

## 疑似弾性スプライン曲線

井上秀彦 柴田幸夫

群馬大学工学部情報工学科

〒376 桐生市天神町1-5-1

CAD やグラフィクスにおいてよく用いられる曲線は局所的な滑らかさに基づいて曲線が定められているため、大域的な滑らかさや見た目の自然さが必ずしも保証されていない。本論文では、通過点が指定されたときの曲線生成における大域的な滑らかさや見た目の自然さの評価基準として「疑似エネルギー」を定義し、その最小化に基づいてエルミート曲線の接線ベクトルの最適化を行う効率のよい方法を提案する。

## Pseudo-spline curve

Hidehiko Inoue and Yukio Shibata

Department of Computer Science, Gunma University

1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma 376

In CAD and graphics, smooth curves are usually generated so that they have a high degree of differentiability with respect to the curve parameter. However, this does not necessarily guarantee their global smoothness. In this paper, we introduce "pseudo-energy" for measuring the global smoothness of a curve and present a simple scheme for generating a smooth Hermite spline curve based on it. An efficient table lookup technique is proposed for this computation. We also show that the length of a generated curve and the area of the region it encloses can be evaluated accurately and efficiently by our table lookup technique. Some examples are given to illustrate our scheme.

## 1 はじめに

CADやグラフィクスにおける曲線生成の手段として、ベジェ曲線やBスプライン曲線がよく用いられる[3, 5, 12, 13]。これらは「制御点」と呼ばれる点をインタラクティブに調整して望ましい形状を作り出すものであるが、寸法に制約の多い場合などでは指定した点を通る曲線を生成することも必要となる。そのような場合に用いられるのが(狭義の)「スプライン曲線」である。これは各区間毎にパラメータ $t$ の多項式で表される曲線を定義し、その係数を区間のつなぎ目であるべく高次の連続性が成り立つように定めるものである。しかし、連続性は局所的な滑らかさを保証するものであり、必ずしも大域的なうねりやオーバーシュートを減らす条件とはならない。しかも、一点の変更が残りのすべての部分に波及するので、局所性がない。また、各点をパラメータ $t$ のどのような値に対応させるかという自由度が残る。これを定める方式がいろいろ提案されているが[2, 5]、その対応づけ仕方しだいで曲線が見た目に自然にも不自然にもなる。従来は、これを試行錯誤的に調整して曲線を生成していた。本論文の目的は、局所性を保証しつつ大域的なうねりやオーバーシュートを減らす条件を考えることである。

局所性を保証するには、各点の接線方向とその大きさを局所的に指定すればよく、これはエルミート補間曲線を用いることにより保証される[12]。しかし、大域的なうねりやオーバーシュートを減らすためには、各点での接線方向とその大きさをどう指定するかが問題として残る。

弾性棒を曲げて得られる曲線は見た目に自然な曲線となることから、大域的なうねりやオーバーシュートを減らすための条件の一つとして、弾性棒によって生じる曲線になるべく近づけるようにすることが古くから考えられている。実際、「スプライン」という名称もここから生じた。このようにして得られた曲線は、指定された条件の下で歪みエネルギーが最小であるという性質をもつ。しかし、歪みエネルギーを最小化するには多くの計算量を要する。低次の多項式の方が余分なうねりやオーバーシュートを含まない[5]、本論文では曲線の表現式として3次エルミート曲線を用いる。そして、歪みエネルギーを近似的に最小化する効率的な計算方法を提案する。

## 2 曲線の評価基準

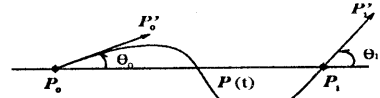


図1: エルミート曲線の境界条件

図1に示す2点

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

および、両端点での接線ベクトル

$$P'_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos \theta_0 \\ r_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}, \quad P'_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$r_0, r_1 > 0, \quad -\pi \leq \theta_0, \theta_1 \leq \pi \quad (3)$$

