

テンソル積曲面の縮退法線ベクトル

山口 泰

東京大学大学院総合文化研究科広域システム科学系

〒153 東京都目黒区駒場 3-8-1

Email: yama@graco.c.u-tokyo.ac.jp

曲面において法線ベクトルは重要な性質であり、オフセット曲面の算出や曲面間交線計算、陰影表示など、様々な応用に欠かすことができない。テンソル積曲面の法線ベクトルは、通常、偏微分値として求められる2方向の接ベクトルの外積によって計算される。しかし、ある条件下においては、この計算結果が零ベクトルとなり、法線ベクトルが縮退することがある。このような縮退法線ベクトルは、時として応用プログラムを異常終了に導きかねない。本研究は、縮退法線ベクトルによるプログラムの異常終了を防ぐことを目的とし、縮退法線ベクトルの探索法と計算法を提案する。縮退法線ベクトルの探索法は、与えられた曲面データ内に縮退法線ベクトルが存在するか否かを判定する。また、縮退法線ベクトルの計算法によって、仮に法線ベクトルが縮退する場合でも法線ベクトルが計算できる。

Computation Methods for Degenerate Normal Vectors of Tensor Product Surfaces

Yasushi YAMAGUCHI

University of Tokyo, Division of International and Interdisciplinary Studies

3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan

Email: yama@graco.c.u-tokyo.ac.jp

A normal vector is one of the most important properties of a surface, and is necessary for a lot of applications such as offset surface generation, surface-surface intersection, surface rendering, and so on. A normal vector of a tensor product surface is usually calculated as a cross product of partial derivatives of two parameters. However, a normal vector can degenerate such that the cross product results in a zero vector. The application programs might collapse when a degenerate normal vector occurs. This study is aimed at avoiding this kind of errors caused by degenerate normal vectors. Both the degenerate normal vector detection and the degenerate normal vector computation are proposed in this paper. The degenerate normal vector detection can find every degenerate normal vector from given tensor product polynomial surfaces. The degenerate normal vector computation is able to calculate a normal vector at a point on a surface where the normal vector degenerates.

1 はじめに

曲面データの利用にあたって、法線ベクトルは非常に大きな意味を持っている。陰影画表示のための輝度計算、曲面間の交線計算、オフセット曲面の算出など、殆んどすべての応用において法線ベクトルが必要となる。一方、CADを始めとする形状モデリングの応用においては、ベジエ曲面やB-スプライン曲面などのテンソル積形式の曲面が主に利用されている。このテンソル積曲面 $S(u, v)$ 上の法線ベクトル $N(u, v)$ は、通常、外積を用いて次のように計算される。

$$N(u, v) = S_u(u, v) \times S_v(u, v) \quad (1)$$

ここで、 $S_u(u, v)$ と $S_v(u, v)$ は、曲面 $S(u, v)$ の u と v の1階導関数で、 u, v 方向の接ベクトルである。

(1) 式によって計算される法線ベクトルが零ベクトルとなるものを縮退法線ベクトルと呼ぶ。法線ベクトルは、一般に正規化して単位ベクトルの形式で用いられるため、縮退法線ベクトルは場合によって異常終了にもつながりかねない。そのような異常終了を避けるためには、以下の2点が実現される必要がある。

- 与えられた曲面情報に縮退法線ベクトルが存在しないことを保証する。
- 法線ベクトルが縮退する場合であっても、他の方法で法線ベクトルを計算する。

縮退法線ベクトルが生じるのは、どのような場合であろうか。(1) 式より、縮退法線ベクトルは以下のいずれかの場合に生じることが明らかである。

1. 零接ベクトル。

$$S_u(u, v) = 0 \quad \text{かつ/または} \quad S_v(u, v) = 0$$

2. 平行接ベクトル。

$$S_u(u, v) = \lambda S_v(u, v) \quad \text{ただし} \quad \lambda \neq 0$$

Farin は、これら場合を図1の例を用いて説明している [2]。上の縮退三角形パッチでは、四辺形境界の1辺が1点に縮退しており、その辺上の接ベクトルは大きさが零となる。したがって、この辺上ではの零接ベクトルによって、法線ベクトルが縮退する。下の図に示した角の丸いパッチでは、四隅の制御点とそれらに隣接する2つの制御点、たとえば図の P_{20}, P_{30}, P_{31} の3点、が共線にある。この結果、四隅では平行接ベク

