

## 透明層状光学系の可視化計算モデリング

平山英樹<sup>†</sup> 門田良実<sup>†</sup> 金田和文<sup>‡</sup> 山下英生<sup>‡</sup>  
<sup>†</sup>島根大学総合理工学部 <sup>‡</sup>広島大学工学部

### 概要

この論文の主な目的は、透明光学系、中でも層状光学系を離散モデリングし、それらの散乱色をレイトレーシングするためのシステム理論的な方法を提案することにある。この方法はほとんどの散乱系が共有する普遍的構造と公理的性質に依拠しているため、他の散乱系へも容易に適用できる。

## Discrete Modeling for Visualization of Transparent Layered Optical Systems

Hideki Hirayama<sup>†</sup> Yoshimi Monden<sup>†</sup> Kazufumi Kaneda<sup>‡</sup> Yamashita Hideo<sup>‡</sup>  
<sup>†</sup>Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering Shimane University  
<sup>‡</sup>Faculty of Engineering Hiroshima University

### abstract

Main purpose of this work is to propose a system theoretical approach to modeling transparent optical systems and ray tracing their scattering colors. Our approach is based on the structural and axiomatic properties which are shared with a variety of scattering systems, and is readily applicable to ray tracing scattering systems by their own probing waves.

### 1 はじめに

シャボン玉や雨上がりの虹のように、白色光で照らされた透明な物体でもこの世で最も美しい色彩を呈することがある。これらの色は透明媒質での光の散乱による「散乱色」と呼ばれ、大まかに干渉による「干渉色」と屈折による「屈折色」とに分けられる。これらの散乱色をレンダリングする手法はこれまでもいくつか提案されているが、それらはCGサイドのものでモデリングからのアプローチはほとんど見当たらない。

そこでこの論文では、光学系だけでなく一般の散乱系へも適用できる離散モデリングの方法をシステム理論的観点から提案し、それをを用いて透明光学系の散乱色のレイトレーシングを行なう。

まず、2節でマクスウェルの方程式から、透明

光学系の離散モデリングで重要な役割を果たす3つの基本的性質を導く。3節ではこれらの基本的性質を普遍的構造と公理的性質にまとめ直し、それらの構造と性質をもとに透明層状光学系のシステム理論的なモデリングを行い、各層での散乱係数と全層でのそれらとの関係を明らかにする。さらに、4節で透明光学系の散乱色を可視化するためのレイトレーシングの実装方法を提案し、最後に、本手法の可能性と課題について述べる。

### 2 透明層状光学系の基本的性質

この節では、電磁場の複素振幅表示を導入したのち、透明媒質中でのマクスウェルの方程式から、透明層状光学系の境界条件、移行規則、エネルギー保存則の3つの基本的性質を導出する。

## 2.1 基本方程式と記法

均質な等方性透明媒質中の電磁場に対するマクスウェルの方程式は、時刻  $t$ 、位置  $\mathbf{r}$  での電場  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  と磁場  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  に対して、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned}$$

のようになる。ここで、 $\varepsilon, \mu$  はそれぞれ媒質の誘電率と透磁率である。さらに、これらの電磁場が単位ベクトル  $\mathbf{s}$  の方向に速度  $v$  で伝播する進行平面波のときには

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

となるので、これらをマクスウェルの方程式へ代入して、進行平面電磁場の横波条件を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{s} \times \mathbf{H}, & \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}, & \mathbf{s} \cdot \mathbf{H} &= 0\end{aligned} \quad (1)$$

## 2.2 電磁場の複素振幅表現

議論を簡単にするため、本論文で扱う透明層状光学系の各層は  $xy$ -面に平行とし、入射平面電磁波の入射面を  $zx$ -面とする。したがって、各層の境界面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と平面波の伝播方向の単位ベクトル  $\mathbf{s}$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (0, 0, 1)^T \\ \mathbf{s} &= (s, 0, c)^T, \quad s^2 + c^2 = 1\end{aligned}$$

となる。これらのベクトルから電磁場の直交座標系  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  を以下のように構成する。

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{s} = (s, 0, c)^T \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{s}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{s}|} = (0, 1, 0)^T \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = (-c, 0, s)^T \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T &= I\end{aligned}$$

この直交座標系  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  により電場は

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= E_{\perp}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_2 + E_{\parallel}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_3\end{aligned} \quad (2)$$

$$= [-cE_{\parallel}(\mathbf{r}), E_{\perp}(\mathbf{r}), sE_{\parallel}(\mathbf{r})]^T \quad (2')$$

