
& +E[(4bBy_cj)^2]E[e_{f2b\cdot y_c}^2] + E[(4bBy_cj)^2]E[e_{f2by_c\cdot j}^2] \\
& +E[(4B(ax_ci + by_cj))^2]E[e_{fa_5}^2] \\
& +E[(4cB(z_v - z_c)k - 8cCk^2)^2]E[e_{fdv3}^2] \\
& +E[(4cB(z_v - z_c)k - 8cA(z_v - z_c)^2)^2]E[e_{fs_1}^2] \\
& +E[(4cB(z_v - z_c)k)^2]E[e_{f2c\cdot z_{vc}}^2] \\
& +E[(4cB(z_v - z_c)k)^2]E[e_{f2cz_{vc}\cdot k}^2] + E[(2B^2)^2]E[e_{fa_6}^2] \\
& +E[(B^2)^2]E[e_{fB^2}^2] + E[(4aCi^2)^2]E[e_{fi^2}^2] \\
& +E[(4aCi^2)^2]E[e_{fa\cdot i^2}^2] + E[(4bCj^2)^2]E[e_{fj^2}^2] \\
& +E[(4bCj^2)^2]E[e_{fb\cdot j^2}^2] + E[(4C(ai^2 + bj^2))^2]E[e_{fa_3}^2] \\
& +E[(4cCk^2)^2]E[e_{fk^2}^2] + E[(4cCk^2)^2]E[e_{fc\cdot k^2}^2] \\
& +E[(4AC)^2]E[e_{fa_4}^2] + E[(4aAx_c^2)^2]E[e_{fx_c^2}^2] \\
& +E[(4aAx_c^2)^2]E[e_{fa\cdot x_c^2}^2] + E[(4bAy_c^2)^2]E[e_{fy_c^2}^2] \\
& +E[(4bAy_c^2)^2]E[e_{fb\cdot y_c^2}^2] \\
& +E[(4A(ax_c^2 + by_c^2))^2]E[e_{fa_7}^2] \\
& +E[(4cA(z_v - z_c)^2)^2]E[e_{fz_{vc}^2}^2] \\
& +E[(4cA(z_v - z_c)^2)^2]E[e_{fc\cdot z_{vc}^2}^2] \\
& +E[(4A(C+1))^2]E[e_{fa_8}^2] + E[(4AC)^2]E[e_{fm1}^2] \\
& +E[(4AC)^2]E[e_{f4A\cdot C}^2] + E[D^2]E[e_{fs_2}^2] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

視点 $(0, 0, z_v)$、楕円体の中心 (x_c, y_c, z_c) 、楕円体の定数 a, b, c は、一つの楕円体を描く限り変わらなく定数と見なされる。またそれらの定数間の計算による値も定数と見なすことができる。従って、それらの誤差を無視したときの誤差を $e_{af'}$ とすると、その平均平方和 $E[e_{af'}^2]$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
E[e_{af'}^2] \approx VAR[e_{af'}] \approx \\
& E[(Di^2)^2]E[e_{fx_p^2}^2] + E[(Dj^2)^2]E[e_{fy_p^2}^2] \\
& +E[(D(i^2+j^2))^2]E[e_{fa_1}^2] \\
& +E[D^2]E[e_{fa_2}^2] + 4E[D^2]E[e_{fr}^2] \\
& +E[(2B(2ax_ci) + 8aCi^2)^2]E[e_{fdv1}^2] \\
& +E[(2B(2ax_ci))^2]E[e_{f2ax_c\cdot i}^2] \\
& +E[(2B(2by_cj) + 8bCj^2)^2]E[e_{fdv2}^2] \\
& +E[(2B(2by_cj))^2]E[e_{f2by_c\cdot j}^2] \\
& +E[(2B(2ax_ci + 2by_cj))^2]E[e_{fa_5}^2] \\
& +E[(-2B(2c(z_v - z_c)k) + 8cCk^2)^2]E[e_{fdv3}^2] \\
& +E[(2B(2c(z_v - z_c)k))^2]E[e_{f2cz_{vc}\cdot k}^2] \\
& +E[(2B^2)^2]E[e_{fa_6}^2] \\
& +E[(B^2)^2]E[e_{fB^2}^2] + E[(4aCi^2)^2]E[e_{fi^2}^2] \\
& +E[(4aCi^2)^2]E[e_{fa\cdot i^2}^2] + E[(4bCj^2)^2]E[e_{fj^2}^2] \\
& +E[(4bCj^2)^2]E[e_{fb\cdot j^2}^2] + E[(4C(ai^2 + bj^2))^2]E[e_{fa_3}^2] \\
& +E[(4cCk^2)^2]E[e_{fk^2}^2] + E[(4cCk^2)^2]E[e_{fc\cdot k^2}^2] \\
& +E[(4AC)^2]E[e_{fa_4}^2] + E[(4AC)^2]E[e_{f4A\cdot C}^2] \\
& +E[D^2]E[e_{fs_2}^2] \qquad (23)
\end{aligned}
$$

