

# 不規則メッシュ上の $G^1$ 連続な補間曲面の生成法

室谷 浩平

杉原 厚吉

東京大学大学院情報理工学系研究科 数理情報学専攻

## 概要

本研究の目的は、組織化されていないデータ点（不規則データ）を全て通過し、 $G^1$ 連続であり、そして、主曲率の2乗和 $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$ の総和が最小となる補間曲面を生成することにある。これまでは、三つの性質のうち二つの性質を満たす曲面の生成法は存在していたが、三つの性質を全て満たす曲面は存在しなかった。これらの三つの性質を達成するために、本稿では、データ点を頂点とする三角形メッシュの上にベジエパッチを張り、パッチの境界での連続性を確保したうえで、不要なうねりを防ぐためにできるだけ曲率の小さい曲面を構成する。そして、その有効性を実験的に確かめる。

## $G^1$ surface interpolation for irregularly located data

MUROTANI Kohei

SUGIHARA Kokichi

Department of Mathematical Informatics,

Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

## Abstract

The purpose of this research is to construct a surface passing through all unorganized data points, with  $G^1$  continuity and with the minimal square-sum of the principal curvatures  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$  over the surface. There are already many methods that achieve two of these three characteristics, but there is no surface yet which has all of three characteristics. In order to construct surfaces with these three characteristics, we construct the triangular mesh spanning data points, cover it with Bezier patches, achieve continuity between patches, and in addition minimize the curvature is to prevent unnecessary undulation. Then we experimentally confirm its availability.

## 1. はじめに

本研究の目的は、組織化されていないデータ点を全て通過し（不規則データの補間）、 $G^1$ 連続性を持ち（接平面が連続）[3]、主曲率の2乗和 $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$ の総和が最小[6]の三つの性質を全て満たす曲面を構成することにある。本稿では、主曲率の2乗和 $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$ の総和が最小となる曲面を2乗主曲率最小曲面と呼ぶことにする。組織化されていないデータ点を全て通過するという性質は、入力データをどのように選択しても曲面を生成で

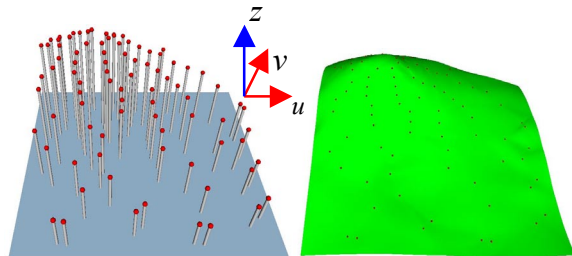
きるという性質である。二つ目の性質と三つめの性質は、目的の曲面が、波打って歪んだりしない滑らかな曲面であることを意味している[1][2][4][6]。これまでは、三つの性質のうち一つあるいは二つの性質を満たす曲面の生成法は存在しているが、三つの性質を全て満たす曲面は存在しない。特に[5]はSubdivisionを用いた研究ではあるが、本研究の目的に近いものである。しかし、メッシュの頂点の次数が4でない頂点での取り扱いが理論的に不完全であり、また頂点の次数ごとに異なる扱い方をしなければならないという

わずらわしさがある。一方、本研究では、Subdivision という手法を採っていないので、このような問題は発生しない。

本研究では、曲面を構成するパッチに4次のベジエ三角形曲面を用い、そのパッチ間の $G^1$ 連続性を達成するために、ベジエ制御ネットに $G^1$ 連続を満たすための十分条件を組み込む。さらに、ベジエ制御ネットに残しておいた自由度を用いて2乗主曲率最小曲面になるようにパラメータを決定する。このようにして構成された曲面は、本論文の目的である三つの性質を兼ね備えた曲面となる。2章では、三つの性質を全て満たす曲面を生成する新しい手法を説明し、3章ではその応用例を示し、最後に4章で結論を述べる。