となる。ここで、 $E_{\perp}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$  と  $E_{\parallel}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$  は、それぞれ電場の入射面に平行な成分と垂直な成分である。さらに、この電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  を式 (1) に代入すれば、磁場  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  が求まる。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [-E_{\parallel}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_2 + E_{\perp}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_3] \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [-cE_{\perp}(\mathbf{r}), -E_{\parallel}(\mathbf{r}), sE_{\perp}(\mathbf{r})]^T \quad (3')$$

かくして、電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  も磁場  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  も電場の入射面に平行な成分  $E_{\parallel}$  と垂直な成分  $E_{\perp}$  で与えられることが分かる。

## 2.3 境界条件

透明層状光学系の第  $k$  層の位置  $\mathbf{r}$  における電磁場は  $\mathbf{s}_k^{\pm}$  方向へ伝播する平面電磁波の重ね合わせとして、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_k(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_k^+(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_k^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_k(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_k^+(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_k^-(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_k^{\pm}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E} e^{i\omega\varphi_k^{\pm}} \\ \mathbf{H}_k^{\pm}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H} e^{i\omega\varphi_k^{\pm}} \\ \varphi_k^{\pm} &= \frac{\mathbf{s}_k^{\pm} \cdot \mathbf{r}}{v_k}\end{aligned}$$

ここで、 $\omega$  は電磁場の角振動数、 $v_k$  は第  $k$  層中の電磁場の伝播速度である。

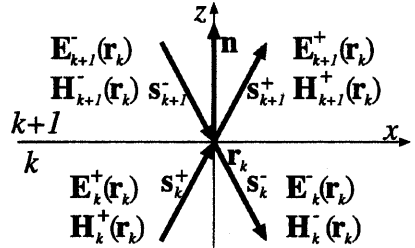


図 1: 境界面上の電磁場

第  $k$  層と第  $k+1$  層との境界面上の点  $\mathbf{r}_k$  における電磁場の関係は、透明媒質に対するマクスウェルの方程式から求まる境界条件

$$[\mathbf{E}_{k+1}(\mathbf{r}_k)]_{\sigma} = [\mathbf{E}_k(\mathbf{r}_k)]_{\sigma}$$

$$[\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{r}_k)]_{\sigma} = [\mathbf{H}_k(\mathbf{r}_k)]_{\sigma}, \quad \sigma = x, y$$

$$\varepsilon_{k+1} [\mathbf{E}_{k+1}(\mathbf{r}_k)]_z = \varepsilon_k [\mathbf{E}_k(\mathbf{r}_k)]_z$$

$$\mu_{k+1} [\mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{r}_k)]_z = \mu_k [\mathbf{H}_k(\mathbf{r}_k)]_z$$

により与えられる。まず、進行平面波の指数部を比較することにより伝播方向  $s_k^\pm, s_{k+1}^\pm$  に対する条件、すなわち、反射及び屈折の法則が求まる。

$$s_k^\pm = (s_k, 0, \pm c_k)^T$$

$$c_k = \begin{cases} \sqrt{1 - s_k^2}, & |s_k| \leq 1 \text{ の場合} \\ i\sqrt{s_k^2 - 1}, & |s_k| > 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$\frac{s_k^\pm}{v_k} = \frac{s_{k+1}^\pm}{v_{k+1}}$$

さらに、境界条件の式に式(2')、式(3')を代入して整理すると、境界面上の位置  $\mathbf{r}_k$  の両側における電磁場の関係は、電場  $\mathbf{E}_k^\pm$  の成分  $E_{k\perp}^\pm, E_{k\parallel}^\pm$  に対する、次のような式にまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} E_{k+1}^+(\mathbf{r}_k) \\ E_{k+1}^-(\mathbf{r}_k) \end{bmatrix} = Q_k \begin{bmatrix} E_k^+(\mathbf{r}_k) \\ E_k^-(\mathbf{r}_k) \end{bmatrix}$$

ここで、 $E_k^\pm = E_{k\perp}^\pm, E_{k\parallel}^\pm$  であり、

$$s_j^k = s_k/s_j, \quad c_j^k = c_k/c_j$$

とすると、 $E_k^\pm = E_{k\perp}^\pm$  のとき

$$Q_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_k^{k+1} c_{k+1}^k & 1 - s_k^{k+1} c_{k+1}^k \\ 1 - s_k^{k+1} c_{k+1}^k & 1 + s_k^{k+1} c_{k+1}^k \end{bmatrix}$$