4　ＬＮＳについての誤差解析

4.1　LNSの定義

語長はＦＰと同様 $n+m+2$ とし符号（s_a）に１ビット、指数部（e_a）に $n+m+1$ ビット使用するとする。値は $(-1)^{s_a}$ となる。指数部の少数点以下のビット数はｎビットとする。

4.2　ＬＮＳによる計算の誤差式

LNSにおいては乗除算、平方の計算では誤差は発生しないが、加減算、平方根演算、変換において誤差が発生する。従って、計算誤差式は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
d_l' &= \left[[\{x_p^2(1+e_{lcx_p})^2 + y_p^2(1+e_{lcy_p})^2\}(1+e_{la_1}) + \right. \\
&\qquad \left. z_v^2(1+e_{lcz_v})^2](1+e_{la_2})\right]^{1/2}(1+e_{lr}) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

$$ i_l' = \frac{x_p}{d_l'}(1+e_{lcx_p}) \qquad (25) $$

$$ j_l' = \frac{y_p}{d_l'}(1+e_{lcy_p}) \qquad (26) $$

$$ k_l' = \frac{(-z_v)}{d_l'}(1+e_{lcz_v}) \qquad (27) $$

$$A'_l = \left[\{ai_l'^2(1+e_{lca}) + bj_l'^2(1+e_{lcb})\}(1+e_{la_3}) + ck_l'^2(1+e_{lcc})\right](1+e_{la_4}) \quad (28)$$

$$B'_l = [\{(2a)(-x_c)i'_l(1+e_{lca})(1+e_{lcx_c}) + (2b)(-y_c)j'_l(1+e_{lcb})(1+e_{lcy_c})\}\cdot(1+e_{la_5}) + (2c)(1+e_{lcc})\{z_v(1+e_{lcz_v}) - z_c(1+e_{lcz_c})\}\cdot(1+e_{ls_1})k'_l\Big](1+e_{la_6}) \quad (29)$$

$$C'_l = \Big[[\{ax_c^2(1+e_{lca})(1+e_{lcx_c})^2 + by_c^2(1+e_{lcb})(1+e_{lcy_c})\}(1+e_{la_7}) + c(1+e_{lcc})\{z_v(1+e_{lcz_v}) - z_c(1+e_{lcz_c})\}^2\cdot(1+e_{ls_1})^2](1+e_{la_8}) - 1\Big](1+e_{lm_1}) \quad (30)$$