に対する3次のエルミート曲線は、

$$\begin{aligned} P(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= b(t)P_1 + c(t)P'_0 + d(t)P'_1 \quad (4) \\ b(t) &= -2t^3 + 3t^2, \quad c(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ d(t) &= t^3 - t^2 \quad (5) \end{aligned}$$

となる[3]。本論文では各区間毎にうねりやオーバーシュートの少ない曲線を用意し、それを拡大縮小、回転、移動して滑らかに接続することにより、任意に与えた点列を通る3次エルミート曲線を生成する。

従来は、うねりの少ない曲線を生成するために、以下の「歪みエネルギー」[1, 11]の最小化がよく用いられてきた[4, 6, 9]。

$$E = \int_0^1 \frac{[x''y' - x'y'']^2}{[(x')^2 + (y')^2]^{5/2}} dt \quad (6)$$

両端での接線方向 $\theta_0, \theta_1$ が与えられたとき、式(6)は $r_0, r_1$ の関数となる。したがって、式(6)を最小とする $r_0, r_1$ を計算すればよいように思われる。しかし、最小値が存在しない場合、および極小値は存在するが $r_0, r_1$ を大きくすると式(6)の値がいくらでも減少する場合がある。これは、式(6)の $r_0, r_1$ が大きいき歪みエネルギーは $O(1/r_0, 1/r_1)$ であり、 $r_0, r_1 \rightarrow \infty$ で0となるからである。 $r_0 = r_1$ とした場合のそのような曲線の例と対応する歪みエネルギーの対数グラフ(底は10)を図2, 3に示す。図2は極小値も最小値も存在しない場合であり、

左が曲線，右が歪みエネルギーの図である。図3に極小値は存在するが最小値は存在しない場合を示す ( $x, y$  がパラメータ  $t$  の多項式，したがって  $t$  に関して  $C^\infty$  連続であっても図の曲線  $c$  のように角ができる場合があることに注意)。このことから，曲線の生成基準として「指定した境界条件を満足する無数の滑らかな曲線の中から歪みエネルギーが最小なものを選ぶ」という基準は合理的でない。

図2, 3から  $r_0, r_1$  を大きくすると，曲線の長さがいくらかでも増加する。このことは，歪みエネルギーだけでなく，同時にその長さも考慮しなければならないことを示唆する。そこで，本論文では，式(6)に長さの二乗を重みとして付け加えた

$$J = E \left( \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} ds \right)^2 \quad (7)$$

の最小化を曲線の評価基準とする。長さを二乗するのは，曲線の長さは  $r_0, r_1$  が大きいとき  $O(r_0, r_1)$  となり， $r_0, r_1 \rightarrow \infty$  で式(7)では漸近的に  $r_0, r_1$  の正値2次式となるので，必ず最小値が存在するからである。以後，この  $J$  を「疑似歪みエネルギー」，あるいは単に「疑似エネルギー」とよぶ。さらに，式(7)を最小とする曲線を「疑似スプライン曲線」とよぶ。

式(4)を式(7)に代入すると， $J$  は  $\theta_0, \theta_1, r_0, r_1$  の関数となる。これを  $J(\theta_0, \theta_1, r_0, r_1)$  と書く。これを数値計算により  $r_0, r_1$  に関して最小化し，得られる関数を  $J(\theta_0, \theta_1)$  と書く。すなわち，

$$J(\theta_0, \theta_1) = \min_{r_0, r_1} J(\theta_0, \theta_1, r_0, r_1) \quad (8)$$

とする。また，その最小値を与える  $r_0, r_1$  も  $\theta_0, \theta_1$  の関数であるから，これらをそれぞれ  $r_0 = r_0(\theta_0, \theta_1), r_1 = r_1(\theta_0, \theta_1)$  と書く。そして，計算を効率化するために，関数  $J(\theta_0, \theta_1), r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1)$  を予め表形式で計算し，必要に応じて補間により参照する。