トルによって、法線ベクトルが縮退する。これらの曲面は、三角形のパッチを作るために、実用的にもしばしば用いられる。

Kim らは、平行接ベクトルによる縮退法線ベクトルがパッチの内部にも現れることを示した [4]。さらに Aumann らは零接ベクトルによる縮退法線ベクトルがパッチ内部に生じうることを示した [1]。このように縮退法線ベクトルは、曲面パッチの様々な箇所が存在しうることが知られているが、すべての縮退法線ベクトルを統一的に見つける方法は示されていない [1]。また縮退した法線ベクトルの計算法については、幾つかの特別な場合については知られているが [3, 2]、一般的な計算法は示されていない。そこで本研究では、多項式テンソル積曲面における縮退法線ベクトルの探索法と縮退した法線ベクトルの算出法の2点を解決することを目的とする。

2 ベジエ法線ベクトル曲面

まず始めに探索法の基礎をなすベジエ法線ベクトル曲面について説明する。(1) 式で与えられる非正規化法線ベクトル $N(u, v)$ がベクトル空間に張る曲面を法線ベクトル曲面と呼ぶ。次式は $n \times m$ 次のテンソル積ベジエ曲面 $S(u, v)$ の

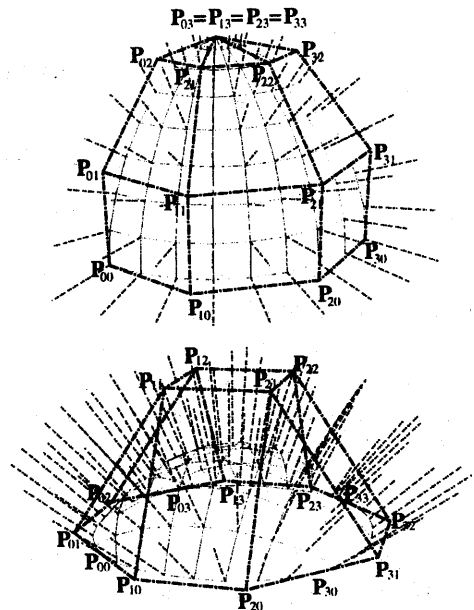


図1: 縮退法線ベクトルの例。

定義式である。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{ij}$$

ここで P_{ij} は $(n+1) \times (m+1)$ 個からなる制御点、 $B_i^n(u)$ はバーンスタイン多項式である。この曲面の法線ベクトル曲面 $N(u, v)$ は $(2n-1) \times (2m-1)$ 次のテンソル積ベジエ曲面として表現できる。

$$N(u, v) = \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2m-1} B_i^{2n-1}(u) B_j^{2m-1}(v) N_{ij} \quad (2)$$

N_{ij} は法線ベクトル曲面の制御点であり、次式によって与えられる [5]。

$$N_{ij} = \frac{nm}{\binom{2n-1}{i} \binom{2m-1}{j}} \sum_{\substack{K+M=i \\ 0 \leq K \leq n-1 \\ 0 \leq M \leq n}} \sum_{\substack{L+N=j \\ 0 \leq L \leq m-1 \\ 0 \leq N \leq m-1}} \{ \binom{n-1}{K} \binom{n}{M} \binom{m}{L} \binom{m-1}{N} \mathbf{Q}_{KL} \times \mathbf{R}_{MN} \} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \mathbf{Q}_{KL} &= \mathbf{P}_{(K+1)L} - \mathbf{P}_{KL}, \\ \mathbf{R}_{MN} &= \mathbf{P}_M \mathbf{P}_{(N+1)} - \mathbf{P}_{MN} \end{aligned}$$

これはベジエ形式で表現された法線ベクトル曲面であり、凸包性を有するとともに、ドカステリョアルゴリズムによって細分割が可能である。

図2は、図1に示したベジエ曲面の法線ベクトル曲面である。上は縮退三角形パッチの法線ベクトル曲面であるが、極部分で法線ベクトルが縮退していることが見てとれる。すなわち、法線ベクトルの傾きが xy 平面から離れて z 軸に近づくと、ベクトルが急速に小さくなり、法線ベクトル曲面は原点に達している。下の図は角の丸いベジエパッチの法線ベクトル曲面である。この面では四隅で法線ベクトルが縮退するが、法線ベクトル曲面は4ヶ所で原点に達している。

3 縮退法線ベクトルの探索アルゴリズム

図2の例からもわかるように、曲面の法線ベクトルが縮退する際、ベジエ法線ベクトル曲面は原点を通る。したがって、曲面上の縮退法線ベクトルを見つける作業は、ベジエ法線ベクトル曲面が原点を通る場所を探すことに他ならない。ベジエ法線ベクトル曲面の制御点は(3)式より算出可能であるから、ベジエ法線ベクトル曲面の凸包性と細分割可能性を利用し、分割統治法によって縮退法線ベクトルを探索できる。つまり、ベジエ法線ベクトル曲面の制御点を計算し、その制御点の構成する凸包内部に原点が含まれる