となり、 $E_k^\pm = E_{k\parallel}^\pm$  のとき

$$Q_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_k^{k+1} + c_{k+1}^k & s_k^{k+1} - c_{k+1}^k \\ s_k^{k+1} - c_{k+1}^k & s_k^{k+1} + c_{k+1}^k \end{bmatrix}$$

となる。行列  $Q_k$  は  $(k, k+1)$  層間の伝送行列と呼ばれ、この伝送行列を用いることによって、境界面の両側における電磁場の関係を記述することができる。

## 2.4 移行規則

層状系の第  $k+1$  層の両端における電磁場の関係は、進行平面波の性質から

$$E_{k+1}^\pm(\mathbf{r}_{k+1}) = e^{\pm i\varphi_{k+1}} E_{k+1}^\pm(\mathbf{r}_k)$$

$$\varphi_{k+1} = \left( \frac{\omega}{v_{k+1}} \right) \mathbf{s}_{k+1}^+ \cdot (\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k)$$

となるので、移行行列  $\Phi_{k+1} = \text{diag}(e^{i\varphi_{k+1}}, e^{-i\varphi_{k+1}})$  を使ってこれらをまとめて、つぎの移行規則の関

係式を得る。

$$\begin{bmatrix} E_{k+1}^+(\mathbf{r}_{k+1}) \\ E_{k+1}^-(\mathbf{r}_{k+1}) \end{bmatrix} = \Phi_{k+1} \begin{bmatrix} E_{k+1}^+(\mathbf{r}_k) \\ E_{k+1}^-(\mathbf{r}_k) \end{bmatrix}$$

以上のことから、ある層の電場の成分は他の層の成分に中間層の伝送行列と移行行列を掛けることにより簡単に求めることができる。

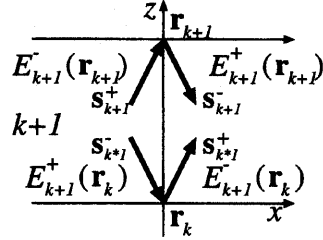


図 2: 移行規則

## 2.5 エネルギー保存則

電磁場の時刻  $t$ 、位置  $\mathbf{r}$  における電磁場のポインティングベクトルの定義

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$$

から、その時間平均は

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt$$

$$= \frac{1}{4} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]$$

与えられる。これに式(2)と式(3)を代入して整理すると、ポインティングベクトルの時間平均の  $z$  成分は、 $c$  が実数の場合

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_z = \rho [ |E^+(\mathbf{r})|^2 - |E^-(\mathbf{r})|^2 ]$$

$c$  が虚数の場合

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_z = \rho [ E^+(\mathbf{r}) E^{-*}(\mathbf{r}) - E^{+*}(\mathbf{r}) E^-(\mathbf{r}) ]$$

となる。ここで、 $\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} c$  である。

以上のことから、 $(j, k)$  層間でのエネルギー保存則は、 $c_k$ が実数の場合には、次式で与えられる。

$$\rho_k \left[ |E_k^+(\mathbf{r}_{k-1})|^2 - |E_k^-(\mathbf{r}_{k-1})|^2 \right] = \begin{cases} \rho_j \left[ |E_j^+(\mathbf{r}_j)|^2 - |E_j^-(\mathbf{r}_j)|^2 \right], & c_j: \text{実数} \\ \rho_j \left[ E_j^+(\mathbf{r}_j)E_j^{-*}(\mathbf{r}_j) - E_j^{+*}(\mathbf{r}_j)E_j^-(\mathbf{r}_j) \right], & c_j: \text{虚数} \end{cases}$$

### 3 システム理論的モデリング

この節では、系の入出力関係を記述するために散乱表現と伝送表現を導入する。そして、これらの表現を駆使して、まず散乱系の公理的性質から散乱行列のユニタリ性を求めるとともに、散乱系の構造的性質を用いて、透明層状光学系の各層での散乱係数から全層のそれを求める方法を示す。

#### 3.1 散乱表現と伝送表現

##### 散乱表現

層状光学系の  $(k, k+1)$  層間の境界において、境界面に入ってくる  $X_k^+, X_{k+1}^-$  を入力とし、そこで散乱され出ていく  $X_{k+1}^+, X_k^-$  を出力とするような入出力関係は