### 3 疑似スプライン曲線の生成

与えられた  $n+1$  個の点列  $P_0(x_0, y_0), \dots, P_n(x_n, y_n)$  を図4のように折れ線で結んだときの各線分の長さを  $l_1, \dots, l_n$  とし，ベクトル  $P_i P_{i+1}$  と  $x$  軸とのなす角度を  $\phi_i$  とする。2点  $P_i, P_{i+1}$  間の補間曲線の点  $P_i$  における接線ベクトルがベクトル  $P_i P_{i+1}$  と角度  $\alpha_i$  をなすとすると，2点  $P_i, P_{i+1}$  間の補間曲線は次のようにして定まる。まず，前処理で作成した表を補間して

$$r_0 = r_0(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i),$$

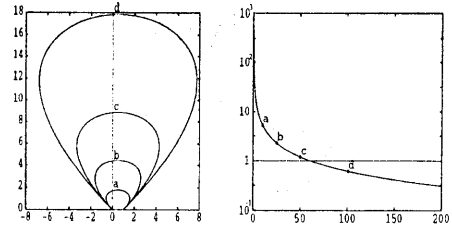


図2: 曲線の歪みエネルギー (極小値が存在しない場合)

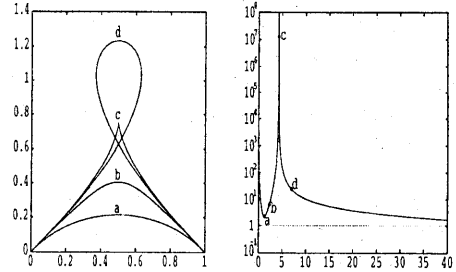


図3: 曲線の歪みエネルギー (極小値が存在する場合)

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i), \\ J &= J(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \end{aligned} \quad (9)$$

を計算する。そして，2点  $(0,0), (1,0)$  間での接線ベクトルが

$$\begin{aligned} P'_0 &= \begin{pmatrix} r_0 \cos \alpha_i \\ r_0 \sin \alpha_i \end{pmatrix}, \\ P'_1 &= \begin{pmatrix} r_1 \cos(\alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \\ r_1 \sin(\alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

であるエルミート曲線を式(4)により計算し， $l_i$  倍に拡大する。得られた曲線を角度  $\phi_i$  だけ回転し，さらに  $P_i$  だけ平行移動すると，2点  $P_i, P_{i+1}$  間を補間する曲線となる。

以上をすべての区間に行なうことにより，点  $P_0, \dots, P_n$  を補間することができる。残るのは，接線方向  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  をどう定めるかということである。曲線の全疑似エネルギーは  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  の関数となるので， $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  に関する最適化を行なうことにより，疑似エネルギー

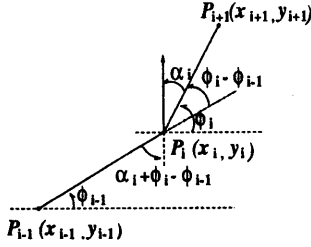


図 4: 補間点と接線方向の関係

を最小とする接線方向を計算することができる。しかし、そうすると局所性が失われ、一つの点および接線方向の変化が曲線全体に波及する。

そこで、本論文では文献<sup>[7]</sup>で述べられている局所性を保ちつつ接線方向を定める方法を次のように一般化し、各点での接線方向  $\alpha_i$  を定める。図 5 の点線で示すように 3 点

$P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  を通るように弾性棒を合わせ、棒により描かれる曲線の疑似エネルギーが最小となるように点  $P_i$  における接線方向  $\alpha_i$  を定める。