場合は曲面を再帰的に分割する。仮に原点が凸包の外部であれば曲面が原点を通過することはない。本研究では凸包の代わりにミニマックスボックスを用いた。以下に縮退法線ベクトルの探索アルゴリズムを示す。

縮退法線ベクトル探索アルゴリズム

与えられた曲面の制御点群 $\{P_{ij}\}$ から法線ベクトル曲面の制御点群 $\{N_{ij}\}$ を計算する。
while 制御点群 $\{N_{ij}\}$ の MinMax ボックスが原点を含む。

if 細分割のレベルが十分に細かい。 then
現在の部分パッチを返す。

else

曲面を細分割し、各部分パッチの制御点群 $\{N_{ij}\}$ を計算する。

otherwise { 縮退法線ベクトルは存在しない。 }

縮退法線ベクトルの探索に伴って曲面が細分割された過程を図3に示す。左図は縮退三角形パッチの場合である。この縮退三角形では $v = 1.0$ の境界が1点に縮退することで法線ベクトルも縮退していた。探索結果において $v = 1.0$ の部分が非常に細かく分割されており、当該箇所には縮退法線ベクトルのあることがわかる。右図は角の丸いパッチの場合である。このパッチでは四隅において接ベクトルが平行となり、法線ベクトルが縮退していた。探索結果を見ると、パッチ四隅が非常に細かく分割されており、4つの縮退法線ベクトルが求められている。

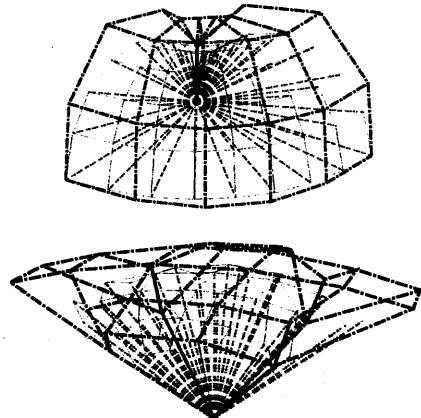


図2: ベジエ法線ベクトル曲面。

4 縮退法線ベクトルの計算

(1)式が零となり法線ベクトルが縮退しても、法線ベクトルが定義される場合がある。すなわち、縮退法線ベクトルが生じる近傍において法線ベクトルを計算し、縮退する点における極限を取ったときに、すべての法線ベクトルの向きが一定の方向に収束するならば、その方向をもって法線ベクトルの方向と定義できる。

図1の例は、いずれも法線ベクトルを定義できる。しかし、この2つの例は全く異なった意味を持っている。図1の下の曲面は法線ベクトルのみが縮退しているのに対して、上の曲面では曲面自体も縮退している。言い方を変え、上の曲面において法線ベクトルが縮退している場所は、実空間内では1点に過ぎないが、パラメタ空間内ではパッチの1辺に相当している。したがって、法線ベクトルを算出するために極限を取ると言っても、下の曲面の場合にはパラメタ空間での局所的な極限を取れば十分であるが、上のように曲面も縮退する場合には実空間で縮退して1点となる全領域に渡って、法線ベクトルが一致しているか否かの大域的整合性判定が必要となる。

3節で示した縮退法線ベクトル探索アルゴリズムによって、パラメタ空間内で孤立した点が求められた場合には、曲面が縮退している可能性はないので、局所的に法線ベクトルを計算でき

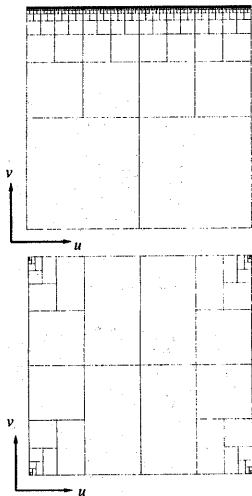


図3: 縮退法線ベクトル探索の実行例。

る。しかし、縮退法線ベクトルが連続した領域で発生している場合には、曲面自体が縮退している可能性があるため、まず曲面の縮退の有無を調べ、曲面が縮退しているならば大域的な整合性を判定しなくてはならない。

既に述べたように、縮退法線ベクトルの局所的算出法とは、法線ベクトルの縮退するパラメタ空間内の点において、法線ベクトルの極限をとる操作である。この極限が経路によらずに一定であれば、局所的な法線ベクトルを定義できる。