$$D'_l = \{B_l'^2 - (4A'_l)C'_l\}(1+e_{ls_2}) \quad (31)$$

ここで式(24)~(31)の個別の誤差項 e_{i_l} はそれぞれ以下の相対誤差である。

1. $e_{lcx_p} : x_p$ のLNSへの変換誤差
2. $e_{lcy_p} : y_p$ のLNSへの変換誤差
3. $e_{la_1} : x_p^2 + y_p^2$ の加算誤差
4. $*e_{lcz_v} : z_v$ のLNSへの変換誤差
5. $e_{la_2} : (x_p^2 + y_p^2) + z_v^2$ の加算誤差
6. $e_{lr} : \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_v^2}$ 平方根の誤差
7. $*e_{lca} : a$ のLNSへの変換誤差
8. $*e_{lcb} : b$ のLNSへの変換誤差
9. $e_{la_3} : ai^2 + bj^2$ の加算誤差
10. $*e_{lcc} : c$ のLNSへの変換誤差
11. $e_{la_4} : (ai^2 + bj^2) + ck^2$ の加算誤差
12. $*e_{lcx_c} : x_c$ のLNSへの変換誤差
13. $*e_{lcy_c} : y_c$ のLNSへの変換誤差
14. $e_{la_5} : (2a(-x_c))i + (2b(-y_c))j$ の加算誤差
15. $*e_{lcz_c} : z_c$ のLNSへの変換誤差
16. $*e_{ls_1} : z_v - z_c$ の減算誤差
17. $e_{la_6} : ((2a(-x_c))i + (2b(-y_c))j) + (2c(z_v - z_c))k$ の加算誤差
18. $*e_{la_7} : ax_c^2 + by_c^2$ の加算誤差
19. $*e_{la_8} : (ax_c^2 + by_c^2) + c(z_v - z_c)^2$ の加算誤差
20. $*e_{lm1} : (ax_c^2 + by_c^2 + c(z_v - z_c)^2) - 1$ の減算誤差
21. $e_{ls_2} : B^2 - 4AC$ の減算誤差

上記の個別相対誤差の内で*の付いているものは定数の変換誤差または定数と定数の演算による誤差である。D'_l の真の値は D であるから、D'_lの相対誤差を e_{lD}とすると、D'_l の絶対誤差　e_{al} は以下のようになる。

$$e_{al} = D'_l - D \quad (32)$$

$$= D\cdot e_{lD} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
e_{al} \approx\ & -(2i^2D + 4ax_ciB + 8ai^2C)e_{lcx_p} \\
& -(2j^2D + 4by_cjB + 8bj^2C)e_{lcy_p} \\
& -D(i^2 + j^2)e_{la_1} - De_{la_2} - 2De_{lr} \\
& -4(ai^2 + bj^2)Ce_{la_3} - 4ACe_{la_4} \\
& -4(ax_ci + by_cj)Be_{la_5} + 2B^2e_{la_6} \\
& -4(ax_c^2 + by_c^2)Ae_{la_7} - 4A(C+1)e_{la_8} \\
& +\{4c(z_v - z_c)kB - 8c(z_v - z_c)^2A\}e_{ls_1} \\
& -4ACe_{lm_1} + De_{ls_2} \\
& +\{-2k^2D + 4cz_vkB + 4c(z_v - z_c)kB \\
& -8ck^2C - 8cz_v^2A + 8cz_vz_cA\}e_{lcz_v} \\
& -\{4ax_ciB + 4ai^2C + 4ax_c^2A\}e_{lca} \\
& -\{4by_cjB + 4bj^2C + 4by_c^2A\}e_{lcb} \\
& -\{4ck^2C - 4c(z_v - z_c)kB + 4c(z_v - z_c)^2A\}e_{lcc} \\
& -\{4ax_ciB + 8ax_c^2A\}e_{lcx_c} \\
& -\{4by_cjB + 8by_c^2A\}e_{lcy_c} \\
& -\{4cz_ckB - 8cz_vz_cA + 8cz_c^2A\}e_{lcz_c} \quad (34)
\end{aligned}$$

e_{al} の個別の変換、及び計算の誤差e_{i_l} は係数及びその計算結果とは独立で、しかもそれらの誤差も互いに独立とみなすことができる。FPの場合と同様に誤差の平均平方和 $E[e_{al}^2] \approx VAR[e_{al}]$ を導出すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
E[e_{al}^2] \approx VAR[e_{al}] \approx\ & \\
& E[(2i^2D + 4ax_ciB + 8ai^2C)^2]E[e_{lcx_p}^2] \\
& +E[(2j^2D + 4by_cjB + 8bj^2C)^2]E[e_{lcy_p}^2] \\
& +E[(D(i^2 + j^2))^2]E[e_{la_1}^2] + E[D^2]E[e_{la_2}^2] \\
& +E[(2D)^2]E[e_{lr}^2] + E[(4(ai^2 + bj^2)C)^2]E[e_{la_3}^2] \\
& +E[(4AC)^2]E[e_{la_4}^2] + E[(4(ax_ci + by_cj)B)^2]E[e_{la_5}^2] \\
& +E[(2B^2)^2]E[e_{la_6}^2] + E[(4(ax_c^2 + by_c^2)A)^2]E[e_{la_7}^2]
\end{aligned}$$