図 1 において点  $P_0$  における接線方向  $\theta_0$  を変化させたときの疑似エネルギーを  $J(\theta_0)$  で表し、 $P_0$  での接線方向を  $\theta_0$  としたとき疑似エネルギーが最小となる点  $P_1$  における接線方向を  $\theta_1(\theta_0)$  で表す。すると、点  $P_i$  での接線方向を  $\alpha_i$  としたときの弾性棒の疑似エネルギーは

$$w = l_{i-1}J(\alpha_i + \phi_i - \phi_{i-1}) + l_iJ(\alpha_i) \quad (11)$$

となる。この式を各  $\alpha_i (i = 1, \dots, n-1)$  に対して最小化することにより各点での接線方向を定める。また、点  $P_0, P_n$  における接線方向は図 6 に示すように点  $P_1, P_{n-1}$  の接線方向を定めるときの弾性棒の点  $P_0, P_n$  における接線方向

$$\alpha_0 = \theta_1(\alpha_1 + \phi_1 - \phi_0), \quad \alpha_n = \phi_{n-1} + \theta_1(\alpha_{n-1}) \quad (12)$$

により計算する。

## 4 補間例

### 4.1 最適化のための補助データの作成

関数  $J(\theta_0, \theta_1), r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1)$  の補間は次のように行なった。

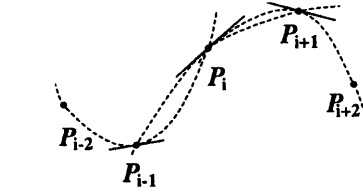


図 5: 弾性棒を用いた各点の接線方向の定め方

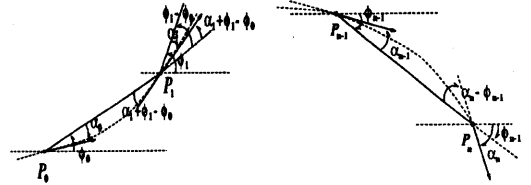


図 6: 端点における接線方向の定め方

領域  $(-\pi, \pi] \times (-\pi, \pi]$  を格子状に分割し、各格子点  $(\Theta_i, \Theta_j) \ i, j = 1, \dots, m$  に対して  $J$  を最小にする  $r_0, r_1$  を数値的に計算する。ここでは、 $m = 36$  とし、ロンバーグ積分と共役勾配法を用いた<sup>[10]</sup>。ただし  $(|\Theta_i|, |\Theta_j|) = (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$  に対しては、問題の対称性により解が一意的に定まらないので、この場合の  $r_0, r_1, J$  は不定とする。また  $(\Theta_i, \Theta_j) = (0, 0)$  のとき  $J = 0$  となり、 $r_0, r_1$  は定まらないので不定とする。

このようにすれば、任意に与えた  $(\theta_0, \theta_1)$  に対して  $r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1), J(\theta_0, \theta_1)$  は点  $(\theta_0, \theta_1)$  の近傍の格子点に対する値を補間して得られるように思われるが、一つ問題が生じる。それは、これらの関数に特異点が存在することである。例えば、図 7 において点  $P_0$  における接線方向  $\theta_0$  を固定し、点  $P_1$  における接線方向  $\theta_1$  を 0 からしだいに増やしていくと、 $J$  を最小とする曲線は始めは変曲点をもつ“s”字型曲線(図の a)となるが、ある角度  $\theta_1$  で変曲点のない“c”字型曲線(図の b)にジャンプする。

このことから、不連続点を検出するには端点  $P_0, P_1$  での曲率が同符号になるか異符号になるかを調べればよいことがわかる。そこで、曲線を

$$\begin{aligned} k(0)k(1) &\geq 0 \text{ のとき, } c \text{ 型} \\ k(0)k(1) &< 0 \text{ のとき, } s \text{ 型} \\ \text{値がないとき, } x \text{ 型} \end{aligned} \quad (13)$$

