平方充填バブル・メッシュ法による自動四角メッシュ生成

伊藤 貴之* 井上 恵介* 山田 敦* 嶋田 憲司** 古畑 智武***

* 日本アイ・ビー・エム (株) 東京基礎研究所
** カーネギー・メロン大学 機械工学科
*** 日本アイ・ビー・エム (株) AP ソリューション開発

* {itot, inoue, ayamada }@trl.ibm.co.jp ** shimada@cmu.edu
*** furuhata@yamato.ibm.co.jp

概要: 有限要素解析に有利であるといわれている四角メッシュを自動生成するために、筆者らは球状物体を力学シミュレーションによって最密充填し、その中心点を連結して良質な三角メッシュを生成する手法と、その三角形要素をペアにして四角形要素に変換する手法を提案している。しかし、正三角形に近い三角形要素をペアにして四角形要素に変換する時に生じる位相的な不規則性を解消することは難しく、よって良質な四角メッシュが生成されるとは限らない。

本報告では、球状物体を力学シミュレーションによって平方充填し、その中心点を連結することによって、良質な四角メッシュを自動生成する手法を提案する。さらに、本手法を実装して生成したメッシュを示し、本手法の有用性を示す。

キーワード: 四角メッシュ、バブル・メッシュ法、平方充填。

Automated well-shaped quadrilateral mesh generation using the squarely-packing bubble mesh method

Takayuki ITOH* Keisuke INOUE* Atsushi YAMADA*
Kenji SHIMADA** Tomotake FURUHATA***

* IBM Research, Tokyo Research Laboratory
** Mechanical Engineering, Carnegie Mellon University
*** IBM Japan, AP Solution Development

Abstract: The authors have previously proposed an automated quadrilateral mesh generation method, which first generates a well-shaped triangular mesh and then converts into a quadrilateral mesh. The method generates the triangular mesh by tightly packing many spherical objects by using the dynamics simulation, and connecting the center points of them. It then converts the triangular mesh into a quadrilateral mesh by coupling most of triangular elements. However, the method does not always generate well-shaped quadrilateral meshes, since it often occurs topological irregularity by coupling regular triangular elements.

The paper proposes an well-shaped quadrilateral mesh generation method, which squarely-packs many spherical objects and connects the center points of them. Some experimental tests of the method are also shown in the paper.

Key Words: Quadrilateral mesh, the bubble mesh method, squarely-packing.

1　はじめに

メッシュ生成とは、CAD などで生成された形状を細かい要素（2次元ならば三角形や四角形、3次元ならば四面体や六面体）の集合に分割する処理である。2次元のメッシュ生成手法の中で、三角メッシュについては、Delaunay triangulation method に代表される自動生成手法がいくつか確立されている。それに対して、有限要素解析に有利であるといわれている四角メッシュについては、十分な自動生成手法が確立されていない。

さて、実用に堪える四角メッシュを自動生成する手法とは、以下の要件をすべて満たす手法であると筆者らは考える。

(要件 1) 全自動であること。形状領域の分割などの手動処理を必要とせず、形状とメッシュの細かさを入力するだけで、自動的にメッシュが生成されることが望ましい。

(要件 2) 生成される四角形要素の歪みが少ないこと。計算力学による解析では、極端に細長い要素や、角度の極端に大きい（または小さい）角をもつ要素は、解析結果に悪影響を与える。理想的には、すべての四角形要素の形状は正方形に近いことが望ましい。

(要件 3) 生成される四角形要素の整列方向が制御できること。計算力学による解析では、応力などの物理量の方向、または形状領域の境界の方向などに要素が整列していることが望ましい場合が多い。よって、利用者が指定する整列方向に沿って、多くの要素がその方向に規則的に整列したメッシュが生成されることが望ましい。

(要件 4) 要素の大きさの分布が制御できること。重要な部分には細かいメッシュ要素を、そうでない部分には粗いメッシュ要素を生成できることが望ましい。

(要件 5) 複雑な曲面形状を対象とできること。CAD で設計される形状には、曲面領域の一部分を切除して得られるトリム曲面や、非常に曲がりくねっている曲面形状など、さまざまな曲面がある。このような曲面形状上においても、自動的に四角メッシュを生成できることが望ましい。