$$+E[(4A(C+1))^2]E[e_{la_8}^2]$$
$$+E[\{4c(z_v-z_c)kB-8c(z_v-z_c)^2A\}^2]E[e_{ls_1}^2]$$
$$+E[(4AC)^2]E[e_{lm_1}^2]+E[D^2]E[e_{ls_2}^2]$$
$$+E[\{-2k^2D+4cz_vkB+4c(z_v-z_c)kB$$
$$-8ck^2C-8cz_v^2A+8cz_vz_cA\}^2]E[e_{lcz_v}^2]$$
$$+E[\{4ax_ciB+4ai^2C+4ax_c^2A\}^2]E[e_{lca}^2]$$
$$+E[\{4by_cjB+4bj^2C+4by_c^2A\}^2]E[e_{lcb}^2]$$
$$+E[\{4ck^2C-4c(z_v-z_c)kB+4c(z_v-z_c)^2A\}^2]\cdot$$
$$E[e_{lcc}^2]+E[\{4ax_ciB+8ax_c^2A\}^2]E[e_{lcx_c}^2]$$
$$+E[\{4by_cjB+8by_c^2A\}^2]E[e_{lcy_c}^2]$$
$$+E[\{4cz_ckB-8cz_vz_cA+8cz_c^2A\}^2]E[e_{lcz_c}^2] \qquad (35)$$

FPの場合と同様に、e_{al} の内、定数の変換誤差と計算誤差を無視した誤差を $e_{al'}$ とすると、その誤差の平均平方和、$E[e_{al'}^2]\approx VAR[e_{al'}]$ は以下のようになる。

$$E[e_{al'}^2]\approx VAR[e_{al'}]\approx$$
$$E[(2i^2D+4ax_ciB+8ai^2C)^2]E[e_{lcx_p}^2]$$
$$+E[(2j^2D+4by_cjB+8bj^2C)^2]E[e_{lcy_p}^2]$$
$$+E[(D(i^2+j^2))^2]E[e_{la_1}^2]+E[D^2]E[e_{la_2}^2]$$
$$+E[4D^2]E[e_{lr}^2]+E[16(ai^2+bj^2)^2C^2]E[e_{la_3}^2]$$
$$+E[(4AC)^2]E[e_{la_4}^2]+E[(4(ax_ci+by_cj)B)^2]E[e_{la_5}^2]$$
$$+E[(2B^2)^2]E[e_{la_6}^2]+E[D^2]E[e_{ls_2}^2] \qquad (36)$$

5 実験による評価

上記の理論式 (22)、(23)、(35)、(36) を評価するために以下の条件の楕円体描画計算を行った。

$$a=1/200^2,\quad b=1/300^2,\quad c=1/200^2,$$
$$x_c=60,\quad y_c=-20,\quad z_c=350,$$
$$z_v=-200,$$
$$-150\le x_p\le 150,\quad -150\le y_p\le 150$$

5.1 定数に関する誤差を無視した場合

定数と定数の演算による誤差または定数の変換誤差などは一つの画面を描画する間にはただ一度しか発生しない。従って計算誤差が画素ごとにランダムに現れるのではなく、画像の形が大きくなったり小さくなったりするだけで、それ以外は見た目には誤差なしで計算されたごとく画像生成が行われると考えられる。ここでは先ずそれらの誤差を無視して誤差評価を行う。表1はＦＰ及びＬＮＳにおいて定数に関する誤差を無視した場合の理論誤差と実験誤差である。理論値については、ＦＰの場合は式 (23) の平方根$\sqrt{E[e_{af'}^2]}$を、またＬＮＳの場合は式 (36) の平方根$\sqrt{E[e_{al'}^2]}$のＲＭＳを数値で評価したものである。ただし、その計算における個別の相対誤差 e_{i_l} の平方和には実験値によるものを使用した。ＦＰにおける個別計算の相対誤差 (37) の分布は台形型等が報告されているが [7]、特殊な条件での分布は必ずしも一定のタイプにならない。一方ＬＮＳにおける個別誤差 e_{i_l} (38) の分布は本実験の場合ほぼ完全な一様分布であった [8]。

