

Low-discrepancy sequence を用いた準モンテカルロレンダリング

大淵 竜太郎, 青野 雅樹

日本アイ・ビー・エム東京基礎研究所
〒242 神奈川県大和市下鶴間 1623-14, LAB-S73
(ohbuchi@trl.ibm.co.jp and aono@trl.ibm.co.jp)

要旨

本論文では、コンピュータグラフィクスにおける global illumination (大域照明) 問題の ray-tracing (光線追跡法) による解法を low-discrepancy sequences (LDSs) を用いた quasi-Monte Carlo (QMC) 積分法により高速化する手法を述べる。本論文ではまず LDS の性質について簡単に紹介し、ついで QMC 光線追跡法が単純な Monte Carlo 光線追跡法より速く、また Stratified-Monte Carlo 光線追跡法とほぼ同速度で収束することを実験的に示す。最後に、適応的に光源をサンプルする error-bounded luminaire sampling (EBLS) 法を提案する。実験により、EBLS 法は QMC の速く正確な収束と随時サンプル数を追加できる性質をうまく使い、画像全体での光源サンプル数を固定した場合には、EBLS 法を用いない場合に比べて、特に半影などの偏差の大きくなり易い部分で画像の質を改善することを示す。

キーワード: 大域照明問題, 準モンテカルロ積分, モンテカルロ積分, 数値積分, 光線追跡法, 写実的画像生成。

Quasi-Monte Carlo rendering with low-discrepancy sequences

Ryutarou Ohbuchi and Masaki Aono

Tokyo Research Laboratory, IBM Japan, Ltd.
1623-14 Shimo-tsuruma, Yamato-shi, Kanagawa-ken, 242, Japan
(ohbuchi@trl.ibm.co.jp and aono@trl.ibm.co.jp)

Abstract

In this paper, we describe a quasi-Monte Carlo (QMC) method, which employs deterministic low-discrepancy sequences (LDSs), to solve the global illumination problem. We first describe characteristics of LDSs. Then, in a distribution ray-tracing setting, we show that the QMC integral with LDSs converges significantly faster than the Monte Carlo (MC) integral and about as fast as the stratified-Monte Carlo (SMC) integral with a typical pseudo-random sequence. Finally, we describe our adaptive error-bounded luminaire sampling (EBLS) method. The EBLS method exploits two advantages of QMC; (1) convergence is faster and more accurate than MC, and (2) unlike SMC, samples can be added incrementally in small increments. Experiments showed that, given a budget of luminaire samples per image, the EBLS algorithm produces higher-quality images, especially in the penumbrae, than a method in which the numbers of samples per luminaire was predetermined.

Keywords: Global illumination problem, quasi-Monte Carlo integral, Monte Carlo integral, numerical integration, ray-tracing, realistic image synthesis.

1.はじめに

コンピュータグラフィックスの分野では、大域的な光の伝搬[Kajiya86], 光線追跡法や Z-buffer 法におけるスーパーサンプリング[Foley90, Glassner95]など数々の問題が数値積分として定式化できる。その被積分関数が複雑な時、あるいは高次元なとき、数値積分にはしばしば Monte-Carlo(MC)法が用いられる。(MC 法について [Halton70, Kalos86]等を参照。) MC 法は、関数 $f(x)$ の定積分 $I(f)$ を次の式で近似する。

$$I(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i) \quad (1)$$

ここで関数 $f(x)$ は N 個の乱数により選ばれた点 t_i において評価する(現実には pseudo-random sequence (PRS, 疑似乱数系列)を用いる)。この基本的 MC 法の誤差の大きさの平均は $O(N^{-1/2})$ で、この収束の遅さが実用上の障害となっている。MC 法の収束を速くかつ正確にする為に今までに提案されてきた方法には importance sampling, stratified sampling(区域分割サンプリング), antithetic variates, non-random sequence(非ランダム系列)等がある [Kajiya86, Halton88, Press92, Veach95, Glassner95]。