筆者らは以前に、バブル・メッシュ法 [1] を用いて良質な三角メッシュを生成し、これを四角メッシュに変換する手法 [2] を提案している。バブル・メッシュ法では、分子間力を仮想した球状物体を入力形状の内部に最密充填し、それぞれの球状物体の中心点をメッシュのノードをみなし、それらを連結することで良質な三角メッシュを生成する。バブル・メッシュ法では、複雑な入力形状に対しても良質なメッシュを自動生成することができる上に、要素サイズの適応的な制御などの点においても優れている。しかし、バブル・メッシュ法を用いて生成された正三角形に近い三角形要素をペアにして、良質な四角メッシュを生成することは、原理的に限界がある。バブル・メッシュ法の長所を生かしながらこの問題点を根本的に解決する一手段として、三角形要素を生成しやすい六方最密な状態のバブル配置を求める従来の手法ではなく、四角形要素を生成しやすい平方充填されたバブル配置を求める手法が考えられる。

本報告では、分子間力を持った球状物体を入力形状に平方充填する、新しいバブル・メッシュ法を提案する。この手法を用いて充填された球状物体の中心を結ぶことによって、良質な四角メッシュを生成することができる。本報告で提案する自動四角メッシュ生成手法は、上記の要件をすべて満たすことができるものである。

2　従来手法

従来に報告されている四角メッシュの生成手法について、代表的ないくつかを紹介する。

2.1　ユーザーによる領域分割を利用した手法

いわゆる「マップド・メッシュ」といわれている手法であり、商用の CAD システムにも採用されている。この手法では、あらかじめマウス操作などの手作業を用いて、与えられた領域を三角形、四角形などの単純な領域の集合に分割し、分割された各領域を格子状に分割する [3]。この手法では、領域分割が手作業であるため、(要件 1) を満たすことができない。また、要素サイズの制御は困難であるので、(要件 4) を満たすことができない。

2.2　平方格子を領域内部に埋め込む手法

領域の内部に平方格子を埋め込み、領域の境界周辺のノードと境界線上のノードを連結してメッシュ

を生成する手法 [3]。境界周辺のメッシュの質が非常に悪くなることがあり、解析の精度に影響が出ることが多いので、(要件 2) を満たすことができない。また、要素サイズの制御は困難であるので、(要件 4) を満たすことができない。

2.3 形状領域の境界から四角形要素を順次生成する手法

いわゆる「アドバンシング・フロント・メッシュ」といわれている手法である [4]。この手法では、領域の境界にそって一列にノードを生成し、それを連結して要素を生成し、その内側に同様にして一列ずつノードを生成して要素を生成する処理を、領域が要素で埋め尽くされるまで反復する。この手法では、領域の内側の要素に歪みが生じやすいので、(要件 2) を満たすことができない。

2.4 バブル・メッシュ法によって生成された三角メッシュから四角メッシュへの変換

筆者らは以前に、隣接する三角形要素をペアにして結合することにより、三角メッシュを四角メッシュに自動変換する手法を提案している [2]。三角メッシュ生成手法にバブル・メッシュ法 [1] を適用することで、複雑な入力形状に対しても、良質かつ適応的に要素サイズを制御した四角メッシュを生成できる。また、曲面上でのメッシュ生成についても、ロバストな手法が提案されている [5]。しかし、正三角形に近い三角形要素をペアにして四角形要素に変換すると、平行四辺形や菱形に近い四角形要素が生成されることが多く、良質な四角形要素が生成されるとは限らない。また、三角形要素をペアにしたときに生じる位相的な不規則性を解消することは難しく、必ずしも利用者の期待する方向に要素が整列するとは限らない。よって、(要件 2)(要件 3) を十分に満たしているとはいえない。

3 平方充填バブル・メッシュ法

3.1 平方充填バブル・メッシュ法の原理

従来のバブル・メッシュ法 [1] では、近接する 2 個のバブルに分子間力を想定し、バブルの中心に向かって引力や斥力を持たせ、力学シミュレーションによってバブルが安定となる状態を求めることにより、六方最密となるバブル配置を求めている。このバブル配置は、正三角形に近い良質な三角メッシュを生成するのに適している。