$$-2^{-n}\le e_{i_f}\le 2^{-n} \qquad (37)$$

$$-2^{-2^{-n-1}}-1\le e_{i_l}\le 2^{2^{-n-1}}-1 \qquad (38)$$

表1の実験値はFP、LNSそれぞれ

$$\sqrt{E[e_{af'}^2]}\approx\sqrt{\frac{1}{N}\sum((D'_f-D)^2)}, \qquad (39)$$

$$\sqrt{E[e_{al'}^2]}\approx\sqrt{\frac{1}{N}\sum((D'_l-D)^2)} \qquad (40)$$

によるものである。ＦＰ、ＬＮＳいずれも理論値と実験値は大変よく合致しているとみなすことができる。特にＬＮＳの場合はほぼ完全な合致といえる。その理由としては、個別誤差 e_{i_l} の分布がほぼ完全な一様分布であるので、誤差の平均がほぼ0であることと、誤差変数及び計数などが確率変数としての独立の仮定が理論と実験でよく一致することが考えられる。ＦＰにおける $n=5\sim 7$ のところで、理論値と実験値の間に開きがある。楕円体描画の演算はある特殊演算であり、誤差にある程度の偏りがでることも考えられる。$n=5\sim 7$ のビット数では精度が低く過ぎて誤差の偏りが顕著に表れたと考えられる [3]。すなわち、変数の独立性、個別誤差の平均0の仮定がLNSの場合ほどには成立していないと考えられる。ちなみに、図1は $n=5$ における e_{fa_6} と対応するＬＮＳの個別誤差 e_{la_6} の分布を図示したものである。ＬＮＳの分布はほぼ完全な一様分布になっていることが分かる。　また誤差の大きさをＦＰとＬＮＳで比較した場合、ＦＰの誤差が３倍余り大きいことが分かる。同じ大きさの誤差に着目すると、ＬＮＳは１ビットから２ビット精度が良いと言える。これは円描画についての解析結果 [2] とほぼ同じである。

5.2 定数誤差も統計的に扱った場合

表2は式 (22)（ＦＰの場合）と式 (35)（ＬＮＳの場合）を比較したものである（ただし、ＲＭＳの比較である）。ただ一回限りしか計算されない定数に関する誤差も他の誤差と同様に確率変数的に扱って、計算したものである。ＦＰの場合もＬＮＳの場合も定数に関する個別誤差の分布は楕円演算とは別計算で100 のサンプルを使用して、実験的に得たものを使用した。ＦＰ、ＬＮＳいずれの場合も理論値と実験値が合致しているとはいえない。これは実験値の計算においては、定数の誤差がただ一回の計算によってしか得られず、平均値によるものではないことが原因として考えられる。実際、実験値が理論値より大きい場合は、定数に関する個別誤差が平均以上にばらつき、逆の場合はその

個別誤差のばらつきが小さいことが確認された。理論値と実験値にズレはあるが、定数に関する誤差も誤差であるので、また定数誤差を無視した場合は理論値と実験値がよく合致したことから、FP、LNSともに図2の理論値が実際に期待される誤差のRMSであると考えられる。

表3は楕円体とその背景の区別において誤りがあった画素数を表したものである(64ビットFPで計算した結果との比較による)。FPの場合完全に誤差がなくなるのは $n = 19$ からであり、LNSの場合 $n = 15$ である。誤り数の比較では、概して、LNSの方が約2ビット精度が良いと読みとれる。

図2はFPの $m = 7, n = 7$ による楕円体であり、図3はLNSの $m = 7, n = 7$ により描画演算された楕円体である。さらに、図4はLNSの $m = 7, n = 6$ によるものである。明らかに、図3は図2より精度の良い画像と言える。図2と図4の比較ではほぼ同じ数のギザギザがあるのでほぼ同精度と見なすことができるが、図2はギザギザが不規則であるから、多少精度が劣ると言う評価もできる。

