

## 自由曲面の3角形メッシュ近似とその応用

山本 大輔 齊藤 剛  
東京電機大学工学部

101-8457, 千代田区神田錦町 2-2

自由曲面形状を多面体で近似することは、表示や干渉計算などを目的としてよくおこなわれる。多面体近似では、近似の目的に応じた評価量に関する精度を保証することが必要である。本研究の目的は、様々な評価量による効率の良い多面体近似法の開発にある。本報告では、(1) 曲面と近似面との距離、曲面法線と近似面法線の角度差を制御した3角形メッシュによる近似法について述べ、(2) 各々の近似法に対し他の評価量に対する誤差の可視化、および近似の評価について述べる。さらに、前述の評価量に加えて、曲面の性質を保存した近似法として、曲率に基づく値を評価量とした近似法について述べる。そして、多面体近似の応用例の一つとして、多面体の展開図の作成法についても報告する。これにより、曲面の大まかな形状を実際に「紙細工」として作成することが可能となる。

## A Method of Triangle Mesh Approximation of Free-form Surface and Its Application

Daisuke YAMAMOTO Tsuyoshi SAITOH

Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-nisiki-cho, Chiyada-ku, Tokyo, 101-8457, Japan

### Abstract

For generation of computer graphics images and simplification of interference calculation, polyhedronization of free form surface is useful. It is necessary for the approximation that the error can be estimated and the number of polygon is minimized. In the paper, a new method of generation of triangle mesh approximating the free form surface is described. We treat Bézier surface and construct the polyhedron as connected triangles. We choose the distance between the surface and polyhedron and the angle between normal vectors of adjacent planes as criteria of estimation. And also we describe a method for generating the expansion charts from the polyhedron.

### Key Words:

Free form surface, Polygon approximation, Bézier surface, Triangle mesh, Expansion chart

## 1 はじめに

自由曲面形状の多面体近似において、近似目的に対応した評価量で近似制御することは、表示や近似的な干渉計算などに有用である。

形状表示については、曲面の特徴を保持するように3角形メッシュに分割しておくことにより、グラフィックエンジン等の専用ハードウェアを用いて高速に、しかも、曲面特徴を損なうことなくレンダリングを施すことができる。また、干渉する形状の高速表示においても、特に干渉部のメッシュ構造が、表示の質と速度に影響する。

近似をおこなう際、細かい多面体で近似をおこなうと、近似精度は向上するが近似後の処理量が増加し、逆に大きな多面体で近似をおこなうと、処理量は減少するが近似誤差が大きくなる。また、多面体近似の目的により、どのような評価量で近似精度を保つかが変わる。したがって、目的とする評価量における誤差精度を満たしつつ出来る限り少ない多面体で近似をおこなうことが処理効率の点からも、また精度の点からも求められる。

本研究では、自由曲面を対象とした様々な評価量による効率の良い多面体近似法の開発を目的としている。本稿では、自由曲面として Bézier 曲面を対象とし、曲面の3角形メッシュ化法を述べる。評価量は、曲面と近似面との距離、曲面法線と近似面法線の角度差、および、曲率に基づいた値とした。また、これらの評価量による近似の評価として、近似誤差の可視化をおこない評価をおこなった。

そして、応用例の一つとして実際に形状を確認することが容易におこなえるように、これらの方法によって得られた3角形メッシュに対し、展開図作成をおこなったので併せて報告する。

## 2 自由曲面の多面体近似法

始めに、メッシュ生成の概要を示す。本法では、Bezier 曲面を、評価量に依存したパラメータによる3角形メッシュ分割を以下の方法により繰り返しおこなう。まず、Bezier 曲面の4端点を4辺形の頂点とみなし、それを対角線