法線ベクトル N を2次の項までテイラー展開すると、以下の式が得られる。

$$N(du, dv) \simeq N + N_u du + N_v dv + \frac{1}{2} (N_{uu} du^2 + 2N_{uv} dudv + N_{vv} dv^2) \quad (4)$$

もとの曲面式が4次以下であるならば、この式によって法線ベクトルを厳密に表現できる。縮退法線ベクトルの定義より、当該の点においては、第1項の N は零である。したがって $N(du, dv)$ は、 $N_u, N_v, N_{uu}, N_{uv}, N_{vv}$ などの偏微分値によって定められる。これらの偏微分値は、ベジエ法線ベクトル曲面の定義式(2)から計算することもできるし、以下のようにもとの曲面の偏微分値から計算することも可能である。

$$N_u = S_{uu} \times S_v + S_u \times S_{uv}$$

$$N_v = S_{uv} \times S_v + S_u \times S_{vv}$$

$$N_{uu} = S_{uuu} \times S_v + 2(S_{uu} \times S_{uv}) + S_u \times S_{uuv}$$

$$N_{uv} = S_{uuv} \times S_v + S_{uu} \times S_{vv} + S_{uv} \times S_{uv} + S_u \times S_{uvv}$$

$$N_{vv} = S_{uvv} \times S_v + 2(S_{uv} \times S_{vv}) + S_u \times S_{vvv}$$

したがって、以下の議論は、多項式曲面に限定されていた3節とは異なり、有理式曲面などの一般のテンソル積曲面に適用可能である。

(4)式において注意しなくてはならないのは、 du や dv の符号である。仮に N_u あるいは N_v が法線ベクトル N を定めるとしても、 du や dv の符号が変わることによって、ベクトルの向きが反転してしまう。パッチの境界では、曲面の定義域に制限があるために、 du と dv の符号が一定となることがある。図4はパッチ境界における du および dv の符号を示している。この点に配慮すると、以下のようにして、局所的な縮退法線ベクトルが求められる。

局所的縮退法線ベクトル算出法

if N_u と N_v の一方または両方が零でない.
 and 縮退は曲面パッチの境界で起きている.
 and N_u と N_v は線形従属であり,
 曲面の定義域で同じ向きとなる. then
 縮退法線ベクトルは $N_u du + N_v dv$ で定まる.
 但し du, dv の符号は曲面の定義域に対応する.
 else if N_{uv} が零である.
 and N_{uu} と N_{vv} は線形従属であり,
 同じ向きである. then
 縮退法線ベクトルは $N_{uu} + N_{vv}$ で定まる.
 else if 縮退は曲面パッチの角で起きている.
 and N_{uu}, N_{uv}, N_{vv} は線形従属であり
 曲面の定義域で同じ向きとなる. then
 縮退法線ベクトルは $N_{uu} + N_{vv} + N_{uv} dudv$
 で定まる.
 但し du, dv の符号は曲面の定義域に対応する.
 else
 縮退法線ベクトルは一意には定まらないか,
 より高階の偏微分値によって定まる.

以上の手法を用いて局所的縮退法線ベクトルを算出した結果を図5に示す。法線ベクトルが縮退するために、高階の偏微分値を用いて求められた法線ベクトルは太い点線で示されている。

大域的な整合性の判定は、縮退するパラメタ空間内の点を複数抽出し、それぞれの点における局所的法線ベクトルを比較しても良いが、この方法では完全な整合性は保証できない。これに対して、高階の偏微分値を調べることによって、大域的整合性を判定でき、しかもその完全性も保証される。

まず、曲面が縮退する際の方が重要である。つまり、曲面上の連続した点が縮退するのであるから、ある方向に関して接ベクトルが零ベクトルとなるはずである。この方向を縮退方向と呼ぶことにする。曲面 S 上の任意の接ベクトルは、 S_u ないし S_v の線形結合によって表現される。もし、 S_u と S_v が線形独立であれば、いかなる接ベクトルも零ベクトルとはなり得ない。したがって、縮退方向は、 u 方向ないし v 方向に一致することは明らかである。

縮退方向が u 方向とすると、 S_u, S_{uu}, \dots はすべて零となり、結果として N, N_u, N_{uu}, \dots もまたすべて零となる。これは局所的な縮退法線ベ

クトルが N_v, N_{vv}, \dots のいずれかによって定められることを示している。したがって、以下の手続きによって、大域的な整合性を判定できる。

u 方向の大域的整合性判定

if S_u, S_{uu}, \dots が零である.
 (N, N_u, N_{uu}, \dots も零である.) then
 if N_v が局所的法線ベクトルを定める.
 and N_{uv}, N_{uvv}, \dots が N_v に平行である.
 or N_{vv} が局所的法線ベクトルを定める.
 and N_{uvv}, \dots が N_{vv} に平行である.
 法線ベクトルが縮退方向で整合している.
 else
 法線ベクトルが縮退方向で整合しない.
 else
 曲面は u 方向に縮退していない。