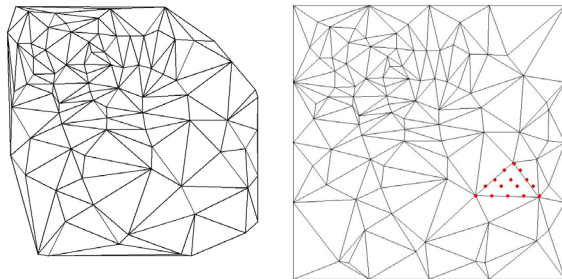
## 2. 新しい補間法

この章では、三つの性質を満たす曲面を生成する手法を説明する。最初に、問題はっきりさせる。



(a) (b)

図 2.1. データ点での高さとその補間する曲面。



(a) (b)

図 2.2. 領域の三角形分割。

$\Omega$  を  $(u, v)$  座標系を持つ平面上の 2 次元領域とする。座標点  $(u_i, v_i) \in \Omega, i=1, 2, \dots, N$  での高さ(値)  $z_i$  が与えられているとし、 $T = \{(u_i, v_i) | i=1, 2, \dots, N\}$  とおく。そして、 $T$  の要素をデータ点と呼ぶ。全

てのデータ点で与えられた値をとり、 $G^1$  の条件式を満たし、不必要に波打つことのない関数  $f(u, v)$  を求めることが目標である。つまり、図 2.1(a) のように与えられた情報から、図 2.1(b) のような曲面を再構成するのが目的である。

まず、領域  $\Omega$  を  $M$  個の三角形要素  $\Omega_e, e=1, 2, \dots, M$  に分割する。これからは、 $(u, v)$  を  $\Omega$  上の点を表す大域パラメータ、 $(s, t), s, t \in [0, 1]$  を各三角形要素内の点を表す局所パラメータとする。

データ点だけを頂点に用いて三角形分割すると、図 2.2(a) のように潰れた三角形が多数できてしまうことがある。これを防ぐために、高さ情報を持たない点を必要に応じて加えて図 2.2(b) のように三角形分割を整形する。このとき加える点をスタイナー点と呼ぶ。図 2.2(b) では、境界上に 16 のスタイナー点を加えてある。図 2.2(b) に示すように 1 つの三角形要素内に 15 個の節点を設ける。これは、ベジエ三角形曲面の制御点の重心座標に対応している。

2.1 節では、ベジエ三角形曲面の定義をし、2.2 節では、 $G^1$  連続となるために制御ネットが満たすべき十分条件の組み込み方を説明する。そして、2.3 節では、制御ネットに残った自由度を使って、最小曲率曲面の実現の方法を説明する。

### 2.1. ベジエ三角形曲面

本研究では 4 次のベジエ三角形曲面 [3] を扱うので、それについて説明する。ベジエ三角形曲面の制御ネットの定義域

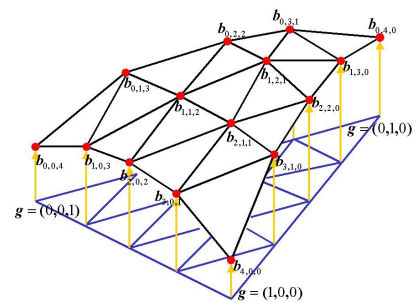


図 2.3. ベジエ三角形曲面の制御ネット。

を、図 2.3 のように規則正しく並んだ三角形メッシュにとる。この先では、 $i+j+k=4$  を満たす  $i, j, k$  の組み合わせを  $i=(i, j, k)$  と表し、制御点の高さ成分  $b_{i,j,k}$  を  $b_i$  と書くことにする。また、 $i$  のノルムを

$|i|=i+j+k$  とし,  $i, j, k$  は常に  $i, j, k \geq 0$  とする. 2変数のバーンスタイン多項式  $B_i^n(s, t, r)$  を,

$$B_i^n(s, t, r) = \frac{n!}{i! j! k!} s^i t^j r^k \quad (|i|=n, s+t+r=1) \quad (2.1.1)$$

と定義する.  $(i, j, k)$  のいずれかが負のときは  $B_i^n(s, t, r) = 0$  と定義する. (2.1.1) 式と制御点  $b_{i,j,k} = (i/4, j/4, k/4, b_{i,j,k})$  を用いて, 4 次のベジエ三角形曲面は,