により2つの3角形メッシュに分割する。それを初期近似面とする。次いで、曲面と近似面をそれぞれの評価量で評価し、近似面が目的とする評価量を満たしていない場合、その3辺形の「ある辺のある位置」(後述)とその反対側の頂点を結ぶ事により、あらたな2つの3角形メッシュに分割する。この手続きを、分割した近似面が目的とする評価量を満たすまで再帰的におこなう。「ある辺のある位置」とは、(1)一番長い辺の midpoint、(2)法線差の一番大きい辺の法線角度が2分の1となる点、である。それぞれの評価量の算出法は次で述べる。

## 3 距離および面法線角度差

### 3.1 曲面との距離を評価量をする場合

近似精度を制御した多面体近似として、距離を評価量とした近似方法が種々考案され、報告されている。しかし、近似面と曲面との最大距離を定式的に求める事はできない。本法では、以下の方法で求めた値を評価値とした。まず、対象とする3辺形内のパラメータ値を等分割し、各々の曲面上の点を求め、近似面との距離を求める。次に求めた距離の中での最大距離の部分で、さらに細かい等分割をおこない曲面上の点を求め同様に距離を算出する。この距離計算と平行して、その点での面法線ベクトルも求める。その法線ベクトルが近似面の法線ベクトルと方向が一致するまで繰り返す。

このようにして求められた曲面上の点と近似面との距離による近似例を図1、図2に示す。

### 3.2 面法線の角度を評価量とした場合

シェーディング等のレンダリングを施した表示をおこなう場合、曲面上の輝度はその点での法線ベクトルによって求まる。このため、1枚のメッシュで近似される曲面領域内の各点における面法線ベクトルと近似面の法線ベクトルとの角度差を評価量とした多面体近似をおこなえば、拡散反射と鏡面反射の双方に対応した輝度を評価量とした近似として利用できる。これにより高品位なレンダリング表示が得られる。この近似例を図1、図2に示す。

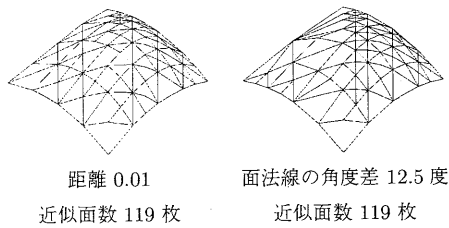


図 1: 近似結果

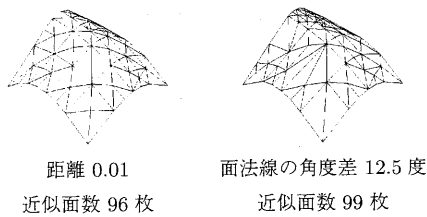


図 2: 近似結果

### 3.3 近似誤差の可視化と比較

このようにして得られた 3 角形メッシュについて、近似誤差を以下の方法により算出し、評価をおこなった。まず、曲面上のある点がどの近似面と対応するかを調べる。次に、その近似面と曲面上の点について近似誤差を算出し、可視化する。距離での評価では曲面上の点と、その点に最も近い近似面との距離、面法線の角度差での評価は、その点における曲面の法線と近似面法線の角度差とした。

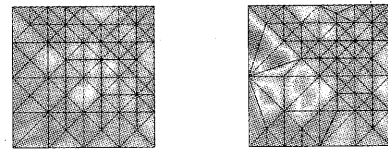
### 3.4 評価結果

3.1 節および 3.2 節での近似に対する評価結果を図 3 および図 4 に示す。これらの図では、色が濃い部分が近似誤差が大きい事を示している。

これらの図より、各評価量による近似結果が目的とする近似精度を満たしている事がわかる。また、ほぼ同じ近似面数によってメッシュを構成したが、それぞれ目的の近似精度を満たすための多面体が構成されている。