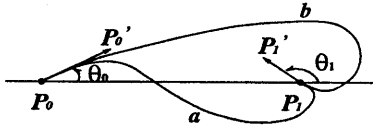


図 7: 曲線と接線方向の関係

に分類する。ただし、

$$k(t) = x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \quad (14)$$

とする。そして、与えられた  $(\theta_0, \theta_1)$  に対して最も近い格子点の型と同じ型の格子点の値のみから補間する。このようにして得られた関数  $J(\theta_0, \theta_1)$  の値を用いて、各  $\Theta_i$  に対する  $J(\Theta_i, \theta_1)$  を最小にする  $\theta_1$  を  $i = 1, \dots, m$  について補間して関数  $J(\theta)$  を定め、それに対する  $J$  の値  $J(\Theta_i, a(\Theta_i))$  を  $i = 1, \dots, m$  について補間して関数  $\theta_1(\theta)$  を定める。

#### 4.2 開曲線の補間例

$n+1$  個の点  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$  が与えられたとき、以下の 5 通りの方法で補間した結果を示す。

3 次スプライン曲線 A: パラメータ  $t$  の分点  $t_0, t_1, \dots, t_n$  を等間隔に選んだもの [5]。

3 次スプライン曲線 B: パラメータ  $t$  の分点  $t_0, t_1, \dots, t_n$  の間隔を各点間の距離に比例するように選んだもの [5]。

エルミート曲線 A:  $P_0$  および  $P_n$  での接線方向を隣接点を結ぶ弦方向にとり、 $P_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  では、曲線の接線方向を 2 点  $P_{i-1}, P_{i+1}$  を結ぶ線分に平行にとる [12]。接線の大きさは、2 点間の距離に等しくとる。  
エルミート曲線 B:  $P_0, P_n$  での接線方向を、それぞれ  $P_i, P_{i+1}, P_{i+2} (i = 0, n-2)$  を通る円弧の  $P_0$  および  $P_n$  における接線方向から定め、 $P_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  での曲線の接線方向を  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  を通る円弧の  $P_i$  での接線方向から定める。接線の大きさは、2 点間の距離に等しくとる。

疑似スプライン曲線: 本論文で提案した曲線。

表 1 のデータに対する曲線を図 8-12 に (ただし、 $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  とする)、表 2 のデータに対する曲線を図 13-17 に示す。最適化を行なった場合と行なわない場合のエルミート曲線を比べると、表 1 のデータに対しては、端区間を除く区間においてほぼ同様な

表 1: 図 8-12 のデータ

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
$y_i$	0.0	0.0	0.0	0.0	y	0.0	0.0	0.0	0.0

表 2: 図 13-17 のデータ

$i$	0	1	2	3
$x_i$	0.0	2.0	1.0	3.0
$y_i$	0.0	-0.1	-0.1	0.0

曲線となっている。一方、表 2 のデータにおいては、最適化することにより最適化しない場合にあった角がなくなり、見たために自然な曲線となる。

本論文で述べた疑似スプライン曲線では接線ベクトルの最適化を行なっているが、その最適化に反復法を用いると計算量が増加して実用的でない。しかし、必ずしも厳密な最適解を計算する必要はなく、近似的な最適解が計算できればよいので、探索区間の内部に 3 点を取り、2 次補間法 [8] を行なえば十分な精度の解が得られる。Sun SPARC station 10 上での最適化しない場合、厳密な最適化を行なった場合、近似的な最適化を行なった場合の計算時間 (秒) を表 3 に示す。ただし、表に示した時間は前処理 (補助データの読み込み) の時間を除いた計算時間である。以上は開曲線の場合であるが、閉曲線の場合も同様に生成できる。

表 3: 計算時間の比較

	表 1	表 2
最適化しない場合	1.9	0.1
厳密な最適化を行なった場合	2.5	0.2
近似的な最適化を行なった場合	2.1	0.1

## 5 曲線の長さとおそれ囲まれる面積

### 5.1 疑似スプライン曲線の長さ

式 (4) の曲線の長さを  $L(\theta_0, \theta_1)$  と定義する。すると、 $n+1$  個の点  $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$  を補間する疑似ス