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ r \\ z \end{bmatrix} = \sum_{|i|=4} \begin{bmatrix} i/4 \\ j/4 \\ k/4 \\ b_i \end{bmatrix} B_i^4(s, t, r) \quad (2.1.2)$$

と表現できる. (2.1.2) 式は, 2変数のバーンスタイン多項式  $B_i^4(s, t, r)$  を係数とする制御点  $b_i$  の重心結合になっている. よって, 制御点  $b_i$  が決まれば, ベジエ三角形曲面  $b^4(s, t, r)$  は一意に求まる.

## 2.2. パッチ間の連続性の確保

この節では, 境界を挟んだパッチが  $G^1$  連続となる

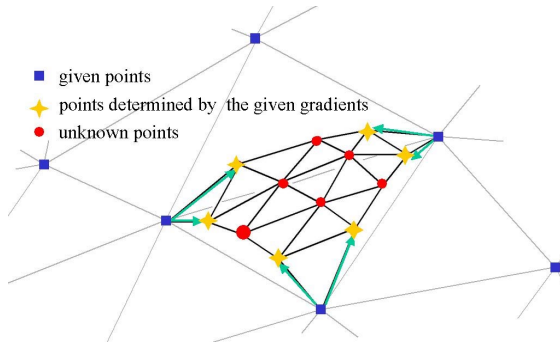


図 2.4. 既知の点と未知の点.

るための十分条件を制御点  $b_i$  に組み込む方法を説明する. 三角形メッシュの頂点 (データ点) での高さ集合は  $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$  である. これはベジエ三角形の角の制御点  $b_{4,0,0}, b_{0,4,0}, b_{0,0,4}$  に対応する. あるパッチの制御ネットの3頂点  $b_{4,0,0}, b_{0,4,0}, b_{0,0,4}$  を, 三角形メッシュの頂点に対応しているため既知の点である. 制御ネット上で3頂点  $b_{4,0,0}, b_{0,4,0}, b_{0,0,4}$  の隣の  $b_{3,1,0}, b_{3,0,1}, b_{1,3,0}, b_{0,3,1}, b_{1,0,3}, b_{0,1,3}$  は, 三角形メッシュの頂点に対応するパッチの部分が  $G^1$  連続になるように  $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$  の要素の一次式で表現

される. こうして, 1つのパッチ内の15の制御点の内, 9つの制御点が既知の点となる(図 2.4).

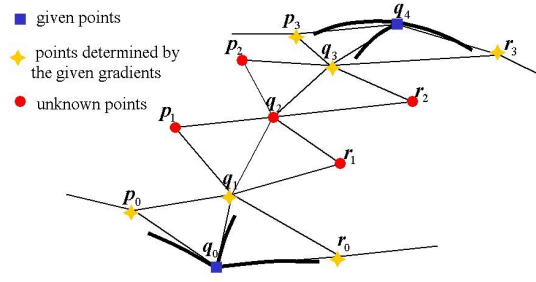


図 2.5.  $q_i, p_i, r_i$  の位置関係.

図 2.5 のように, 隣接するパッチの境界上の制御点列  $\{q_i\}$  と境界を挟んだ2つの制御点列  $\{p_i\}, \{r_i\}$  を与えその高さ成分  $\{q_i\}, \{p_i\}, \{r_i\}$  を用いれば, ベジエ三角形パッチが  $G^1$  連続であるための次のような十分条件を得ることができる.

$$\begin{aligned} \lambda p_0 + (1-\lambda)r_0 &= \mu q_0 + (1-\mu)q_1, & \lambda p_1 + (1-\lambda)r_1 &= \mu q_1 + (1-\mu)q_2, \\ \lambda p_2 + (1-\lambda)r_2 &= \mu q_2 + (1-\mu)q_3, & \lambda p_3 + (1-\lambda)r_3 &= \mu q_3 + (1-\mu)q_4 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

