

# 多面体表現のための効率的なパッチ生成の一手法

河合 善之<sup>†</sup>, 岡田 稔<sup>††</sup>

<sup>†</sup>名古屋大学大学院工学研究科電子情報学専攻, <sup>††</sup>名古屋大学情報処理教育センター

あらまし 本論文では CSG(Constructive Solid Geometry) で定義された物体表現からポリゴン表現への一変換手法について述べる. CSG において物体をポリゴンに変換する際, 論理演算によって生成される幾何学的に冗長な頂点やエッジの存在が問題となる. この冗長な頂点やエッジを削除し, 複数のポリゴンを一つのポリゴンに統合することによって, ポリゴン数を削減し, レンダリング速度を高速化することを目標とした. この変換手法を, ポリゴンパッチ(サーフェスモデル)をレンダリングする際は勿論, レイ・トレーシングやビーム・トレーシングなど, CSG 表現をポリゴン変換するモデリングに適用すれば, レンダリングの高速化が期待される.

## Effective Patches Generation Method for Expression of Polyhedron

Yoshiyuki KAWAI<sup>†</sup> and Minoru OKADA<sup>††</sup>

<sup>†</sup>Dept. of Information Electronics, Graduate School of Engineering, Nagoya University

<sup>††</sup>Education Center for Information Processing, Nagoya University

**Abstract** In this paper a new method to transform objects defined by CSG (Constructive Solid Geometry) to polygonal patches is proposed. The Extra apexes and edges generated by logical operation will be a significant problem in the transformation. Then we delete these extra apexes and edges, and merge from plural polygons to single polygon. This proposed method enables high speed rendering, and is effective at modeling from CSG to polygons, as polygonal patches(surface model), beam-tracing(has researched at ray-tracing) and so on.

### 1 はじめに

CG(Computer Graphics)において, 現在用いられている代表的なソリッドモデリングの形状記述方式として, CSG(Constructive Solid Geometry), B-reps.(Boundary Representations)などが挙げられる.

CSG 表現は単純な形状(プリミティブ)を集合演算子により結合し, 複雑な物体を生成することができる. これは人間による直観的形狀把握が容易であると言える. 一方, B-reps. はサーフェスモデルを拡張して物体の内部と外部の区別をすることができるようにしたデータ構造である. しかし, B-reps. のデータ構造は複雑であり, 人間がデータを入力するのは非常に困難である.

また, 近年, 数十万ポリゴン/秒の描画が可能なポリゴンエンジンなど, ハードウェアの発達により

ポリゴンの高速描画が可能となってきたが, これらのシステムの多くはポリゴンデータを入力として要求している. このため, CSG か B-reps. 等の表現をポリゴン表現に変換することが必要である [1]. ところが, CSG で定義された物体を, ポリゴンに変換すると, 一般的に幾何学的に冗長な頂点やエッジが数多く生成されてしまう. このため, ポリゴン数が増加し, レンダリングにおける計算量が增大する.

本論文では, CSG 表現からポリゴンパッチ表現に変換する過程で生じる冗長な頂点やエッジを削除する手法を提案する. これにより, ポリゴン数, 計算時間の削減, レンダリングの高速化などが期待される. 本研究では筆者らによって提案されている半空間プリミティブと3値論理演算に基づく CSG[2][3]を用いた.

## 2 冗長な頂点, エッジの削除

### 2.1 冗長な頂点, エッジとは?

まずはじめに, CSG において単純なプリミティブ同士の和演算 ( $A \cup B$ ) によって生成される冗長な頂点, エッジの例を図 1 に示す. 図 1 において  $\circ$  は冗長な頂点の例であり, 太線は冗長なエッジの例である.

図 1 の例は立方体同士の和演算であるが, このような単純な演算をするだけでも 4 つの冗長な頂点と, 4 本の冗長なエッジが生成されてしまう. これら幾何学的に冗長な頂点, エッジは, レンダリングする際, 計算時間を削減する際など不要と言える.

### 2.2 CSG における物体定義

本論文ではプリミティブとして  $n$  個の半空間  $f_i(x, y, z) \leq 0$  を用いた. ここで, 平面方程式  $S_i$  を以下のように定義する.

$$S_i: f_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z - d_i = 0, \quad (0 \leq d_i, 0 \leq i < n) \quad (1)$$

また, プリミティブ同士の論理演算として 3 値論理演算 [2][3] を利用し, CSG データは文献 [2][3] 同様, Lisp などに用いられる S 式を準用して記述されている.