一方、六方最密ではなく平方や立方に整列した分子構造の例に、金属結合がある。金属結合では、近接した分子が電子を共有すると、分子周辺のポテンシャルに異方性が生じ、そのポテンシャルが極小となる方向（電子を共有した分子と 90 度の角度をなす方向）に別の分子を引き付ける。この金属結合の過程におけるポテンシャル場と同様に、分子間力の影響範囲を表すポテンシャル場を仮定し、分子間力の働く方向を隣接バブルの中心方向に限定せずその近隣の方向に適応的に仮定することで、平方や立方に整列したバブル配列を得ることが可能であると考えられる (図 1(A) 参照) 。

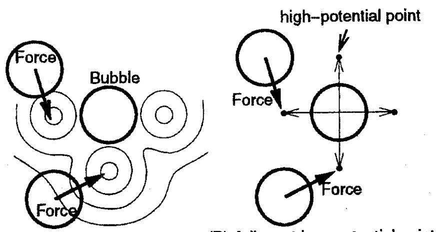


図 1: バブル間力のポテンシャル場

本手法では、簡単な実装でバブルの平方充填を実現するために、ポテンシャルが極小となるような隣接点を 4 点をそれぞれのバブルに設けて、その方向に近隣バブルに対する引力を働かせる。図 1(B) がその一例であり、黒丸に示した隣接点の方向に、近隣バブルに引力を与えている。

3.2 平方充填バブル・メッシュ法の処理手順

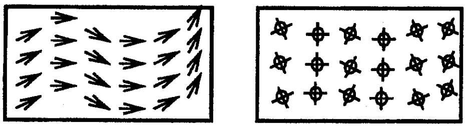
平方充填バブル・メッシュ法を用いた、2 次元形状に対する自動四角メッシュ生成の処理手順を以下に示す。

1. 領域の頂点上、および辺上に、バブルをすき間なく充填する。この処理は従来のバブル・メッシュ法と同様である。
2. 領域内部にバブルを多数配置する。続いて、力学シミュレーションと適応的なバブル個数制御により、適当な個数のバブルが平方充填された状態を求める。

3. バブルの中心点を結んで四角メッシュを生成する。

3.3 平方にバブルを整列させるためのバブル間力の算出

本手法では、入力形状全体に、メッシュの整列方向を指示するためのベクトル場を与える。それぞれのバブルに対して、ポテンシャルが極小となる隣接4点は、そのベクトルに平行な方向、および垂直な方向に与えられる (図 2参照)。



(1) Vector field　(2) Adjacent low–potential points

図 2: ベクトル場とバブル隣接点

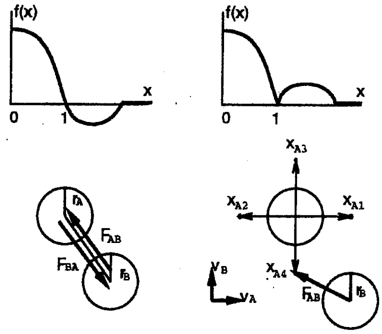
従来のバブル・メッシュ法では、分子間力の方向を近隣バブルの中心方向とした (図 3(A) 参照) のに対し、本手法では分子間力の方向を近隣バブルに隣接する 4 点 (図 3(B) 参照) とする。ここで、バブル A の中心位置を x_A、半径を r_A、中心位置におけるベクトル場の方向を v_A とし、領域の法線方向 N とベクトル v_A の外積によって得られるベクトルを v_B とする。また、v_A および v_B は単位ベクトルであるとする。このとき本手法では、バブル A に対して、以下の 4 点 $x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}$ のうちの 1 方向に分子間力を想定する。

$$\begin{aligned} x_{A1} &= x_A + 2r_Av_A, \quad x_{A2} = x_A - 2r_Av_A, \\ x_{A3} &= x_A + 2r_Av_B, \quad x_{A4} = x_A - 2r_Av_B \end{aligned} \tag{1}$$

この隣接点を用いて、本手法でバブル A がバブル B に与える分子間力 F_{AB} を求める処理手順を、以下の通り示す。

1. バブル A の 4 個の隣接点の位置 $x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{A4}$ を算出する。
2. 4 点のうち、バブル B にもっとも距離が近いもの Ac を選び、その距離 d_c を算出する。
3. 以下の式により分子間力 F_{AB} を算出する。

$$F_{AB} = |f(\frac{d_c}{r_A + r_B})| \frac{x_{Ac} - x_B}{|x_{Ac} - x_B|} \tag{2}$$