乱数より一様に分布するとされる n -rooks や Poisson disk 等の非ランダム点列を用いて MC 法の誤差を低減する手法は、コンピュータグラフィックスでも用いられた [Mitchell91, Shirley91, Glassner95]が、これらより良い非ランダム点列を目指して作られた点列が low discrepancy sequences (LDSs)である。さらに、LDS を評価点の生成に使うのが quasi-Monte Carlo (QMC, 準モンテカルロ)法である。

コンピュータグラフィックスにおいては、[Heinrich94a, Shirley91]が LDS を画面ピクセルのスーパーサンプリングに、また詳細は不明だが [Heinrich94b]は QMC 法を大域照明問題に適用した。[Keller95]は radiosity(ラジオシティ)法のパッチの間で QMC 光線追跡を用いて放射エナジーをやり取りし大域照明問題を解いたが、これは恐らく [Heinrich94b]と同一のアルゴリズムであろう。

本論文では大域照明問題の光線追跡法の枠組みで解く際に QMC 法を適用し、その効果を実験的に示す。さらに、適応的に光源をサンプルする error-bounded luminaire sampling (誤差限界光源サンプリング, EBLs) 法を提案する。実験により、EBLS 法は光線追跡法により生成される画像の質を改善することを示す。

2. 準モンテカルロ法

QMC 法の式は形式的には MC 法のそれと同じであるが、QMC 法の被積分関数を評価する点集合は deterministic に生成される。MC 法と異なり、QMC 法は決定的な error bound (誤差限界)を持ち、その誤差は一般に MC 法のそれと比べて小さい。

QMC 法に用いられる LDS は、その点集合が低い discrepancy を持つように設計されている(LDS の詳細は [Niederreiter92, Morokoff94, Tezuka95]等を参照。) Discrepancy とは有限個の点の分布の均一度を表す尺度で、大まかに、単位(多次元)立方体の体積を、その部分集合に含まれる点の割合から推定した値と、実際の体積との差である。Discrepancy が小さいほど点が均一に分布している。部分集合(例えば四角形か三角形か)やノルムの定義により種々の discrepancy が定義できるが、その内の一つを用いると、LDS の discrepancy は大きな N において最小値 $O((\log N)^d N^{-1})$ を取る。LDS の discrepancy と QMC 法の誤差限界は関係しており、 $O((\log N)^d N^{-1})$ となる。この誤差限界から、QMC 法の MC 法より高速な収束が期待される。

LDS には Halton, Sobol', Faure など幾つかある [Niederreiter92, Morokoff94, Tezuka95]。本論文では LDS 生成法として Sobol' と Halton 点列を用いるが、インクリメンタルに点を追加できる他の LDS, 例えば Faure, あるいは一般化 Niederreiter 点列クラスの中の適当な点列 [Tezuka94]でも良い。

図 1.(a) pseudo random sequence(疑似乱数列, PRS), (b) stratified-PRS (SPRS, 区域分割疑似乱数列), (c) Sobol', 及び(d) Halton の4つの方法で生成した点列の最初の16個点の 2D プロットである。一見して PRS の偏りが大きく、SPRS, Sobol', Halton の偏りが小さい。

ここで、PRS で 2D の点を生成するには 標準 C ライブラリの rand() に比べ性質の良い drand48() のペアを用いた。SPRS では 2次元の定義域を 4×4 の小区域に分け、各小区域中の点を drand48() ペアで生成した。Sobol' [Press92]に基づき、また Halton 点列の生成法は [Niederreiter92]等にある。LDS の生成は PRS より特に遅いわけではない。2次元の点1つの生成に Sobol' が 1 μ s, PRS (drand48()を2回)が 2.5 μ s, Halton が 20 μ s かかった。(100 MHz PowerPC 604, xlc コンパイラ"-O"オプション, AIX 4.1.4)。この例では Halton は遅かったが、実現により