### 2.3 頂点算出方法

物体定義された CSG データの  $n$  平面データから頂点を算出する. 3 つの平面  $S_i, S_j, S_k$  を全ての組合せ ( ${}_n C_3$ ) で選択し, 式 (2) により交点を算出する.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

但し,  $|A| = 0$  の時, 交点無しとする. これにより求めた交点を物体定義で用いた S 式により 3 値論理評価を行なう. 3 値論理評価の結果, 交点は領域の内部 (状態値  $I$ ), 領域の境界部 (状態値  $B$ ), 領域の外側 (状態値  $O$ ) のいずれかに分類される. その評価結果として状態値  $B$  の交点をポリゴンの頂

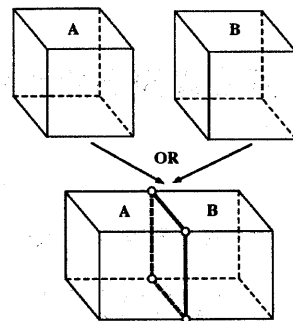


図 1: CSG における和演算によって冗長な頂点, エッジが生成される一例

点候補点とする. ここで, 頂点候補点とは冗長な頂点 (偽の頂点) を含む頂点集合とする.

### 2.4 冗長な頂点, エッジ

CSG において冗長な頂点, エッジが生成される例を図 2 に示す. 図 2 は, 多面体を構成する, ある一ポリゴンを垂直方向から見た図である. なお,  $\circ$ ,  $\bullet$  は共に 3 値論理評価によって状態値  $B$  となった交点である. このため従来の手法 [4] において  $\circ$  はポリゴンを構成するために必要な頂点とみなされてしまう. また, 偽のエッジも同様に, ポリゴンを構成するために必要なエッジとみなされ, 問題となる. 以下に, これら冗長な頂点, エッジを削除する方法を説明する.

### 2.5 冗長な頂点, エッジの削除法

#### 2.5.1 アルゴリズムの流れ

本手法では, 冗長な頂点, エッジの削除を 2step で処理を行なう.

Step1 では幾何学的に冗長な頂点を全て削除する. 図 2 の物体から冗長な頂点を削除した結果を図 3 に示す. 図 3 のように冗長な頂点を削除することによって, 大半の冗長なエッジが削除できる. 何故なら, エッジは点と点を結ぶものであるから, つまり, 偽の頂点と真の頂点, 偽の頂点と偽の頂点を結ぶエッジなどは削除できる. しかし, 真の頂点同士を結ぶ偽のエッジが削除されない.

そこで, Step2 として, 残りの冗長なエッジを削除する. 結果を図 4 に示す.

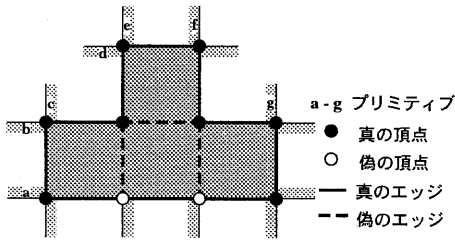


図 2:  $(\text{and} (\text{and} a c d g) (\text{or} b (\text{and} e f)))$  の例

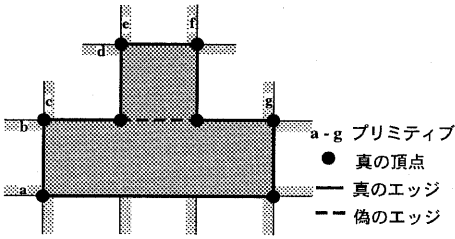


図 3: 図 1 の冗長な頂点を削除した結果

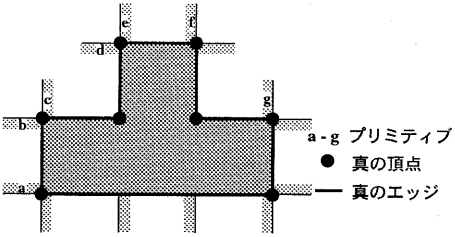


図 4: 図 2 の冗長なエッジを削除した結果

これら 2 つの step により、幾何学的に正しいポリゴンが生成できる。以下に、各 Step の手順を記述する。

### 2.5.2 Step1: 冗長な頂点削除

はじめに冗長な頂点を全て削除する。3平面によって生成される頂点候補点パターンの全てを図 5 に示す。図 5 は、ある平面上の頂点候補点を垂直方向から見た図である。頂点候補点パターンは図 5 のように 8 パターンしか存在しないことを実際に全数数え上げによって確認した。この 8 パターンの内、幾何学的に冗長である頂点パターンは図 5.(a)(d)(g)(h) であり、以下の 3 パターンに分類できる。