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^+ \\ X_k^- \end{bmatrix} = P_k \begin{bmatrix} X_k^+ \\ X_{k+1}^- \end{bmatrix}, \quad P_k = \begin{bmatrix} \tau_k & \gamma'_k \\ \gamma_k & \tau'_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

のように記述され、散乱表現と呼ばれる。そして、 $P_k$  は  $(k, k+1)$  層間の散乱行列と呼ばれ、 $P_k$  の要素  $\gamma_k, \tau_k$  は  $(k, k+1)$  層間の順方向の反射係数と透過係数、 $\gamma'_k, \tau'_k$  は  $(k, k+1)$  層間の逆方向の反射係数と透過係数であり、

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_k = X_k^- / X_k^+ \\ \tau_k = X_{k+1}^+ / X_k^+ \\ \gamma'_k = X_{k+1}^- / X_{k+1}^+ \\ \tau'_k = X_k^- / X_{k+1}^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ただし } X_{k+1}^- = 0 \\ \text{ただし } X_k^+ = 0 \end{array}$$

のように定義され、以降、これらの係数を総称して散乱係数と呼ぶことにする。

##### 伝送表現

つぎに、第  $k$  層の  $X_k^+, X_k^-$  を入力、第  $k+1$  層の  $X_{k+1}^+, X_{k+1}^-$  を出力とすると、これらの入出力

関係は

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^+ \\ X_{k+1}^- \end{bmatrix} = Q_k \begin{bmatrix} X_k^+ \\ X_k^- \end{bmatrix} \quad (5)$$

で与えられる。このように層間の関係を記述する表現法を伝送表現、 $Q_k$  を  $(k, k+1)$  層間の伝送行列と呼ぶ。また、伝送表現では以下のような連鎖規則が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} X_{k+2}^+ \\ X_{k+2}^- \end{bmatrix} = Q_{k+1} \begin{bmatrix} X_{k+1}^+ \\ X_{k+1}^- \end{bmatrix} = Q_{k+1} Q_k \begin{bmatrix} X_k^+ \\ X_k^- \end{bmatrix}$$

この連鎖規則により、離れた層間の入出力関係は、中間層の伝送行列を掛けて求めることができる。

これらの散乱行列と伝送行列は互いに変換可能で、その変換は以下のようにして行われる。

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow Q \text{ 変換} & Q \rightarrow P \text{ 変換} \\ Q_{11} = P_{11} - P_{12} \frac{P_{21}}{P_{22}}, & P_{11} = Q_{11} - Q_{12} \frac{Q_{21}}{Q_{22}} \\ Q_{12} = \frac{P_{12}}{P_{22}}, & P_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_{22}} \\ Q_{21} = -\frac{P_{21}}{P_{22}}, & P_{21} = -\frac{Q_{21}}{Q_{22}} \\ Q_{22} = \frac{1}{P_{22}}, & P_{22} = \frac{1}{Q_{22}} \end{array}$$

#### 3.2 ユニタリ性

ここでは、透明光学系の公理的性質であるエネルギー保存則から散乱行列のユニタリ性を導き、散乱係数の間に成立する関係を求める。

透明光学系の  $k$  層と  $k+1$  層の進行平面電磁波の方向ベクトルが実ベクトルならば、2.5 節より、媒質間のエネルギーの保存則の散乱表現は

$$\rho_k |X_k^-|^2 + \rho_{k+1} |X_{k+1}^+|^2 = \rho_k |X_k^+|^2 + \rho_{k+1} |X_{k+1}^-|^2$$

となり、 $\Delta = \text{diag}(\rho_k, \rho_{k+1})$  として書き直すと

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^+ \\ X_k^- \end{bmatrix}^* \Delta \begin{bmatrix} X_{k+1}^+ \\ X_k^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k^+ \\ X_{k+1}^- \end{bmatrix}^* \Delta \begin{bmatrix} X_k^+ \\ X_{k+1}^- \end{bmatrix}$$

となる。これに式 (4) を代入すると、散乱行列のユニタリ性が求まる。

$$P^* \Delta P = \Delta$$

散乱行列のユニタリ性を要素ごとに書き下すと、

$$\begin{aligned} |\gamma_k|^2 + \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} |\tau_k|^2 &= 1 \\ |\gamma'_k|^2 + \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} |\tau'_k|^2 &= 1 \\ \rho_k \tau_k'^* \gamma_k + \rho_{k+1} \gamma_k'^* \tau_k &= 0 \end{aligned}$$