(A) Conventional bubble mesh　(B) Squarely–packing bubble mesh

図 3: 従来手法と本手法における分子間力の方向

以上の処理によって求められた分子間力を用いて、反復処理によって運動方程式を解くことにより、平方充填されたバブル配置が得られる。ここで、$f(x)$ は分子間力の大きさを表す距離の関数であり、文献 [1] では 3 次関数を用いていた。本手法では、分子間力の大きさを、文献 [1] で用いた 3 次関数の絶対値とした。

また、本章では説明を省略するが、文献 [5] に示される手法を併用することにより、曲面上に四角メッシュを生成することが可能である。同様に、文献 [6] に示される手法を併用することにより、正方形ではなく長方形に近い形状をもつ異方性四角メッシュを生成することが可能である。

3.4 整列方向のベクトル場がユーザーにより指定されていない場合

従来のいくつかの四角メッシュ生成手法 [2] [4] のように、領域の境界線方向への要素の整列を目的とするならば、利用者がベクトル場を指定しなくても、擬似的にベクトル場を自動生成することができる。

擬似的にベクトル場を自動生成するために、本手法では、入力形状を覆う直交格子形状を仮想する。この直交格子を形成するそれぞれの格子点について、もっとも距離の近い境界線を選択し、そのベクトル方向を格子点に与える (図 4 参照)。それぞれのバブルの位置におけるベクトルは、バブルを囲む 4 つの格子点に与えられたベクトルを線形補間することで決定される。

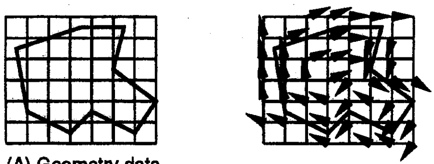


図 4: 擬似ベクトル場の自動生成

3.5 平方に整列したバブルからの四角メッシュ生成

バブルの中心点を結んで四角メッシュを生成するには、従来のアドバンシング・フロント・メッシュ [4] や、三角メッシュからの変換 [2] などの手法によって実現できる。この時、大半の要素は四角形要素になるが、すべての要素が四角形要素になることは保証せず、三角形要素が混入する可能性はある。しかし、有限要素解析の現場では若干の三角形要素が混入したメッシュを四角メッシュとして用いていることも多いので、この点は本手法の価値を下げるものではない。すべての要素が四角形要素になることを保証するには、例えば文献 [2] に示す手法のように、三角形要素および四角形要素を半分の要素サイズの四角形要素に変換する処理が必要である。

4 本手法の実行例

本手法を実装してメッシュを生成した結果を示す。なお、本手法は RS/6000 Model 42T (AIX 4.1.4) 上で実装された。

図 5 は、従来のバブル・メッシュ法によって充填されたバブルと、四角メッシュの生成結果である。図 7 は、本手法によって充填されたバブルと、四角メッシュの生成結果である。これらの結果から、本手法では従来の手法と比べて、高い整列性をもつメッシュが生成されていることがわかる。

図 6 は、従来のバブル・メッシュ法によってメッシュサイズを制御しながら充填されたバブルと、四角メッシュの生成結果である。図 8 は、本手法によってメッシュサイズを制御しながら充填されたバブルと、四角メッシュの生成結果である。これらの結果から、本手法では従来の手法と比べて、メッシュサイズを必要に応じて制御しながら、高い整列性をもつメッシュが生成されていることがわかる。

5 むすび

本報告では、2次元領域に平方に整列するように、分子間力を持った球状物体を入力形状に充填する、新しいバブル・メッシュ法を用いて、良質な四角メッシュを自動生成する手法を提案した。今後の課題として、本手法を3次元メッシュ生成手法に拡張することが考えられる。

参考文献

[1] K. Shimada, *Physically-Based Mesh Generation:Automated Triangulation of Surfaces and Volumes via Bubble Packing,* Dissertation of Massachusetts Institute of Technology, 1993.

[2] Shimada K., and Itoh T., *Automated Conversion of 2D Triangular Mesh into Quadrilateral Mesh,* International Conference on Computational Engineering Science '95 Proceedings, pp.350-355, 1995.

[3] Ho-Le K., *Finite Element Mesh Generation Method: a Review and Classification,* Computer Aided Design, Vol. 20, No. 1, pp. 27-38, 1988.