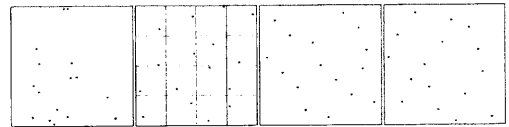


図1. 左より PRS, SPRS (4x4 分割), Sobol', 及び Halton の4つの点列の最初の16点を2次元プロットした。

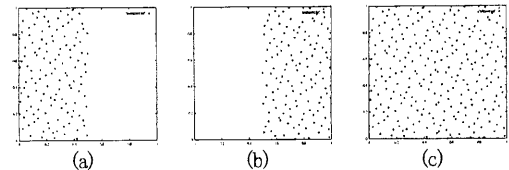


図2. 2次元 Sobol'点列を(a)偶数番と(b)奇数番の点はそれぞれ半分しか埋めない。(c)両方で全体を埋める。

速度は変わるだろう。

勿論、QMC 法も万能ではなく、特に LDS の周期性には注意が必要である。例えば[Press92]のプログラムで Sobol' 点列を生成した時、その第一次元の値は、値域である区間[0,1]の上半分と下半分を交互に取る(図 2. 参照)。これを考慮せずに不用意に LDS を光線追跡法に使うと、生成した画像に顕かな artifact が現れる。また、高次元の LDS は長い周期性を持つ場合が多く[Morokoff94]、副次反射を考慮した大域照明問題を LDS を用いて解こうとした場合に特に問題となる。

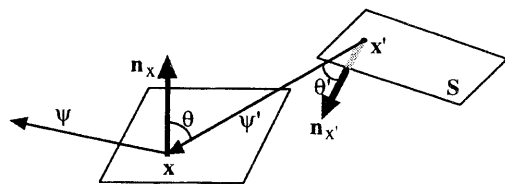


図3. 点xが面光源 S により照明される。

3. 大域照明問題

大域照明問題([Cohen93, Glassner95]等を参照)を記述する *rendering equation* (レンダリング方程式)[Kajiya86]は複雑かつ高次元の積分の例であるが、これを解く為に、MC 法がラジオシティ法および光線追跡法の両方の枠組みで用いられてきた[Cook84, Kajiya86, Mitchell91, Chen91, Schlick91, Shirley92, Veach95, Shirley96]。本論文では光線追跡法の枠組みで QMC 法を適用する。

我々が求めたいのは点 x における方向 ψ への outgoing (出射) radiance (ラジアン) L である(図 3. を参照)。 L は *bi-directional reflectance distribution function* (BRDF) f_r で反射された光源 S 上の点 x' からの incoming (入射) ラジアン L_e と、点 x からの輻射 L_e の和である。 V は *geometry term* (幾何項)で、もし x' が x より直接見える場合には 1、それ以外では 0 の値をとる。 θ (又は θ') は ψ (又は ψ') が面の *normal* (ノーマル) n_x (又は $n_{x'}$) と成す角である。間接的な光の伝搬(副次輻射)を考慮するなら、点 x を含む面を新たに光源と考えて以下の式を再帰的に適用する。

$$L(x, \psi) = L_e(x, \psi) + \int_{x' \in S} f_r(x, \psi, \psi') V(x, x') L_e(x', \psi') \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\|x - x'\|^2} dA' \quad (2)$$

光源 S 上全ての点の $L_e(x, \psi')$ が一定で、点 x から輻射が無いと仮定すると式(2)は次のようになる。

$$L(x, \psi) = \frac{L_e}{\pi} \int_{x' \in S} f_r(x, \psi, \psi') V(x, x') L_e(x', \psi') \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\|x - x'\|^2} dA' \quad (3)$$