ブライン曲線の長さは、閉曲線の場合

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} l_i L(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \quad (15)$$

となり、閉曲線の場合は

$$L_n + l_n L(\theta_n, \theta_0 + \phi_0 - \phi_n) \quad (16)$$

となる。したがって、関数  $L(\theta_0, \theta_1)$  を予め表形式で計算しておき、その値を補間すれば、疑似スプライン曲線の長さを計算することができる。例として、単位円周上に等間隔にとった  $n$  個の点

$$(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (17)$$

に対して、疑似スプライン曲線により補間した曲線の長さ各点を折れ線で結んだ多角形の周長を比較した結果を表4に示す。表中の「等価な点数」は、真の長さを  $\bar{L}$ 、式(16)により計算した長さを  $L$ 、折れ線の周長を  $L_n$  としたとき、 $|\bar{L} - L| > |\bar{L} - L_n|$  となる最小の  $n$  の値である。

## 5.2 疑似スプライン曲線で囲まれる面積

式(4)の曲線と  $x$  軸で囲まれる部分の面積を  $S(\theta_0, \theta_1)$  と定義する。ただし  $x$  軸の下側の部分は負の面積とみなす。すると、 $n+1$  個の点  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  を通る疑似スプライン曲線と両端を結んだ直線で囲まれる部分の面積は、

$$|S_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i^2 S(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i)| \quad (18)$$

となり、閉曲線によって囲まれる部分の面積は、

$$|S_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i^2 S(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) - l_n^2 S(\theta_n, \theta_0 + \phi_0 - \phi_n)| \quad (19)$$

となる。ただし、 $S_0$  は補間点を結ぶ折れ線と両端点を結んだ直線で囲まれる部分の面積

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) + \frac{1}{2} (x_n y_0 - y_n x_0) \quad (20)$$

である。したがって、関数  $S(\theta_0, \theta_1)$  を予め表形式で計算しておき、その値を補間すれば、囲まれる部分の面積を

計算することができる。例として、単位円周上に等間隔にとった  $n$  個の点

$$(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

に対して、疑似スプライン曲線により囲まれた部分の面積と各点を折れ線で結んだ多角形の面積を比較した結果を表5に示す。表中の「等価な点数」の意味は、長さの場合と同様である。

## 6 おわりに

本論文では、「疑似エネルギー」を定義し、その最小化に基づいたエルミート曲線の接線ベクトルの最適化方式を示した。このとき、前処理によって作成したデータを基にして接線ベクトルの最適化を行なっているので、複雑な計算を行なう必要がない。また、「歪みエネルギー」や「長さ」のような物理的、幾何学的な量に基づいているので、見た目に自然な曲線を簡単に生成できる。さらに、曲線の長さや曲線によって囲まれる部分の面積も予め計算してデータ化してあるので、曲線を生成すると同時にその長さやその囲む部分の面積を簡単に高精度で計算できる。本論文で提案した方式は、CADやグラフィックスで実用的な意義が大きいと思われる。

## 参考文献

- [1] 安達 忠治: ベクトル解析, 倍風館 (1986).
- [2] Böhm W., Farin G. and Kahmann J.: A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design*, 1, pp. 1-60 (1984).
- [3] Farin G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 2nd ed., Academic Press (1990).
- [4] Horn B. K.: The curve of least energy, *ACM Trans. Math. Software*, 9, 4, pp. 441-460 (1983).
- [5] Hoschek J. and Lasser D.: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A. K. Paters (1993).
- [6] Inoue H., Shibata Y. and Miyazaki H.: Generation of interpolation curves with the least energy using dynamic programming, *Compt. Math. Appl.*, 25, 6, pp. 25-34 (1993).