となり、これらから反射率  $R, R'$  と透過率  $T, T'$  の関係

$$\begin{aligned} R &= |\gamma_k|^2 = |\gamma'_k|^2 = R' \\ T &= \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} |\tau_k|^2 = \frac{\rho_k}{\rho_{k+1}} |\tau'_k|^2 = T' \\ R + T &= R' + T' = 1 \end{aligned}$$

が求まる。さらに、散乱係数の実数性と時間反転不変性により、順方向と逆方向の散乱係数の関係は

$$\gamma'_k = -\gamma_k, \quad \tau'_k = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} \tau_k$$

となる。これにより、順方向の散乱係数のみで散乱行列は表すことができる。

### 3.3 透明層状光学系の散乱係数

これまでの説明から、ここでは透明層状光学系の全層の散乱係数を各層の散乱係数から求める手順を説明する。

図3に示す  $N+2$  層の透明層状光学系の全層の散乱係数  $\gamma_{N+1}, \tau_{N+1}$  は、 $E_{N+1}^-(\mathbf{r}_N) = 0$  のもとに、

$$\begin{aligned} \gamma_{N+1} &= E_0^-(\mathbf{r}_0)/E_0^+(\mathbf{r}_0) \\ \tau_{N+1} &= E_{N+1}^+(\mathbf{r}_N)/E_0^+(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

のように定義される。そして、この透明層状光学系の全層の散乱係数  $\gamma_{N+1}, \tau_{N+1}$  は各層の散乱係数  $\{\gamma_k, \tau_k, k = 0, \dots, N\}$  から以下のように求めることができる。

1. フレネルの公式から各層での散乱係数  $\gamma_k, \tau_k$  を求める。
2. 各層での散乱係数  $\gamma_k, \tau_k$  から各層での散乱行列  $P_k$  を構成する。
3.  $P \rightarrow Q$  変換を使って、各層での伝送行列  $Q_k$  を計算する。
4. 伝送行列の連鎖規則と進行平面波の移行規則から全層の伝送行列  $Q$  を計算する。

5.  $Q \rightarrow P$  変換を使って、全層の散乱行列  $P$  を計算する。

6. 全層の散乱行列  $P$  から全層の散乱係数  $\gamma_{N+1}, \tau_{N+1}$  を求める。

このようにして、各層の散乱係数から全層の散乱係数を求めることができる。この方法は散乱系の普遍的構造(ラティス構造、連鎖規則)と公理的性質(エネルギー保存則、時間反転不変性)に立脚しているため、他の散乱系へも容易に拡張できる。

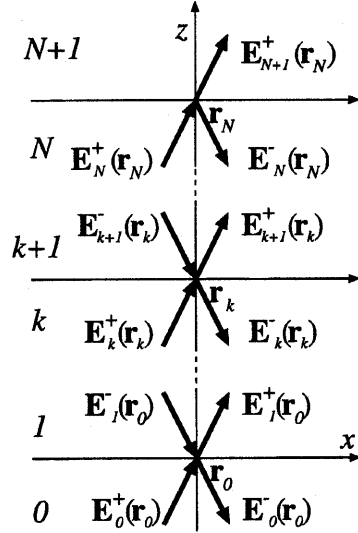


図 3:  $N+2$  層の透明層状光学系

## 4 散乱色のレイトレーシング

この節では、レイトレーシングを用いて透明層状光学系の散乱現象を可視化するための実装法について述べる。

### 4.1 レイトレーシングの実装

対象となる透明光学系の波長依存性がある場合は、“単色波のレイトレーシング”により、“屈折色”のレンジリングが可能となる。つぎに、波長依存性がない場合は、光学系の厚さ ( $d$ ) がレイトレーサーの分解能 ( $\epsilon$ ) より大きいときには、“通常のレイトレーシング”を行えばよい。逆に  $d$  が  $\epsilon$  より小さいときには“通常のレイトレーシング”は不可能となるが、この薄膜の全反射率と全