[4] Blacker T. D., *Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 811-847, 1991.

[5] 山田、嶋田、井上、伊藤、古畑、パラメータ空間への楕円最密充填による自動曲面メッシング手法、情報処理学会 Visual Computing／グラフィックスとCAD合同シンポジウム'97, pp.1-8, 1997.

[6] 嶋田、非等方性メッシュの自動生成方法、情報処理学会第 51 回全国大会, 4C-7, 1995.

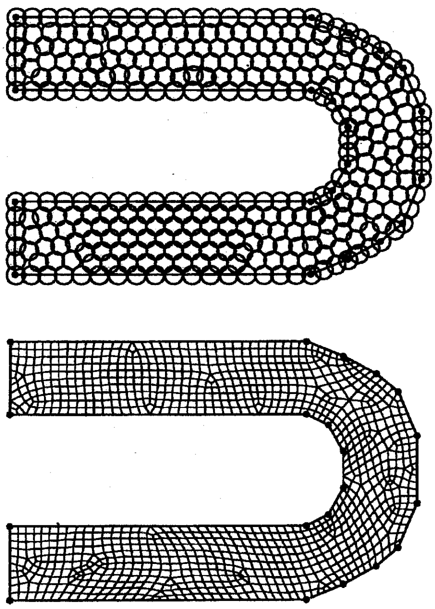


図 5: 従来手法による四角メッシュ (1)

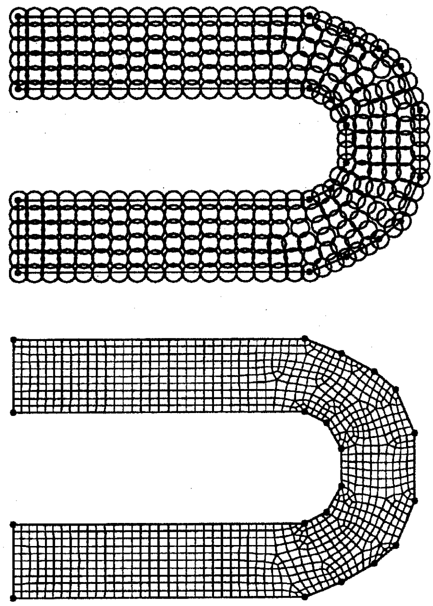


図 7: 本手法による四角メッシュ (1)

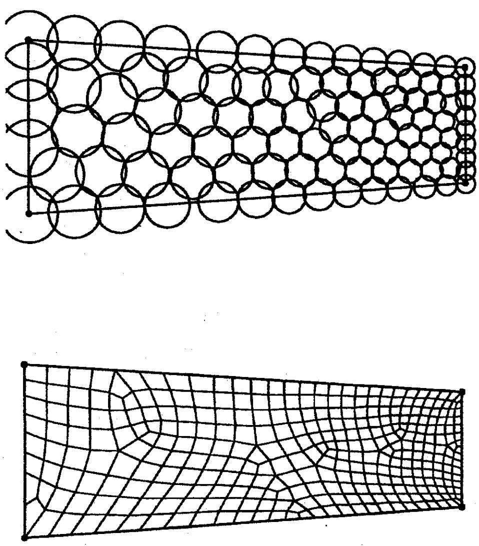


図 6: 従来手法による四角メッシュ (2)

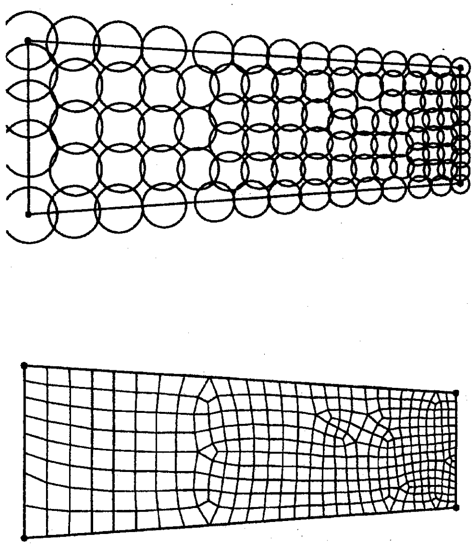


図 8: 本手法による四角メッシュ (2)