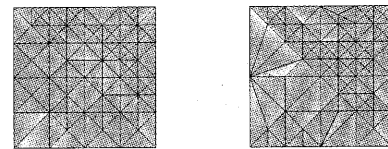
## 4 曲率に基づく多面体近似

曲面固有の性質は、曲面上の主曲率の分布により示すことができる。したがって、曲面固有の形状特徴を保存した多面体近似をおこ



評価量：距離で近似  
距離で評価

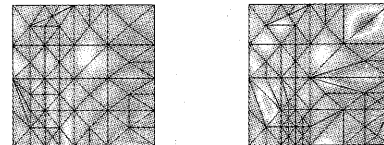
評価量：面法線差で近似  
距離で評価



評価量：距離で近似  
角度差で評価

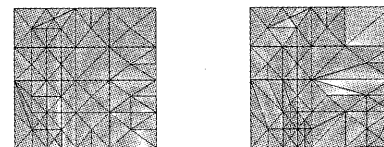
評価量：面法線差で近似  
角度差で評価

図 3: 図 1 の結果の評価結果



評価量：距離で近似  
距離で評価

評価量：面法線差で近似  
距離で評価



評価量：距離で近似  
角度差で評価

評価量：面法線差で近似  
角度差で評価

図 4: 図 2 の結果の評価結果

なうためには、曲率に基づいたメッシュ生成が必要となる。

#### 4.1 曲率に基づく評価量

曲率そのものを評価量として近似をおこなうのは困難である。そこで、本稿では近似面どうしの面法線角度差を評価量とすることで、曲率に基づく近似法に応用できると考え、Bézier曲面の多面体近似をおこなった。

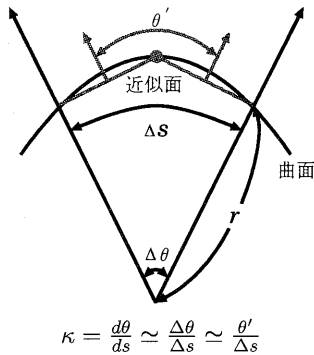


図 5: 説明図

具体的な手順は前述した多面体近似法とほぼ同じであるが、分割点に以下の違いがある。すなわち、分割の際その近似面の一番長い辺の midpoint で再分割をおこなったと仮定し、仮の近似面（これを、仮想近似面と呼ぶ）を作成する。この仮想近似面どうしの法線ベクトルの角度差  $\theta'$  を算出する（図 5 参照）。算出した角度差  $\theta'$  が目的とする量より大きい場合、その面を実際に分割する。この処理を接続されている面との角度差が、与えられた許容範囲内となるまで繰り返しおこなうことにより、多面体を構成する。このようにして得られた近似例を示す。

図 6 (a) は、角度差を 10 度とした例である。従来の方法を比較するために、図 6 (a) での近似面と曲面との最大距離を求め、それを評価量として、距離で近似した例が図 6 (b) である。図 6 (a) では、曲率が大きい部分で細かい多面体で近似されている。次にこの多面体に