透過率を求め、これらを透明物体の表面属性として実装することにより、薄膜光学系のレイトレーシングが実現できる。

この際、入射光の波長 ( $\lambda$ ) が薄膜の厚さ ( $d$ ) に近いときには、まず、この層状薄膜系の全反射係数を計算したのち、全反射率と全透過率を求めることで、“複素振幅のレイトレーシング”による“干渉色”のレンダリングが可能となる。他方、入射光の波長 ( $\lambda$ ) が薄膜の厚さ ( $d$ ) よりはるかに大きいときには、干渉縞の間隔が非常に狭くなり、干渉色のエイリアジングが生じるが、“エネルギーのレイトレーシング”を行なうことにより、“アンチエイリアジング”が実現できる。これらをまとめるとつぎのようになる。

- 波長依存性がない
  - \*  $d > \varepsilon$  のとき
    - 通常のレイトレーシング
  - \*  $d < \varepsilon$  のとき
    - $d \approx \lambda$  の場合…干渉色
      - 複素振幅のレイトレーシング
    - $d \gg \lambda$  の場合…アンチエイリアジング
      - エネルギーのレイトレーシング
- 波長依存性がある…屈折色
  - 単色波のレイトレーシング

したがって、以下では  $\varepsilon > d \approx \lambda$  のときの全反射係数の効率的な計算法と  $\varepsilon > d \gg \lambda$  のときの干渉色のアンチエイリアジングについて述べる。

## 4.2 反射係数の逐次計算法

ここでは図3のような  $N+2$  層の透明層状光学系の全反射係数  $\gamma_{N+1}^0$  の効率的な逐次計算法を提案する。

透明層状光学系の第  $k+1$  層の位置  $\mathbf{r}_{k+1}$  と第  $k$  層の位置  $\mathbf{r}_k$  での電磁場の関係は、伝送表現と移行規則から  $Q_k' = \Phi_{k+1} Q_k$  とすれば

$$\begin{bmatrix} E_{k+1}^+(\mathbf{r}_{k+1}) \\ E_{k+1}^-(\mathbf{r}_{k+1}) \end{bmatrix} = Q_k' \begin{bmatrix} E_k^+(\mathbf{r}_k) \\ E_k^-(\mathbf{r}_k) \end{bmatrix}$$

となり、これを変形して

$$\gamma_{k+1}^{N+1} = \frac{(Q_k')_{21} + (Q_k')_{22} \gamma_k^{N+1}}{(Q_k')_{11} + (Q_k')_{12} \gamma_k^{N+1}}$$

を得る。ここで、 $\gamma_{k+1}^{N+1} = E_{k+1}^-/E_{k+1}^+$ 、 $\gamma_k^{N+1} = E_k^-/E_k^+$  である。この式から、全反射係数  $\gamma_{N+1}^0$  は以下の逐次計算法により求めることができる。

- 初期条件： $\gamma_N^{N+1} = \gamma_N$
- 逐次更新： $k = N-1, \dots, 0$ 

$$\gamma_k^{N+1} = \frac{(Q_k')_{21} - (Q_k')_{11} \gamma_{k+1}^{N+1}}{(Q_k')_{22} - (Q_k')_{12} \gamma_{k+1}^{N+1}}$$

これにより、透明層状光学系の全反射率は  $\mathcal{R} = |\gamma_0^{N+1}|^2$  で、また、全透過率は  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$  で求まる。

## 4.3 干渉色のアンチエイリアジング

通常、干渉色のアンチエイリアジングのためには、求めた全反射率を波長で平均することにより実現できるが、ここではそれをシステム理論的な方法で行なうことにする。

すなわち、厚さが光の波長よりも非常に大きい透明層状光学系の全反射率は、電場  $E$  をラディアンズ  $L$  に、移行行列  $\Phi$  を単位行列  $I$  に、反射係数  $\gamma$  を反射率  $R$  に置き換えることにより、4.2 節の逐次計算法を用いて求めることができる。

## 5 まとめ

今回提案した透明層状光学系のシステム理論的モデリングは、対象となる系の普遍的構造と公理的性質に立脚しているため、散乱系の物理量や運動方程式に依らない扱いが可能となり、他の系への拡張も容易である。系固有の検出波を用いて散乱系のレイトレーシングを行えば、散乱現象の可視化計算も夢ではなくなるであろう。

今回は透明層状光学系の干渉色をレイトレーシングしたが、今後は透明光学系の散乱色を統一的に可視化計算するためのシステム開発が課題となる。

## 参考文献

- [1] M.L.Dias, “Ray Tracing Interference Color”, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol.11, p.54, 1991.
- [2] M.Born and E.Wolf, “Principles of Optics”, Pergamon Press, 1975.