- 頂点の周りの全ての領域に物体表面（状態値

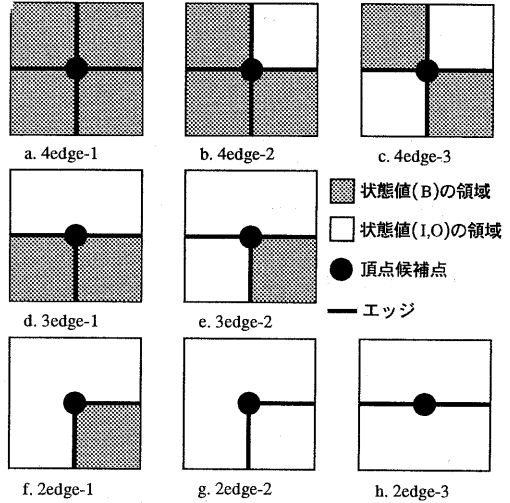


図 5: 3 平面によって生成される頂点候補点パターン

$B$ の領域)が存在している。(図 5.(a))

- 半平面領域に物体表面が存在している。(図 5.(d))
- 全ての領域に物体表面が存在しない。(図 5.(g)(h))

このような頂点パターンを全ての頂点候補点から削除すれば冗長な頂点が全て削除できる。4 以上の平面によって生成される頂点候補点も同様な 3 パターンを削除すれば良い。

よって、以下のようなアルゴリズムとなる。

1. 処理は平面毎に行なう。
2. 平面上の全ての頂点が上記の 3 パターンに当てはまるか否かを調べる。
3. 2. において当てはまる頂点を全て削除する。
4. 全ての平面において 2. 3. の処理を行なう。

この 1~4. の処理により、全ての冗長な頂点を削除できる。また、大半の冗長なエッジも削除できる。

### 2.5.3 Step2: 冗長なエッジの削除

次に残りの冗長なエッジを削除し、冗長なエッジを全て削除する。この削除法としてエッジ追跡型アルゴリズムを用いた。

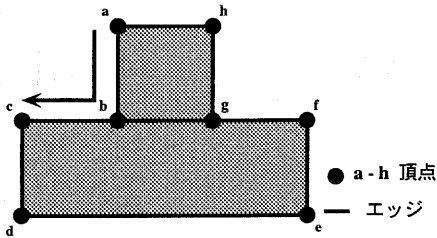


図 6: エッジ追跡型アルゴリズムによるエッジ削除

ここで、ポリゴン上の真のエッジを次のように定義する。

**定義 1** ポリゴン上の真のエッジとは、状態値  $B$  の領域と状態値  $I, O$  の領域との境界に存在する。

定義 1 以外のエッジは冗長である。また、エッジ追跡の方向を次のように定義する。

**定義 2** エッジの追跡方向の左側には常に状態値  $B$  の物体の表面が存在している。

図 3 において残りの冗長なエッジを削除する過程を図 6 に示す。以下、括弧の中は図 6 においてのポリゴン生成進行状況である。また、 $\vec{ab}$  とは、エッジ  $ab$  が有向であることを示しており、ボールド英文字は図 6 においてポリゴンがどこまで完成したかを表している。

1. スタート点を任意に決定する。(頂点  $a, a$ )
2. スタート点に接続しているエッジから定義 2 を満たすエッジ、かつ、定義 1 を満たす真のエッジであるものを選ぶ。 $(\vec{ab}, ab)$
3. 現在の頂点から次のエッジを探す。(現地点は頂点  $b$ )
  - 次のエッジとなるべきエッジが 1 本しか候補が存在しない場合。  
そのエッジを、次のエッジとしてそのまま追跡する。
  - 次のエッジとなるべきエッジが 2 本以上候補が存在する場合。  
定義 2 により、エッジの追跡方向(現在  $\vec{ab}$ ) の左側から時計回りで角度の小さい順にエッジの状態を調べ、定義 1 を満

たす真のエッジまで探索する。真のエッジに到達したら、そのエッジを次のエッジとして追跡する。 $(\vec{bg}$  は削除し、 $\vec{bc}$  を次のエッジとし、追跡する。 $abc$ )

4. スタート点に到達するまで 3. を繰り返し、到達したら  $(abcdefgha)$  1. の処理に戻り平面上に存在するポリゴンを全て作成するまで 1. 2. 3. の処理を行なう。しかし、スタート点に真のエッジが 3 本以上存在する場合は、また 2. 3. の処理を行なう。
5. 4. の処理が終了したら次の平面に処理を移し、全ての平面において同じ処理を繰り返す。

この冗長なエッジ削除法は、エッジを追跡する際、Step1 によって選択された真の頂点に接続しているエッジの状態(真偽)を、全て調べながら冗長なエッジを全て削除している。