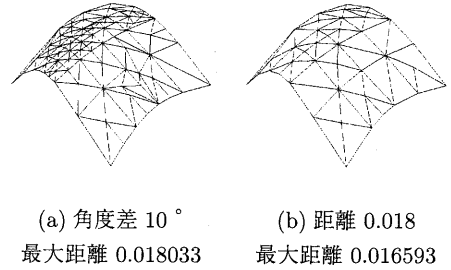


図 6: 近似例

レンダリングを施した結果を図 7 に示す。

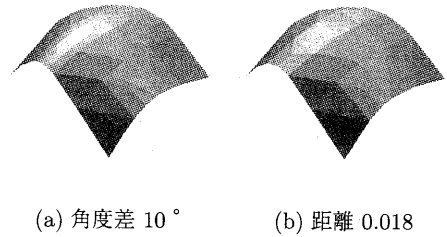


図 7: レンダリング表示

この結果を比較すると、曲率の大きい部分では細かい近似がおこなわれているため、ハイライトがより明らかになっている。

#### 4.2 分割点の変更

さらに、曲面の曲率に沿った分割を近似面数の点から効率よくおこなうために、仮想近似面を作成する際の分割点を以下の通りとした。

分割する辺の両端点での面法線の角度差を  $\Delta\theta$  とするとき、 $\int \kappa ds = \frac{\Delta\theta}{2}$  となる点、つまり曲面法線が近似面法線の方を 2 分する点を仮分割点とする（図 8 参照）。これにより再分割時に近似面法線の差が最小となる分割が可能となり、よりハイライトが鮮明に表示される多面体を構成することが可能となる。また、凹領域を含む曲面の場合は分割点が存在しない、または 2 つ以上分割点が存在する可能性がある。そのため、その場合は稜線上で法曲率が 0 となる点で分割をおこなうこととする。

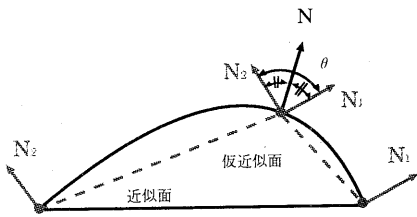
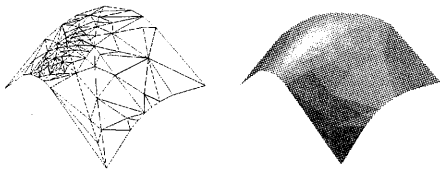


図 8: 分割点の変更

### 4.3 近似例

近似例を示す。4.1節（分割点を近似面の一番長い辺の中点）と同一の条件で、分割点を  $\int \kappa ds = \frac{\Delta\theta}{2}$  となる点で近似した例が図9である。図9の結果の方が曲面の曲がっている方向に沿って多面体が構成されており、良好な結果が得られる。また、図10は、凹領域を含む例であり、曲率0を含む曲面でも、良好な近似結果が得られた。しかし、法曲率が0となる点で必ず分割をおこなうために、その点に近似面頂点が集まってしまう。

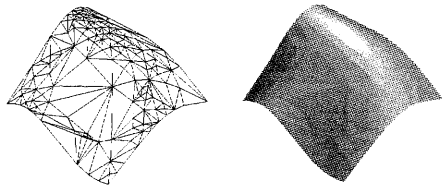


(a) メッシュ表示 (b) レンダリング結果

図 9:  $\int \kappa ds = \frac{\Delta\theta}{2}$  となる点で分割  
近似面数 159 枚

## 5 展開図の作成

自由曲面として構成された形状を実際に作成してみるには、大がかりな装置が必要となる。一方、近似的に簡単な「紙細工」として作成してみることは、その直感的な形状認知法としての価値がある。地形図等では、等高線に沿って紙を切り、それを重ねて地形図を作成することは、しばしばおこなわれている。



(a) メッシュ表示 (b) レンダリング結果

図 10: 凹領域を含む曲面の例  
近似面数：218 枚

ここで、多面体近似をおこなった結果の応用の一例として、近似したメッシュの展開図を作成する。なお、本法では、「のりしろ部」については考慮していない。

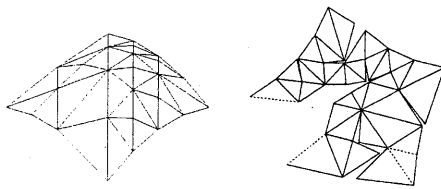
### 5.1 具体的な手順

基本的な考え方は、メッシュの各稜線に対して、その稜線を展開のために切断するか否かを決定し、全体が展開できるようにすることである。具体的には、近似面に隣接している面との角度差を算出し、その中で最も角度差が大きい面との接続稜線および、曲面稜線上の辺を初期切断辺とする。その際、各近似面が孤立しないようにするため、1つの面に対し切断辺は最大2辺までとする。この初期条件を元に近似面をそれぞれ回転移動させて展開図を作成する。また、各面に対し回転移動はそれぞれ1回しかおこなわない。これは無限ループになるのを防ぐためと、各面が孤立しないための条件である。