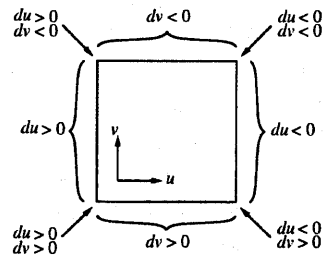


図4: パッチ境界における du と dv の符号。

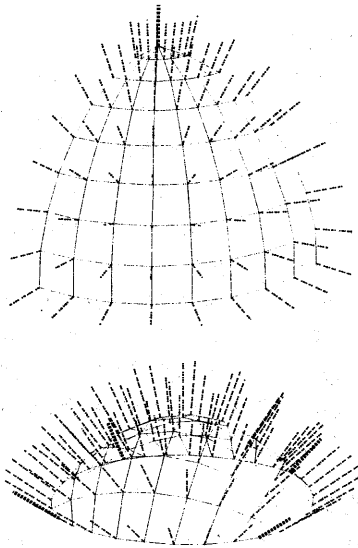


図5: 局所的な縮退法線ベクトルの算出。

ただし、判定のために必要な偏微分値の階数は、もとの曲面の次数に応じて定まる。

大域的に整合しない場合の例を図6に示す。太い点線で示された法線ベクトルが、局所的に求められた縮退法線ベクトルである。実空間では曲面上の同じ位置を占めているが、パラメタ空間内では異なった点に対応し、法線ベクトルも異なっている。これらの不整合は、いずれも本節で示した手法によって検出できた。

大域的に不整合がある場合でも、局所的な縮退法線ベクトルは全く無意味というわけではない。特に曲面の陰影表示の際には、局所的な縮退法線ベクトルが利用できる。曲面上の点の輝度計算にあたっては、法線ベクトルと光源ないし視点への方向ベクトルのなす角度が必要で、通常はベクトル間の内積が計算される。法線ベクトルが定義されない際に、これを零ベクトルとしてしまうと、内積計算が零となり、結果的に輝度もまた零となってしまう。図6の下の曲面を陰影表示したものが図7である。(a)は縮退している点において法線ベクトルが定義されないことから零ベクトルを与えているが、結果として縮退している点の周囲が黒っぽくなっている。これに対して(b)は法線ベクトルとして局所的な縮退法線ベクトルを与えたものであり、自然な結果が得られている。

5 おわりに

本論文では、テンソル積曲面における縮退法線ベクトルについて議論し、以下の結論を得た。

- 縮退法線ベクトルの性質を調べ、その探索法と計算法の重要性を指摘した。
- 多項式テンソル積曲面に関して、ベジエ法線ベクトル曲面を利用した縮退法線ベクトルの探索法を提案した。
- 一般のテンソル積曲面に関して、局所的な縮退法線ベクトルの計算法を示した。
- 一般のテンソル積曲面が縮退する際の、縮退法線ベクトルの大域的な整合性判定法を示した。

参考文献

- [1] Aumann, G., Reif, U. and Spitzmüller, K.: "A counterexample to a corollary of Kim et al.", *CAGD Journal*, Vol. 12, No. 8, pp. 853-

855 (1995).

- [2] Farin, G. E.: "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Academic Press, Third Edition (1993).
- [3] Faux, I. D. and Pratt, M. J.: "Computational Geometry for Design and Manufacture", Ellis Horwood Ltd. (1979).
- [4] Kim, T.-S. and Paralambros, P. Y.: "Detection of degenerate normal vectors on parametric surfaces: Tangent cone approach", *CAGD Journal*, Vol. 12, No. 3, pp. 321-327 (1995).
- [5] 山口 泰: "ベジエ形式曲面の法線ベクトルとその存在域", *情報処理学会論文誌*, 37 卷, 2 号, pp. 242-248, (1996).

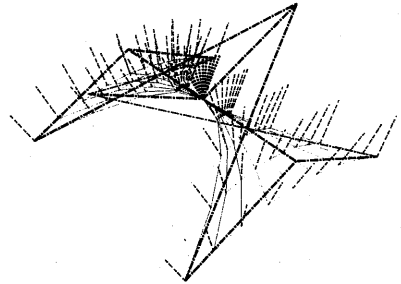


図6: 大域的に非整合な縮退法線ベクトル。



図7: 局所的縮退法線ベクトルによる陰影表示。