### 3 実験

本手法を確認するために、冗長な頂点、エッジを削除しない方法と削除する方法で比較を行なった。実験は半空間プリミティブを用いて物体を S 式によって定義した CSG データ [2][3] を入力として VRML ソースリストを出力させることによって行なった。また、頂点、エッジの確認のためにワイヤフレーム表示を行なった。

物体 A (プリミティブ数 9)、B (プリミティブ数 70) のサーフェスマodel によって表現した図を図 7, 8 にそれぞれ示した。また、物体 A, B の冗長な頂点、エッジを削除前、削除後の比較を各図 (b), (c) に示し、頂点数、エッジ数及びポリゴン数の削除前、削除後の変化を表 1 に示す。表 1 からそれぞれ大幅に削減されたことが分かる。使用機種は Silicon Graphics 社の ORIGIN200(R10000,180MHz) である。

CSG データを読みとり VRML のソースとして書き出すまでの処理を冗長な頂点、エッジを削除しない方法、削除する方法を実行し、それぞれ実時間(括弧内は cpu 時間)を測定した(表 2)。また、削除する方法で実行した場合の Step1, Step2 の時間の振り分けを cpu 時間で測定したところ表 3 のような結果となった。表 2 から物体 B では冗長な頂点、エッジを削除する方が実行時間が短くなっているのは冗長な頂点、エッジを削除することによって他の

表 1: 頂点数, エッジ数, ポリゴン数の変化

		削除前	削除後	削除率
物体 A	頂点数	24	16	33%
	エッジ数	44	24	45%
	ポリゴン数	22	10	55%
物体 B	頂点数	3582	958	73%
	エッジ数	7164	1618	77%
	ポリゴン数	4384	794	82%

表 2: 各方法における実行時間の比較

	削除しない	削除する
物体 A	0.07(0.012)s	0.07(0.014)s
物体 B	39(37)s	33(31)s

表 3: 各 Step の cpu 時間の振り分け

	Step1	Step2
物体 A	0.001s	0.000s
物体 B	8.684s	0.573s

処理で行なう計算量が少なくなったためと考えられる。表3からは Step2 においてポリゴンを生成しているにも関わらず時間をほとんど費やしていないことが分かる。

これらの結果から、物体 B において実時間、CPU 時間共にかなりの時間がかかっているが、これは、物体定義に用いた S 式が複雑であり、3 値論理評価に時間の大半を使っている事が分かっている。

## 4 まとめ

本論文では、多面体表現のための効率的なポリゴンパッチ生成の一手法として幾何学的に冗長な頂点、エッジを削除する手法を提案した。本手法により、CSG で定義された多面体の頂点数、エッジ数を幾何学的に最小にした。また、実験においてはポリゴン数を 10 面体で 55%、794 面体で 82% 削除できた。

このため、CSG からポリゴン変換するような手法 (ポリゴンパッチ変換、ビーム・トレーシング [5] etc.) に、本手法を適用すればレンダリングの高速化が期待できる。特に複雑な物体をレンダリングする際などに威力を発揮すると思われる。

本手法の計算量は、プリミティブ数  $n$  に対し

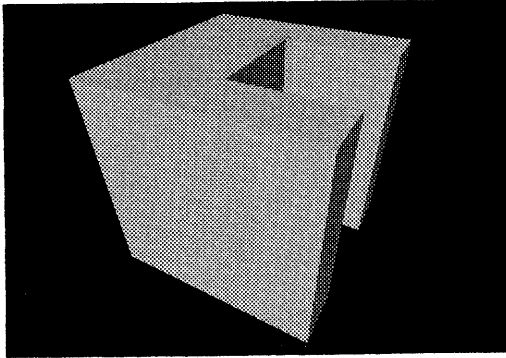
$O(n^3)$  である。このため実験結果からも分かるようにプリミティブが増加するにつれ計算時間が急激に増加する。そのため、今後の課題として計算量を減らすためにアルゴリズムの改良が必要となる。また、曲面物体への対応、最適な凸多角形分割、本手法を用いた VRML オーサリングツールの開発などが挙げられる。