因みに、本実験では以下の単純な照明モデル[6]を用いた。

$$I_d = k_d I_p cos\theta \tag{41}$$

ここで、I_d:表面輝度、$k_d = 1.0$:拡散反射係数(各色)、$I_p = 256$:平行光源の光の強さ(一定白色光)、θ:入射角。

表 1: 定数誤差を無視した場合の理論誤差と実験誤差(RMS)の比較

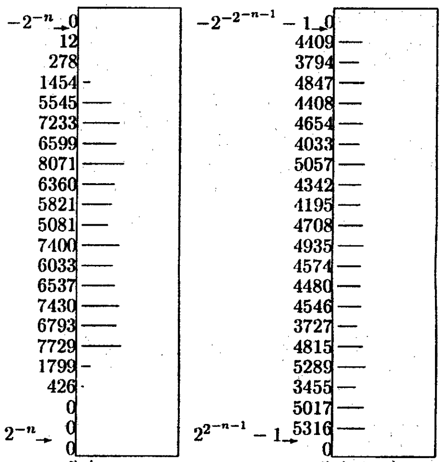
n	FP 理論値	FP 実験値	LNS 理論値	LNS 実験値
5	2.67e-5	2.36e-5	8.57e-6	8.62e-6
6	1.35e-5	1.26e-5	4.35e-6	4.37e-6
7	6.74e-6	6.41e-6	2.12e-6	2.14e-6
8	3.35e-6	3.21e-6	1.07e-6	1.07e-6
9	1.67e-6	1.64e-6	5.34e-7	5.34e-7
10	8.35e-7	8.15e-7	2.67e-7	2.65e-7
11	4.17e-7	4.12e-7	1.33e-7	1.33e-7
15	2.61e-8	2.57e-8	8.35e-9	8.30e-9
21	4.07e-10	4.03e-10	1.30e-10	1.30e-10
22	2.03e-10	2.00e-10	6.47e-11	6.48e-11
23	1.02e-10	1.01e-10	3.24e-11	3.24e-11

6 むすび

FPとLNSを使用して、レイトレーシングによる楕円体の演算誤差式を導出し、それを、実験で確認した。個別相対誤差と係数が独立という仮定で、相対誤差の2次以上を無視するだけの粗っぽい誤差式導出方法を使用したが、計算式が複雑であったにもかかわらず、FP、LNSともに理論値と実験値とは非常によく合致した。LNSの方が誤差の大きさ、及び描画画像変形度で比べると1ビットから2ビット精度がよいことが分かった。FPはIEEE-754のけち表現によれば1ビット精度を増すので、LNSの方が1ビッ

表 2: 定数誤差も含めた場合の理論誤差と実験誤差(RMS)の比較

n	FP 理論値	FP 実験値	LNS 理論値	LNS 実験値
5	2.95e-5	4.34e-5	9.11e-6	1.33e-5
6	1.52e-5	1.40e-5	4.78e-6	4.90e-6
7	7.97e-6	6.57e-6	2.43e-6	2.40e-6
8	4.13e-6	3.22e-6	1.23e-6	1.11e-6
9	2.13e-6	1.71e-6	6.15e-7	5.72e-7
10	1.11e-6	8.56e-7	3.10e-7	3.36e-7
11	5.46e-7	4.22e-7	1.55e-7	2.31e-7
15	3.42e-8	2.77e-8	9.77e-9	9.19e-9
21	5.34e-10	4.10e-10	1.51e-10	1.72e-10
22	2.68e-10	2.24e-10	7.58e-11	6.81e-11
23	1.36e-10	1.05e-10	3.81e-11	6.50e-11



e_{fa_6}の分布 ($n = 5$) の場合　e_{la_6}の分布 ($n = 5$) の場合

図 1: 誤差の分布の比較

表 3: 楕円体と背景の区別に誤りがあった画素数

n	誤り数(FP)	誤り数(LNS)
8	398	67
9	174	41
10	101	36
11	54	30
12	33	4
13	32	5
14	10	2
15	1	0
16	0	0
17	1	0
18	1	0
19	0	0