但し,  $\lambda, \mu$  は定数である.  $q_0, q_1, q_3, q_4, p_0, p_3, r_0, r_3$  の値は既知であるので,

$$\begin{aligned} \lambda p_0 + (1-\lambda)r_0 &= \mu q_0 + (1-\mu)q_1 \\ \lambda p_3 + (1-\lambda)r_3 &= \mu q_3 + (1-\mu)q_4 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

から  $\lambda, \mu$  を求めることができる. また, (2.2.1) の残りの式から,

$$\begin{aligned} \lambda p_1 + (1-\lambda)r_1 &= \mu q_1 + (1-\mu)q_2 \\ \lambda p_2 + (1-\lambda)r_2 &= \mu q_2 + (1-\mu)q_3 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

の2つの条件式を得ることができ, 求めたいものは  $q_2, p_1, p_2, r_1, r_2$  であるので,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda & 0 & 0 & -1+\mu \\ 0 & 0 & \lambda & 1-\lambda & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ r_1 \\ p_2 \\ r_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu q_1 \\ (1-\mu)q_3 \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

と書き直す. ある三角形メッシュを考えたとき, (2.2.4) は境界を除く全ての辺で作ることができる. それらの条件式を全て満たせば, その曲面は  $G^1$  である. こうして, 全ての辺に対して (2.2.4) を求め, 集めると, 連立1次方程式  $Ax=y$  が得られる. 但し,  $A$  は  $L \times H$ , ( $L < H$ ) の横長の行列であり, あ

る特殊な場合（メッシュを作成するときに回避できるのでここでは考えない）を除いてランクは  $L$  である． $x$  は各辺の未知数  $q_2, p_1, p_2, r_1, r_2$  を集めたものであり， $y$  は定数項を集めたものである． $x$  を一意に求めることはできないので， $A_1 x_1 = y - A_2 x_2$  のように変形する．この時， $A_1$  は  $N \times N$  の正則な行列になるようにし，その列成分に対応する  $x$  の部分集合が  $x_1$  である． $A_2$  は  $A$  から  $A_1$  を除いた残りの列成分から構成されたものであり，その列成分に対応するものが  $x_2$  である．ここで， $x_1$  は  $x_2$  を用いて， $x_1 = A_1^{-1}(y - A_2 x_2)$  と表現できるので， $x_1$  は  $x_2$  の線形結合で表現される．このようにして， $x_2$  を適当に決めれば，三角形パッチの全ての制御点  $b_i$  が求まるので， $G^1$  連続な曲面が求まる．次の節では，2 乗主曲率最小曲面になるような  $x_2$  の求め方を説明する．

### 2.3 . 2 乗主曲率最小曲面の求め方

この節では，スタイナー点を加えることを許した，2 乗主曲率最小補間曲面を求める方法を説明する．2 乗主曲率最小曲面は，

$$\text{Minimize } \iint_{\Omega} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) du dv \quad (2.3.1)$$

で実現される．但し， $\Omega$  は曲面を定義する 2 次元領域を表す．この非線形の幾何関数を直接扱うのは大変厄介であるため， $\Omega$  上で定義される高さ  $z = f(u, v)$  によって表現される曲面のみについて考え，(2.3.1) の積分を近似すると

$$I(f(u, v)) = \iint_{\Omega} \{f_{uu}^2 + 2f_{uv}^2 + f_{vv}^2\} du dv \quad (2.3.2)$$

となる．(2.3.2) は， $f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}$  の多項式であるため取り扱いに便利な表現である．この節での目的は，汎関数  $I(f(u, v))$  を最小にする関数  $f(u, v)$  を求めることである．

$I(f^e(u(s, t), v(s, t)))$  を汎関数の各有限要素に対応する部分すると，

$$\begin{aligned} I(f(u, v)) &= \iint_{\Omega} \{f_{uu}^2 + 2f_{uv}^2 + f_{vv}^2\} du dv \\ &= \sum_{e=1}^M I(f^e(u(s, t), v(s, t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(f^e(s, t)) &= \iint_{\Omega_e} \{f_{uu}^{e2} + 2f_{uv}^{e2} + f_{vv}^{e2}\} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-t} F^e(s, t) \det[J] ds dt \end{aligned}$$