## 謝辞

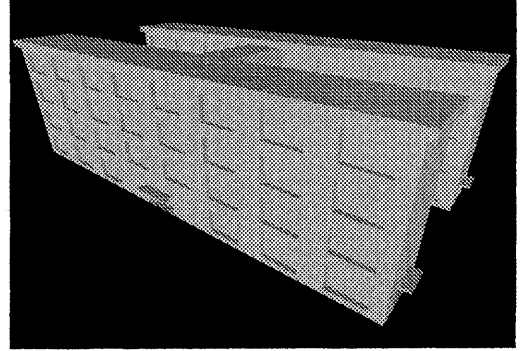
本研究に対し、日頃大変熱心な御指導御討論を頂いた岡田研究室の諸氏に感謝する。

## 参考文献

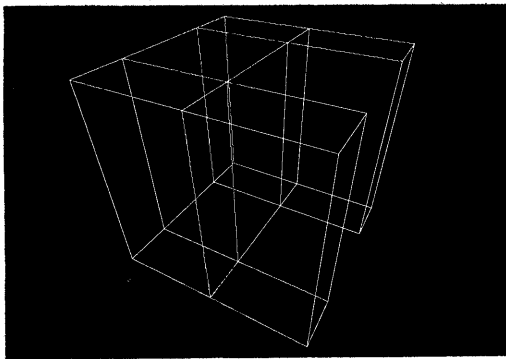
- [1] 河合, 岡田, “CSG 表現からパッチ表現への変換に関する研究”, 信学総大, D-12-173, Mar. 1997.
- [2] 金, 岡田, 横井, 鳥脇, “半空間集合の CSG 表現形状データに対する光線追跡アルゴリズムの検討”, 信学技報, PRU88-129, pp. 33-40, Feb. 1989.
- [3] 岡田, 金, 横井, 鳥脇, “半空間プリミティブと 3 値論理代数系に基づく多面体の記述”, 情処論, Vol. 38, No. 8, Aug. 1997. (印刷中)
- [4] 久保寺, 岡田, 横井, 鳥脇, “半空間プリミティブによる対話的 CSG モデラ”, 情処研資, グラフィックスと CAD, 92-CG-55-2, pp. 1-8, Feb. 1992.
- [5] P. S. HeckBert and P. Hanrahan, “Beam Tracing Polygonal Objects”, *Computer Graphics*, Vol. 18, No. 3, pp. 119-127, 1984.
- [6] 佐藤義雄著, “入門グラフィックス”, アスキー出版局, 1984.
- [7] 太田昌孝, 竹内あきら, 大口孝之, “応用グラフィックス”, アスキー出版局, 1986.
- [8] M. Pesce, “VRML Browsing & Building Cyberspace”, New Riders Publishing Tomorrow's Realities, 1995.
- [9] S. N. Matsuda and B. Roehl, “Special Edition Using VRML”, QUE Corporation, 1996.



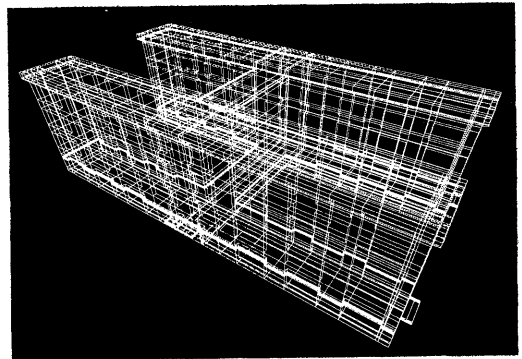
(a) シェーディング画像



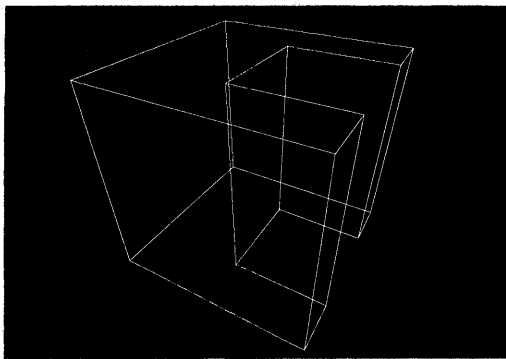
(a) シェーディング画像



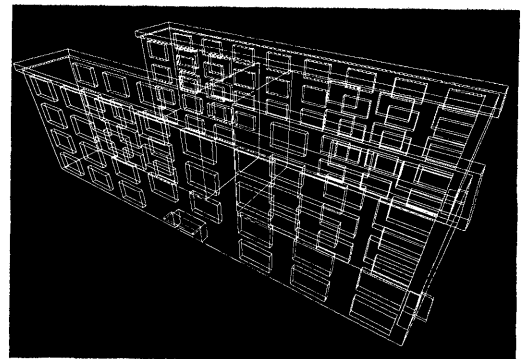
(b) 冗長な頂点, エッジの削除前



(b) 冗長な頂点, エッジの削除前



(c) 冗長な頂点, エッジの削除後



(c) 冗長な頂点, エッジの削除後

図 7: 物体 A : 凹の字多面体

図 8: 物体 B : 工学部 2 号館