断っておくが、この単純化は本論文の説明を容易にする為で、QMC 法の大域照明問題への適用には本質的ではない。

上記の式3を QMC 光線追跡法で解くには、面光源 S を N 個の点光源 x' の集合で近似する。MC または QMC 法ではこれら点光源の位置を PRS 又は LDS で決める。すると、ラジアン L は以下のように近似できる。

$$L(x, \psi) = \frac{L_e}{\pi} \sum_{i=1}^N f_r(x, \psi, \psi') V(x, x'_i) L_e(x'_i, \psi') \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\|x - x'_i\|^2} dA' \quad (4)$$

MC 法では、サンプル点 x'_i は、区間[0,1]の真の乱数 χ_1 及び χ_2 で生成する。勿論、現実には真の乱数は手に入らないから、プログラムでは PRS を用いる。これに対し、本論文で述べる QMC 光線追跡法では PRS の代わりに LDS によりこれらの点を生成する。

3.1 準モンテカルロ法による直接光源のサンプリング

我々は直接光源サンプリングを題材に、MC 法と QMC 法を含む四つの方法を比較した。我々は式 (4)を、*distribution ray-tracing* (分散光線追跡) アルゴリズムを用いて光源からの光の一回の反射について解いた。(つまり「直接光源」による照明の問題を解いた。)前述のように、もし副次輻射も含めた解が必要ならば、この解法を再帰的に適用すれば良い。BRDF は、鏡面反射、Phong の *specular* (スペキュラ) 反射、及び *complete diffuse* (完全拡散) の3つの項の和で近似した。正方形の面光源上のサンプル点は $x' = (k\xi_1 e_1, k\xi_2 e_2)$ を使って生成した。ここで e_i はこの正方形を張る正規直交ベクトルで、 k は正方形の辺の長さである。SMC 法はこの手続きを区域の個数だけ繰り返した。

図 5. の4つの画像は、図 4 のシーンを (a) PRS, (b) SPRS, (c) Sobol', (d) Halton の4つの点列を使ってレンダリングし、その半影の部分をクリックが見える程度に大きく拡大した。シーンは地面、球、及び正方形光源を各1つずつ含んでいた。これらの画像は、視点からピクセル毎に光線を1本投げ(つまり super sampling 無し)計算した。各光線は物体の面に交差する点 x まで追跡し、そこから光源上の16個の点に向けて light ray (光源光線) を投じて光源をサンプルした。16個のサンプル点は図 1の実験と同じ4種の方法で生成した。

印刷では画質の差が良く分からないのが残念だが、生成された画像の質は Halton 点列を用いた QMC が最も良く、Sobol' 点列を用いた画像がほぼそれに並んだ。この二つは画質の区別が難しい。次いで画質が良いのが SMC で、見かけ上最も画質が低いのが MC である。MC で生成した画像では、輝度値の偏差が大きいため、画像が「ざらついて」いる。

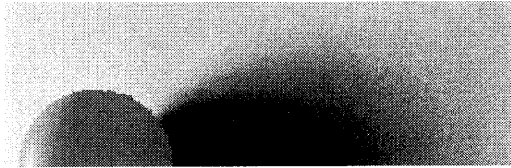


図4. 下の図 5. の比較に使った、面光源に照射された球と球の落とす影の画像(上下対称な画像の上半分.)

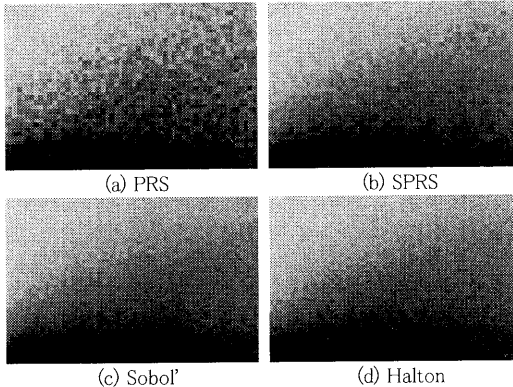


図5. 上記図 4. のシーンを PRS, SPRS, Sobol', 及び Halton の 4 手法でレンダリングし, その一部を拡大.