この方法により、構成した展開図作成例を図11に示す。これらの図において、実線は「山折り」、破線は「谷折り」を示している。山折りか谷折りかの決定は、各接続稜線の中点とその点に対応する曲面上の点との高さにより判定する。

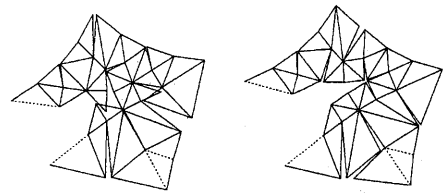
### 5.2 オーバーラップの検出と補正

前述した初期条件のみで展開図を作成すると、近似面同士に重なりが生じてしまう場合がある。これらの検出法と補正法を述べる。



(a) 近似例 (b) 展開図

図 11: 展開図作成例



(a) 補正前 (b) 補正後

図 13: オーバーラップ補正例

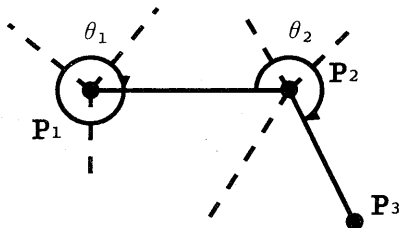


図 12: 説明図

図 12 において、実線および点線は、メッシュの稜線、 $P_i$  は、その頂点である。また、 $\theta_1, \theta_2$  は、それぞれの頂点を共有し、図示した範囲にある 3 三角形の角度の総和である。

重なる場合 1 : 例えば、頂点  $P_1$  に関して、

$$\theta_1 > 2\pi$$

となる場合、頂点  $P_1$  からのどの稜線で切断したとしても切断してできる 2 つの 3 三角形は重なる。したがって、この場合は、 $P_1$  を 2 辺以上で切断する必要がある。

重なる場合 2 : また、図 12 の実線で示した稜線で切断することを仮定する。このとき、

$$\theta_1 - \pi > 2(2\pi - \theta_2)$$

なる条件が成り立つと、頂点  $P_2$  に対応する点が、内部に位置し、重なりが生じる。したがって、このような稜線での切断はできない。

また、これ以外にもある面が他の面内に存在する場合もあるが、それは、各面の稜線と他の稜線との交線の有無によって検出する。交線が存在した場合は、その面の稜線切断・接続

情報から、初期条件で切断辺となっている稜線を接続稜線へと変更し、再度展開図を作成する。この処理を繰り返しおこなう事により、オーバーラップが生じない展開図を作成することができる。

図 13 に補正例を示す。

## 6 まとめ

本報では、曲面と近似面との距離、曲面法線と近似面法線の角度差、および曲率に基づいた値として近似面の角度差を評価量とした多面体近似について述べた。これらの評価量を組み合わせる事により、様々な目的に応じた多面体近似が可能となった。また、近似応用例として展開図の作成アルゴリズムを開発し、実際に形状を確認することが容易におこなえるようになった。また、本手法は一般の 3 三角形メッシュにも適用可能である。

今後の課題としては、まず輝度による各評価量による近似結果の評価法の確立、さらに効率の良い分割アルゴリズムの開発、および各評価量間の関係の明確化が挙げられる。また、展開図についてもアルゴリズムの効率化が課題である。

## 参考文献

- 1) 山本 大輔, 齊藤 剛:「自由曲面の多面体近似とその応用」平成 10 年情報処理学会秋季全国大会
- 2) 山本 大輔, 齊藤 剛:「自由曲面の曲率に基づく多面体近似」平成 11 年情報処理学会春季全国大会
- 3) 清水 徹, 齊藤 剛:「自由曲面の多面体近似とその応用」平成 9 年情報処理学会秋期大会
- 4) 穂坂 衛:「CAD/CAMにおける曲線曲面のモデリング」東京電機大学出版局, 1996
- 5) G.Farin:「CAGDのための曲線・曲面理論」共立出版, 1991