を得る．但し， $\det[J] = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s}$  であり， $F^e(s, t)$  は  $f_{uu}^{e2} + 2f_{uv}^{e2} + f_{vv}^{e2}$  をパラメータ変換した結果得られる  $f_{ss}^e, f_{st}^e, f_{tt}^e$  の 2 次形式で表現されるものである．係数  $f_j^e$  を持つ関数  $\phi_j(s, t)$  の線形結合により，

$$f^e(s, t) = \sum_{j=1}^{M_e} f_j^e \phi_j(s, t) \quad (2.3.3)$$

と表現する．この関数  $\phi_j(s, t)$  を内挿関数と呼ぶ．これは 2.1 節の 2 変数のバーンスタイン多項式  $B_i^4(s, t, r)$  に対応し， $f_j^e$  は制御点の高さ成分  $b_i$  に対応する．そして， $M_e$  を三角形要素  $\Omega_e$  内の節点数とすれば， $T_e = \{(u(s_i, t_i), v(s_i, t_i)) \mid i=1, 2, \dots, M_e\}$  は，三角形要素  $\Omega_e$  の節点の集合になり， $f^e = \{f_1^e, \dots, f_{M_e}^e\}$  は， $T_e$  の各要素に対応する内挿関数の係数の集合になる．

メッシュの頂点の数を  $N$  とすれば， $f = \{f_1, \dots, f_N\}$  は三角形メッシュの頂点における内挿関数の係数の集合になる．内挿関数の係数が与えられた頂点での内挿関数の係数の集合を  $f^a = \{f_1^a, \dots, f_{n_a}^a\}$ ，内挿関数の係数が与えられていない頂点での内挿関数の係数の集合を  $f^b = \{f_1^b, \dots, f_{n_b}^b\}$  とする．要するに， $f^a$  はデータ点  $T$  の要素に対応した係数の集合であり， $f^b$  はそれ以外の頂点に対応する係数の集合である．ここで，前節の  $x_1$  を既知の点の集合として  $f^a$  に含め， $x_2$  と境界上の辺に対応する制御点を未知の点の集合として  $f^b$  に含める．

汎関数  $I(f^e(s, t))$  は  $I(f^e(s, t)) = f^{eT} K_e f^e$  と表すことができる．但し， $f^e = \{f_1^e, f_2^e, \dots, f_{M_e}^e\}^T$  であり， $K_e$  は， $(i, j)$  要素が

$$\begin{aligned} [K_e]_{ij} &= \int_0^1 \int_0^{1-t} \{c_1^e (\frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi_j) + c_2^e (\frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \phi_j) \\ &\quad + c_3^e (\frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_j) + c_4^e (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \phi_j) \\ &\quad + c_5^e (\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_j) + c_6^e (\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_i) (\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_j)\} \det[J] ds dt \end{aligned}$$

と定義されている  $M_e \times M_e$  行列である． $c_i^e$  は三角形要素毎に異なる係数である． $I(f(u, v))$  を最小にするような関数  $f(u, v)$  は，

$$\frac{\partial I(f)}{\partial f_i^b} = \sum_e \sum_i \frac{\partial I(f^e)}{\partial f_i^e} \frac{\partial f_i^e}{\partial f_i^b} = 0 \quad (i=1, \dots, n_b) \quad (2.3.4)$$

を満たす．これを全ての  $f_i^b$  について集め，定数項を左辺に移すと  $K f^b = b$  となる．但し， $b$  は定数ベクトルである．行列  $K$  は  $n_b \times n_b$  の正則行列であるので， $f^b$  が一意に求まる． $f^b$  の要素が全て求まると， $\cup f^e$  の要素が全て求まる．こうして，(2.3.3) での  $f^e(s, t)$  の係数が全て求まるので，汎関数  $I(f(u, v))$  を最小にする関数  $f(u, v)$  を求めることができる．図 2.6 と図 2.7 は，このアルゴリズムを用いて生成された，2 乗主曲率最小  $G^1$  補間曲面である．