図 6. は図 4. のシーンの床上の点 x における輝度のサンプル数に対する収束の様子を, PRS, Sobol' 及び Halton についてプロットした. (SMC は比較に含まれていないが, これは, SMC では徐々にサンプル数を増やすことが出来ない為.) 収束は Halton が最も速く, Sobol' がそれに続き, PRS は最も遅い. この図で見ると, 収束値の正しさも Halton, Sobol', PRS の順である. この結果は, 画像の質を主観的に評価した結果と一致した. 我々は光源の形状を変えたり LDS の初期化パラメタを変えたりしてこの実験を繰り返したが, その結果, 場合によっては Sobol' が Halton より速い収束を示す場合もあったが, PRS は常に最も収束が遅かった.

図 7. は, 図 4. のシーンで, 「理想画像」と比較した時の画像全体での誤差のサンプル数による変化を, PRS, SPRS, Sobol', 及び Halton の 4 手法で比較した. 図 7. の誤差値は計算した中で最悪だった, PRS, 4 サンプルの誤差値を 1.0 として正規化してある. ここで「理想画像」とはほぼ計算が収束したであろう画像で, PRS を用いて非常に多い(各交点ごとに 10^4 個)光源光線を投げて計算した. 画面全体での平方二乗誤差 $E_{rms}(x, y)$ は, 大きさ $pq = M$ ピクセルの画像 x と画像 y の間で以下の式で計算した.

$$E_{rms}(x_{p,q}, y_{p,q}) = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q d^2(x_{i,j}, y_{i,j})}{pq} \quad (5)$$

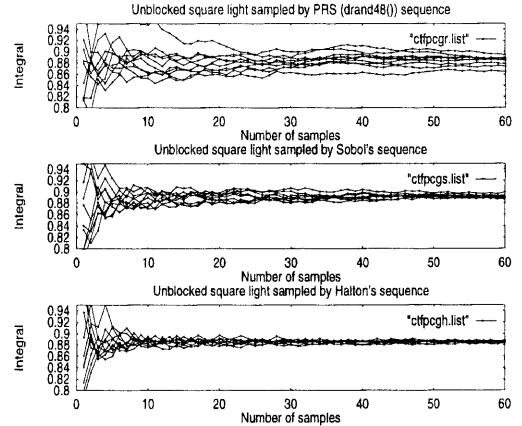


図6. MC及び2種のQMC法(Sobol'及びHalton点列)の収束の様子.

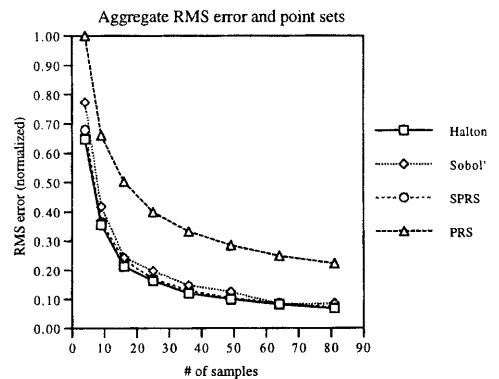


図7. 正方面光源によって遮蔽物無しで照らされたシーンの画像をMC及びQMC法で計算し, 画像全体のRMS誤差をサンプル数に対してプロットした.

ピクセルごとの輝度差 $d^2(x_{i,j}, y_{i,j})$ は以下を用いた.

$$d^2(x_{i,j}, y_{i,j}) = \sqrt{(x_{i,j} - y_{i,j})^2} \quad (6)$$

図 7. を見ると, PRS の収束が飛びぬけて悪い. 例えば 81 サンプルでは, PRS の誤差は最も良い Halton のそれに比べて 3 倍近い. SPRS, Halton と Sobol' の誤差は互いに近いが, この例では SPRS の収束が多少悪い. 理論的な error bound (誤差限界) は SMC 法と QMC 法で漸近的にほぼ同等である. もしも区域分割が適当に行われれば(例えば, 多くの区域に分ける), SMC 光線追跡法の画像の質も向上するはずである. しかし, 前述のように, SMC 法では, 徐々にサンプルを増やすのは困難である. これに対し QMC 法ならば, 1 サンプル単位でも追加でき, 次に述べる, 適応的に光源光線の数を変えるアルゴリズムに向く.