ト以下ではあるが精度的には少しだけ良いが、ほぼ同等であるといえる。以前の研究[3]により、FP,LNSともに語長18,19ビット程でレイトレーシングが可能であると言える。従って、レイトレーシングそのものの演算に付加して、多少の計算があっても、通常扱う単精の３２ビット演算（ＦＰ、ＬＮＳに関わらず）で十分な計算精度が得られると考えられる。

なお、本研究の一部は財団法人日東学術振興財団の助成による。

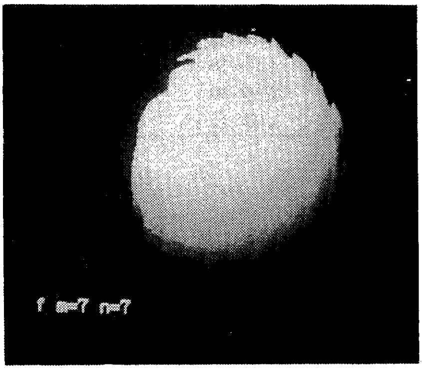


図 2: FP m=7, n=7 で描画した楕円体

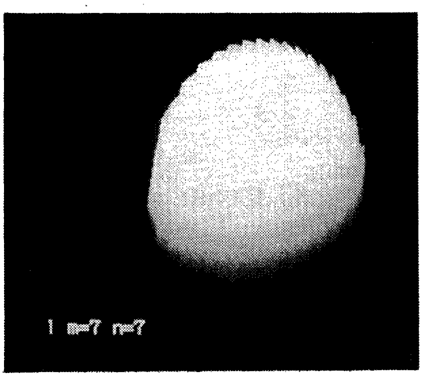


図 3: LNS m=7, n=7 で描画した楕円体

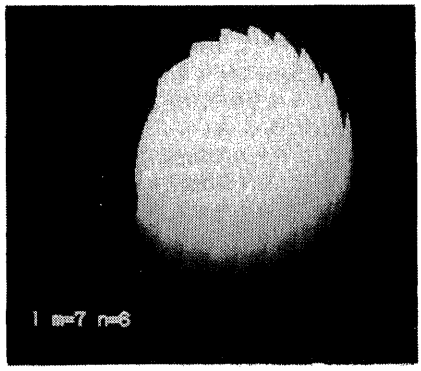


図 4: LNS m=7, n=6 で描画した楕円体

参考文献

[1] Kurokawa T., Mizukoshi T.,"A Fast and Simple Method for Curve Drawing—A New Approach Using Logarithmic Number System—", J of Information Processing, 14, 2,pp.144-152, 1991

[2] Kurokawa T.,"Error Analysis of Circle Drawing Using Logarithmic Number Systems", IEICE Trans. INF. & SYST., E75-D, 4, pp.577-584, 1992

[3] 黒河、" レイトレーシングにおける画像生成演算の誤差解析——浮動小数点演算による楕円体——"、情報処理学会研究報告、94,17,pp.47-54, 1994

[4] Arnold M., Bailey T., Cowles J., "Comments on "An Architecture for Addition and Subtraction of Long Word Length Numbers" in the Logarithmic Number Systems", IEEE Trans. on Computers, 41, 6, pp.786-788, 1992

[5] Lewis D. M., "An Accurate LNS Arithmetic Unit Using Interleaved Memory Function Interpolator", Proceedings 11th Symposium on Computer Arithmetic, pp.2-9,1993

[6] 千葉、村岡, レイトレーシングＣＧ入門, サイエンス社, 1990

[7] Liu B., Kaneko T., "Error Analysis of Digital filters Realized with Floating-Point Arithmetic", Proc. IEEE, 57, 10, pp.1735-1747, 1969

[8] Kurokawa T., Payne J. A., Lee S. C.,"Error Analysis of Recursive Digital Filters Implemented with Logarithmic Number Systems", IEEE Trans. of ASSP, 28, 6, pp.706-715, 1980