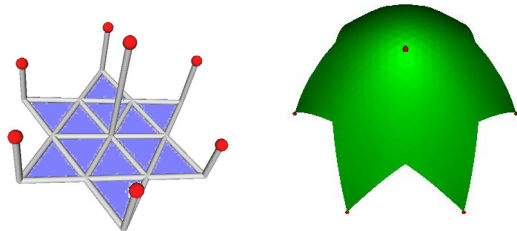


図 2.6 メッシュと再現された曲面 1 .

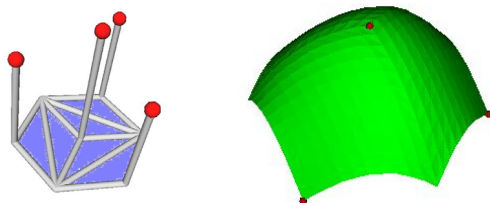


図 2.7. メッシュと再現された曲面 2 .

### 3 . 数値実験例

#### 等高線データから地形曲面の再現

地理情報システム (GIS) にとって，3 次元地形データは，重要で基本的なデータである．3 次元地形データの表現形式の 1 つに，ラスターデータの DEM (Digital Elevation Model) があり，現在我々の国で入手可能な DEM には，国土地理院発行の「数値地図」がある．しかし，そのデータは 50m メッシュに過ぎず，勾配計算を含む各種地形解析や高解像度リモートセンシングデータとの併用には十分なものではないため，更に分解能の高い 3 次元地形データの構築が望まれている．この節で

は，等高線データから 3 次元地形データを構成する方法を説明する．

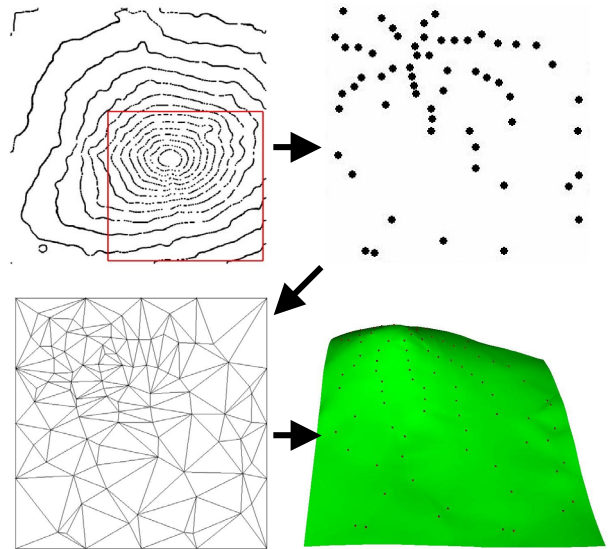


図 3.1 等高線データから 3D 地形の構成 1 (富士山): 左から，等高線，等高線の特徴を表している点の集合，2 次元での三角形メッシュ，再現された地形．

図 3.1 の左上の図は，標高差 200m 間隔の富士山の山頂付近の標高が 1000m, 1200m, 1400m, … 3600m の等高線である．赤枠内は，15km × 15km の正方形領域であり，そこに絞って地形を再現する．等高線データから，適当な方法を用いて，図 3.1 の右上の図のような，等高線の特徴を表している点の集合を求める．この点の数は 59 であり，それに，高さの値が未知である 16 のスタイナー点を加えドロネイ三角形分割したメッシュが図 3.1 の左下の図である (ここまでは，本研究に本質的に関係のない部分であるので，詳細は省略する)．このメッシュを用いて，2 章で説明した方法で曲面を構築した結果が，図 3.1 の右下の図である．

次に，起伏の激しい甲府盆地を例にあげる．対象としている領域は，11km × 11km の領域である．富士山の山頂付近のときと同様にして，等高線データを 200m ごとに，各等高線の特徴を表している点を 289 点求め，領域の境界辺上に 32 点のスタイナー点を加えドロネイ三角形分割したものが，図 3.2 の左図である．そして，この三角形メッシュから求められた曲面は，図 3.2 の右図である．図 3.2