3.2 適応的誤差限定光源サンプリング法

QMC 光線追跡法は収束が速く正確で、またサンプル点をインクリメンタルに追加する事が出来るが、これらの特長を用いると、各点 x 毎に光源光線の数を徐々に増やし、ある停止条件が満たされた段階で光源のサンプルを止める手法 EBLs が実用的となる。EBLS の停止判定は各光源光線毎に行われるので、判定 1 回の手間を小さく抑える必要がある。停止条件には輝度の平均を用いた。輝度の平均は、いずれにしても計算する輝度の積分値の最新の近似値なので、オーバーヘッドは輝度の平均と誤差限界の比較のみである。その他、輝度の分散の推定値 $V(L) < \epsilon$ で停止する等の方法もある。

具体的には、ある点 x で、これまで $(n-t)$ 個のサンプルから求めた輝度ベクタ $L_{n-t} = L(r_{n-t}, g_{n-t}, b_{n-t})$ を、最新の反復で n 個のサンプルから計算した輝度ベクタ $L_{n-t} = L(r, g, b)$ と比べる。全ての輝度要素 r, g, b で $|r_n - r_{n-t}| < \epsilon, |g_n - g_{n-t}| < \epsilon, \text{および} |b_n - b_{n-t}| < \epsilon$ が成り立てば収束したと考慮して反復を停止する。毎回誤差限界との比較を行うのではなく、 t 回に 1 回とする事で、誤った収束判定の可能性を減らせるし、大小比較に要するオーバーヘッドの割合も減る。

これまでの行われていた固定数サンプル(FS)法では、サンプルの回数を、画像全体に対しあらかじめ指定した。しかし、同一画像内でも輝度を計算したい点によって最適のサンプル数は大きく異なる。従って、例えば、FS 法を用いて図 8 を計算すると、影の無い床部分ではサンプルが過剰になり、逆に半影の部分でサンプル数が不足する。これに対し、EBLS 法では、各点毎に誤差判定を行い、光源光線数が自動的にかつ適応的に決まる。従って、各点毎に定まる必要十分のサンプル数で、求めたい精度の画像を計算できる。EBLS 法は PRS を用いた MC 光線追跡法にも使えるが、QMC 法と組み合わせた時により効果大きい。これは、前述のように QMC 光線追跡法の収束が速く、かつ MC 光線追跡法より正確な値に収束する為である。

図 9 は FS と EBLs 法を比較した画像である。シーンは、画像にある 4 つの物体と床、及び正方形の面光源を含んでいた。比較した 4 方法は、以下の通り; 図 9(a) MC 法かつ FS, (b) MC 法かつ EBLs, (c) QMC(Sobol') 法かつ FS, 及び (d) QMC(Sobol') 法かつ EBLs。EBLS の場合 $t=5$ および $\epsilon=0.004$ とした。FS の場合、各点において、前もって決めた回数 m だけ光源をサンプルする。比較の為に、我々はまず (d) 法を用いて画像を生成し、この場合に要したのより多くかつ出来るだけ近い光線の数を (c) 法において用いた。次いで同じ EBLs 停止判定条件を (b) 法に使い、この時に要したのより多くかつ出来るだけ近い光線の数を (a) 法に用いた。図の画像を生成するのに実際に要した光線の総数は以下のようになった; (a) MC 光線追跡法で FS を用いた場合: 12.8×10^6 光線, (b) MC 光線追跡法で EBLs を用いた場合: 12.0×10^6 光