- [7] 伊理正夫, 藤野和建: 数値計算の常識, pp. 116 - 119 共立出版 (1987).
- [8] 今野 浩, 山下 浩: 非線形計画法, 日科技連 (1978).
- [9] Newbery A. C. R. and Garrett T. S.: Interpolation with minimized curvature, *Compt. Math. Appl.*, **22**, 1, pp. 37-43 (1991).
- [10] Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T.: *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*, pp. 280-289, Cambridge University Press (1986).
- [11] Saada A. S.: *Elasticity : Theory and Applications*, Pergamon (1986).
- [12] 杉原厚吉: グラフィックスの数理, 共立出版 (1995).
- [13] 山口富士夫: 形状処理工学 I, II, 日刊工業新聞社 (1982).

表 4: 単位円周上の点に対するスプライン閉曲線の長さ (真の値 6.283185307)

点数	長さ	等価な点数
3	6.18957607	11
4	6.26067766	22
5	6.27774034	44
6	6.27785088	45
7	6.28605010	61
8	6.28591825	62
9	6.28219908	103
10	6.28757066	49

表 5: 単位円周上の点に対するスプライン閉曲線により囲まれる面積 (真の値 3.141592654)

点数	面積	等価な点数
3	3.04563765	15
4	3.11345972	28
5	3.13063511	44
6	3.13614662	62
7	3.13830387	80
8	3.13961368	103
9	3.14053616	141
10	3.14105203	196

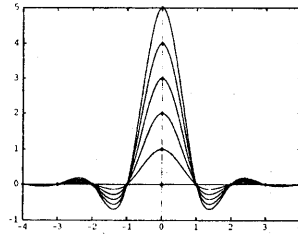


図 8: 3次スプライン曲線 A

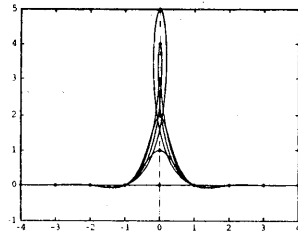


図 9: 3次スプライン曲線 B

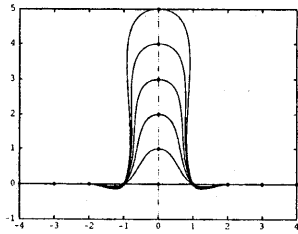


図 10: エルミート曲線 A

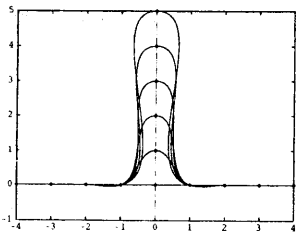


図 11: エルミート曲線 B

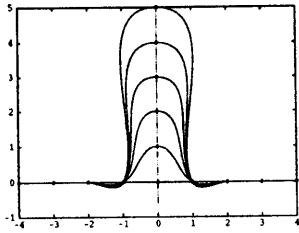


図 12: 疑似スプライン曲線

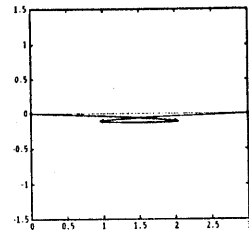


図 15: エルミート曲線 A

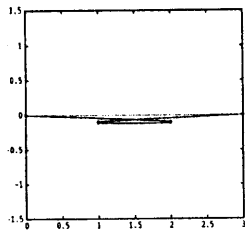


図 13: 3次スプライン曲線 A

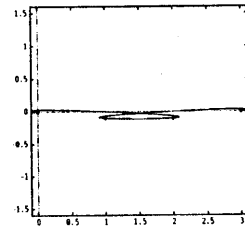


図 16: エルミート曲線 B

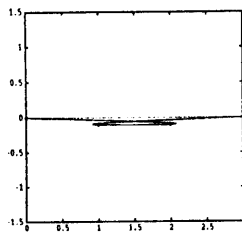


図 14: 3次スプライン曲線 B

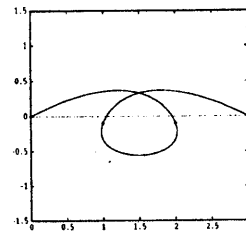


図 17: 疑似スプライン曲線