の右図から，起伏の激しい例に対しても，本論文の手法は適用できることが分かる．

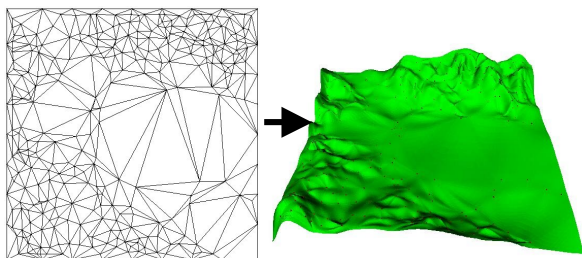


図 3.2. 等高線データから 3D 地形の構成 2 (甲府盆地):  
左から，2次元での三角形メッシュ，再現された地形．

## 4 . 結論

本研究の目的は，組織化されていないデータ点を全て通過し， $G^1$ 連続な，2乗主曲率最小曲面の曲面を生成することにあつた．

組織化されていないデータ点を三角形分割しただけでは(ドロネイ三角形分割でも)，良質な三角形メッシュを生成することは難しい．これは，ひいては，生成される曲面にも悪い影響を及ぼすことになる．一方，元々のデータだけでは潰れた三角形が生じるケースも，スタイナー点を幾つか加えることで良質な三角形のみで覆われたメッシュを生成することができる．このことに着目して本論文では，スタイナー点を導入しても曲面が生成できるように，偏微分方程式の有限要素解法で曲面を求める事にした．そして，偏微分方程式(Euler-Lagrange 方程式)に重調和関数 $\Delta^2 f = 0$ を用いることによって近似的に2乗主曲率最小曲面を求めることに成功した．

このまま偏微分方程式 $\Delta^2 f = 0$ を解いてしまうと2乗主曲率最小曲面を得ることができるが，パッチの接続部分で $G^1$ 連続になっていない可能性がある．この問題を回避するために，偏微分方程式 $\Delta^2 f = 0$ に制約条件として $G^1$ 連続であるための十分条件を与えた．この制約条件を満たす曲面は $G^1$ 連続な曲面であるので，この制約条件を組み込むことによって2乗主曲率最小 $G^1$ 曲面を生成するのに成功した．

今回用いた $G^1$ 連続であるための十分条件は，指定されたデータ点を全て通過することを前提にした条件にしてあるので，以上のことから，，，

全ての性質を満たす曲面を求めることができたわけである．

今後に残された課題には，計算の高速化，一般的なパラメトリック曲面 $S(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ への拡張，局所的な補間，データ点から推測される折り目を補間曲面上に残す方法などがある．

## 参考文献

- [1] Bloor, M.I.G., Wilson, M.J., Hagen, H., The smoothing properties of variational schemes for surface design, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, 1995, pp. 381-394.
- [2] Desbrun, M., Meyer, M., Schroder, P., and Barr, A.H., Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow, *SGGRAPH'99 Conference Proceedings*, 1999, pp. 317-324.
- [3] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [4] Taubin, G., A signal processing approach to fair surface design, *SIGGRAPH'95 Conference Proceedings*, pp. 351-358.
- [5] Halstead, M., Kass, M. and DeRose, T. D., Efficient fair interpolation using Catmull-Clark surfaces, *SIGGRAPH'93 Proceedings*, New York, 1993, pp. 35-44.
- [6] Kobbelt, L., Discrete fairing and variational subdivision for freeform surface design, *The Visual Computer*, 16, 2000, pp. 142-158.
- [7] 李薇, 張紹良, 名取亮, 3次のベジエ三角形曲面による滑らかな補間曲面の生成, *日本応用数理学会誌*, Vol. 10, No. 2, 2000, pp. 87-100.
- [8] 室谷浩平, 不規則メッシュ上の $G^1$ 連続な補間曲面の生成法, 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻修士論文, 2001.