線, (c) QMC 光線追跡法で FS を用いた場合: 11.1×10^6 光線, (d) QMC 光線追跡法で EBLs を用いた場合: 10.9×10^6 光線。実行時間は計算に要した光線の数にほぼ比例した。

MC 法、QMC 法の双方で、EBLS は明確に画像の質を向上した。違いは半影の部分で特に明らかとなる。(a) 法 (MC, FS) で顕著に見られる半影中の暗点は、光源光線のほとんど全てが「不幸にも」光を遮る物体に当たった結

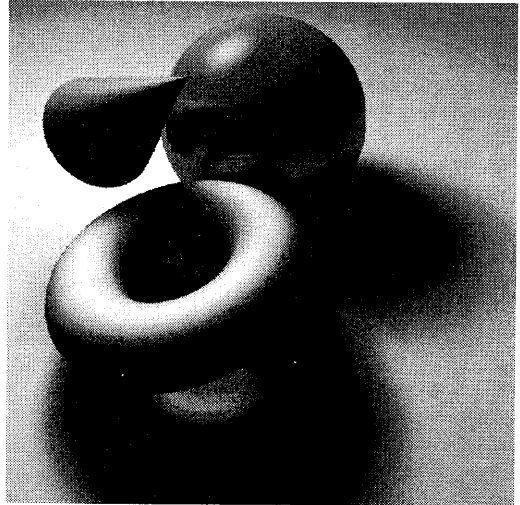


図8. 誤差限界光源サンプリングのテストシーン。この画像の一部を各手法ごとに拡大したのが次の図 9。

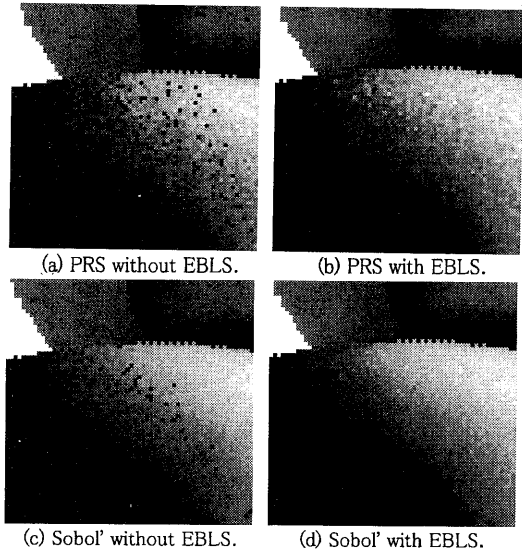


図9. PRS および Sobol' を使用した場合の誤差限界光源サンプリング (EBLS) の効果。

果生じる。この暗点は EBLs を用いた場合 (b) 法 (MC,EBLS) と (d) 法 (QMC,EBLS) の方が, FS を用いた対応する場合 (各々 (a) 法 (MC,FS) と (c) 法 (QMC,FS)) に比べて減った。これは EBLs が適応的に分散の大きな (収束の遅い) 点 (この場合は半影) にサンプルを集中するからである。4 つの方法で比較すると, QMC と EBLs を組み合わせ (d) 法 (QMC,EBLS) が最も質の高い画像を, 最も高速に, 生成した。

4.まとめ

本論文はまず, low discrepancy sequences を用いた quasi-Monte Carlo (QMC) 法を大域照明問題の光線追跡法の枠組みでの解に適用した。実験の結果, 疑似乱数を用いた Monte Carlo (MC) 法に比べて QMC 法は光線追跡による直接照明問題の解法を加速することが確かめられた。また, QMC 法の収束は stratified Monte Carlo 法に匹敵することも実験的に示された。次に, 本論文では光源光線の数を誤差の推定値に基づいて適応的に変える error-bounded luminaire sampling (EBLS) 法を提案し, 実験により, EBLs 法を QMC 法と組み合わせると特に効果を発揮し, 高品質の画像を高速に生成する手法として有効であることを示した。将来的には QMC 法を光線追跡法の複数反射, またラジオシティ枠組みにも適用したい。

参考文献

- [Chen91] S. E. Chen, H. E. Rushmeier, G. Miller, and D. Turner, A Progressive Multi-pass Method for Global Illumination, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '91)*, **25**, 165-173 (1991)
- [Cohen93] M. F. Cohen and J. R. Wallace, *Radiosity and Realistic Image Synthesis*, Academic Press, 381 pages (1993)
- [Cook84] R. Cook, T. Porter, and L. Carpenter, Distributed Ray Tracing, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '84)*, **18**, 137-146 (1984)
- [Foley90] J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes, *Computer Graphics Principles and Practice*, Second Edition, Addison Wesley (1990)
- [Glassner95] A. S. Glassner, *Principles of Digital Image Synthesis*, Volumes 1 and 2, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, USA (1995)
- [Halton70] J. H. Halton, A Retrospective and Prospective Survey of Monte Carlo Method, *SIAM Review*, **12**, 1-63 (1970)
- [Halton88] J. H. Halton, On the Efficiency of Generalized Antithetic Transformations for Monte Carlo Integration, *Nuclear Science and Engineering*, **98** 299-316 (1988).
- [Heinrich94a] S. Heinrich and A. Keller, Quasi-Monte Carlo Methods in Computer Graphics Part I: The QMC-Buffer, *Technical Report*, 242/94, University of Kaiserslautern, Germany (1994).
- [Heinrich94b] S. Heinrich and A. Keller, Quasi-Monte Carlo Methods in Computer Graphics Part II: The Radiance Equation, *Technical Report*, 243/94, University of Kaiserslautern, Germany (1994).
- [Kajiya86] J. Kajiya, The Rendering Equation, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '86)*, **18**, 143-150 (1986)
- [Kalos86] M. H. Kalos and P. A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*, Volume I, John Wiley and Sons (1986)
- [Keller95] A. Keller, A Quasi-Monte Carlo Algorithm for the Global Illumination Problem in the Radiosity Setting, *Proc. of the Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, Las Vegas, NV, USA*, (Lecture Notes in Statistics 106) Springer-Verlag, 239-251 (June 1995)
- [Mitchell91] D. P. Mitchell, Spectrally Optimal Sampling for Distribution Ray Tracing, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '91)*, **25**, 157-164 (1991)
- [Morokoff94] W. J. Morokoff and R. E. Cafisch, Quasi-Random Sequences and Their Discrepancies *SIAM J. Sci. Comput.* **15:6**, 1251-1279 (Nov. 1994)
- [Niederreiter92] H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, *CBMS-NSF 63 SIAM*, Philadelphia, PA. (1992)
- [Press92] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Second edition, Cambridge Univ. Press (1992)
- [Schlick91] C. Schlick, An Adaptive Sampling Techniques for Multidimensional Integration by Ray-Tracing, *Proc. 2nd Eurographics Workshop on Rendering*, 21-29, Barcelona, Spain (1991).
- [Shirley91] P. Shirley, Discrepancy as a Quality Measure for Sample Distributions, *Proc. EUROGRAPHICS '91*, F. H. Post and W. Barth Eds., 183-195 (1991)
- [Shirley92] P. Shirley and C. Wang, Luminaire Sampling in Distribution Ray Tracing, *Technical Report #343*, Indiana University Computer Science (1992)
- [Shirley96] P. Shirley, C. Wang, and K. Zimmerman, Monte Carlo Techniques for Direct Lighting Calculations, *ACM TOGS* **15:1**, 1-36 (1996)
- [Tezuka94] S. Tezuka, Generalization of Faure Sequences and Its Efficient Implementation, *Technical Report RT0105*, IBM Tokyo Research Laboratory (1994)
- [Veach95] E. Veach and L. J. Guibas, Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '95)*, 419-428 (1995)